Advances in Education 教育进展, 2024, 14(4), 384-389
Published Online April 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2024.144527

二维连续型随机变量函数分布的教学改革探索

杨秋花，李金泉

广西民族师范学院数理与电子信息工程学院，广西 崇左

收稿日期：2024年3月9日；录用日期：2024年4月8日；发布日期：2024年4月15日

摘 要

二维连续型随机变量函数的分布是学生学习概率统计的重点内容，也是教师教学中的一个难点。本文对我校学生关于此部分的学习过程中出现的问题进行剖析，利用自身已有的教学经验探讨了二维连续型随机变量函数分布的两种求解方法，并从教师的教、学生的学两个方面给出了自己的教学建议。

关键词

连续型，随机变量函数分布，分布函数法，公式法

Exploration of Teaching Reform on the Distribution of Two Dimensional Continuous Random Variable Functions

Qiuhua Yang, Jinquan Li

School of Mathematics, Physics and Electronic Information Engineering, Guangxi Minzu Normal University, Chongzuo Guangxi

Received: Mar. 9th, 2024; accepted: Apr. 8th, 2024; published: Apr. 15th, 2024

Abstract

The distribution of two-dimensional continuous random variable functions is a key content of probability statistics for students to learn, and it is also a difficult point in teacher teaching. This

文章引用: 杨秋花, 李金泉. 二维连续型随机变量函数分布的教学改革探索[J]. 教育进展, 2024, 14(4): 384-389.
DOI: 10.12677/ae.2024.144527

article analyzes the problems that arise during the learning process of our school's students regarding this part, and explores two methods for solving the distribution of two-dimensional continuous random variable functions based on our existing teaching experience. We also provide our own teaching suggestions from two aspects: teacher's teaching and student's learning.

Keywords

Continuous Type, Distribution of Random Variable Functions, Distribution Function Method, Formula Method

1. 引言

概率统计课程既是数学专业的核心课程，也是理工类、经管类本科专业的一门重要公共基础课程[1]。它在很多领域有着广泛的应用，因此提高概率统计的教学质量显得极为必要。概率统计中随机变量函数的分布是极为重要的一个内容，其中二维离散型随机变量函数的分布相对简单，而连续型的二维随机变量函数的分布是一个学习难点。这部分理论知识较为抽象与深奥，学生对二维连续型随机变量函数分布的概念与解法表示难以理解，学起来比较吃力，因此高校教师应积极探索此部分的教学方法以促进学生的学习。

问题的提出：已知(X,Y)为一个二维连续型随机变量，其联合概率密度为$f(x,y)$，设$Z=g(X,Y)$是X与Y的函数，假定Z是一个连续型随机变量，则求Z的概率密度函数。

一般情况下，求二维连续型随机变量函数的分布有两种常用的方法，分别是分布函数法与公式法，下面对这两种求解办法进行讨论。

2. 分布函数法

由分布函数的定义可得函数$Z=g(X,Y)$的分布函数为

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P\big(g(X,Y)\le z\big)=\iint_{g(x,y)\le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

进一步可以得到Z的密度函数

$$f_Z(z)=F'(z)=\mathrm{d}F(z)/\mathrm{d}z.$$

例 1 已知二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<0,\ \ 0<y<2x,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

求随机变量的$Z=2X-Y$概率密度函数。

解　由分布函数的定义知$F_Z(z)=P(X+2Y\le z)=\iint_{2x-2y\le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，则

(1) 当$z\le 0$，$F_Z(z)=0$；

(2) 当$0<z<2$，则有

$$F_Z(z) = P(2X - Y \le z) = \iint\limits_{2x-y\le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1 - \iint\limits_{2x-y\ge z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= 1 - \int_{z/2}^{1}\mathrm{d}x\int_0^{2x-z} 1\mathrm{d}y = 1 - \left(1 - (z/2)\right)^2$$
$$= z - \left(z^2/4\right).$$

(3) 当 $z \ge 2$， $F_Z(z) = 1$；

则 $Z = 2X - Y$ 的分布函数为

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \le 0, \\ z - \left(z^2/4\right), & 0 < z < 2, \\ 1, & z \ge 2. \end{cases}$$

故 $Z = 2X - Y$ 的密度函数为

$$f_Z(z) = \begin{cases} 1 - (z/2), & 0 < z < 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

分布函数法从自身的定义出发，比较中规中矩，它是求连续型随机变量函数分布的基本方法，相对稳妥可靠，但一般在计算二维连续型随机变量函数的分布时，所用到的积分计算比较困难与繁琐，这也是这部分教学的难点所在。而对于一些特殊的函数，可灵活变通采用公式法进行求解。

3. 公式法

下面分别给出二维连续型随机变量的和、差、商、乘积的分布。

定理 1 [2]：已知 (X,Y) 联合密度函数为 $f(x,y)$，则

(1) X 与 Y 的和 $Z = X + Y$ 的概率密度函数为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)\mathrm{d}x \overset{\text{由}X\text{与}Y\text{的对称性}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y)\mathrm{d}y\text{；}$$

特别当 X 与 Y 满足相互独立时，可得卷积公式

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\mathrm{d}y.$$

(2) X 与 Y 的差 $Z = X - Y$ 的概率密度函数为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, x-z)\mathrm{d}x \overset{\text{由}X\text{与}Y\text{的对称性}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z+y, y)\mathrm{d}y\text{；}$$

同理当 X 与 Y 相互独立时，有

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(x-z)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z+y) f_Y(y)\mathrm{d}y.$$

(3) X 与 Y 的商 $Z = X/Y$ 的概率密度函数

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x, \frac{x}{z}\right)\left|\frac{x}{z^2}\right|\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(zy, y)|y|\mathrm{d}y\text{；}$$

特别当 X 与 Y 满足相互独立时，得

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y\left(\frac{x}{z}\right)\left|\frac{x}{z^2}\right|\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(zy) f_Y(y)|y|\mathrm{d}y.$$

(4) X 与 Y 的乘积 $Z = XY$ 的概率密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x,\frac{z}{x}\right)\left|\frac{1}{x}\right|\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{z}{y},y\right)\left|\frac{1}{y}\right|\mathrm{d}y\text{；}$$

同理当 X 与 Y 满足相互独立时，有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y\left(\frac{z}{x}\right)\left|\frac{1}{x}\right|\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X\left(\frac{z}{y}\right)f_Y(y)\left|\frac{1}{y}\right|\mathrm{d}y\,.$$

例 2 随机变量 X 与 Y 满足相互独立，其中 X 与 Y 概率密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases},\quad f_Y(Y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求随机变量 $Z=X+Y$ 的分布密度函数。

解 X 与 Y 相互独立，故由定理 1 中的卷积公式 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\mathrm{d}x$ 得

(1) 当 $z<0$ 时， $f_X(x)f_Y(z-x)=0\Rightarrow F_Z(z)=0$；

(2) 当 $0\le z<1$ 时， $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\mathrm{d}x=\int_0^z \mathrm{e}^{-(z-x)}\mathrm{d}x=1-\mathrm{e}^{-z}$；

(3) 当 $z>1$ 时， $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\mathrm{d}x=\int_0^1 \mathrm{e}^{-(z-x)}\mathrm{d}x=(\mathrm{e}-1)\mathrm{e}^{-z}$。

则随机变量 $Z=X+Y$ 的分布密度函数为

$$f_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ 1-\mathrm{e}^{-z}, & 0\le z<1,\\ \mathrm{e}^{-z}(\mathrm{e}-1), & z>1.\end{cases}$$

例 3 设 X 与 Y 分别表示两个功能不同的扫地机使用时间，若 X 与 Y 相互独立，其概率密度如下

$$f_X(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases},\quad f_Y(Y)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则求随机变量 $Z=X/Y$ 的概率密度函数。

解 (1) 当 $z\le 0$ 时， $f_Z(z)=0$；

(2) 当 $z>0$ 时， $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(zy,y)|y|\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty} y\mathrm{e}^{-yz}2\mathrm{e}^{-2z}\mathrm{d}y=\dfrac{2}{(2+z)^2}$；于是

$$f_Z(z)=\begin{cases}0, & z\le 0,\\ \dfrac{2}{(2+z)^2}, & z>0.\end{cases}$$

4. 教学改革探索

4.1. 教学现状

概率统计中的二维连续型随机变量函数的分布是教师教学中的一个重点内容，也是学生学习中的一大难点。笔者任教的是本校 2020 级电子信息工程专业与 2021 级药物分析专业两个年级的概率统计课程。其中 2020 级电子信息工程专业总人数为 80 人，2021 级药物分析专业总人数 87 人。在教授二维连续型随机变量函数的分布内容后对学生布置了对应的作业与进行了学习内容测验，现抽查学生学习了二维连续型随机变量函数的分布内容后的掌握情况，即测试成绩如下。

Table 1. Distribution test score table for two-dimensional continuous random variable functions
表 1. 二维连续型随机变量函数的分布测试成绩表

分数段	90~100 (优秀)	80~89 (良好)	70~79 (中等)	60~69 (及格)	59 以下(不及格)
2020 级人数	8	24	29	10	9
2020 级比例	10%	30%	36.25%	12.5%	11.25%
2021 级人数	22	32	19	9	5
2021 级比例	25.29%	36.78%	21.84%	10.34%	5.75%

从上表 1 的成绩来看，学生在学习二维连续型随机变量函数的分布这部分教学内容时所发生的接受水平参差不齐，其中 2021 级的学生各分数段比 2020 级的比例高。2020 级的优秀率(90 分以上)较低，成绩良好的人数占中数，而所占人数最多的分数段为 70~79 分，不及格人数有 9 人。总体而言，2020 级教学效果不是很理想。2021 级相对 2020 级而言教学效果较好，其中能够完全掌握学习内容的人数(90 分以上)较多，优秀率为 25.29%，大部分学生基本能掌握本次的学习内容，分数在 80~89 之间，也有个别同学不能掌握学习内容导致不及格。课后经过了解学生的学习情况分析，得知分数较低的学生在概念理解上比较困难导致不会做题，少部分学生能够接受但做题出错率非常高，于是总结归纳得出学生觉得二维连续型随机变量函数的分布学习困难的原因主要有几点：第一，概念抽象，无法深度理解二维连续型随机变量函数的分布概念；第二，不知如何选择对应的解题方法，对其分布的解题方法的步骤流程不熟练；三是高等数学中的积分计算没掌握好，计算的基础普遍薄弱。本文针对以上问题及其原因，对求解二维连续型随机变量函数的分布总结了以下两点经验。

4.2. 教学改革措施

4.2.1. 从教师的教学方法出发

在讲授二维连续型随机变量函数分布时可采用类比教学法[3]。在教授二维连续型随机变量函数分布前，首先复习求解一维连续型随机变量函数分布的方法，接着引入二维的情况，引导学生模仿一维时的求解方法探索二维连续型随机变量函数分布的解法，从思想上逐步引导学生去理解与接受。在讲授完二维连续型随机变量函数分布的概念与定理之后，应当适当举一些浅显易懂的例子，帮助学生更好地理解与接受此部分的理论知识。而在计算二维连续型随机变量函数的分布时，需要借用到多重积分，因此在讲解计算时先给学生复习多重积分的计算，温故知新，以便学生掌握二维连续型随机变量函数分布的求解方法。

启发式教学法是现代课堂常用的一种教学方法。教师在教学过程中在授课的同时应时刻关注学生的动态，留意学生的一举一动，在关键时刻引导学生积极思考问题，对其进行启发式教学[4]。在鼓励学生的同时注意启发引导学生自主学习和独立思考，将课本涉及的知识点由复杂简单化，由抽象具体化来激发学生学习概率统计这门课程的兴趣与激情，加大力度提高学生的课堂学习的参与度。在教学过程中应把握教学节奏，根据学生的接受程度，可循序渐进地引导学生理解与掌握二维连续型随机变量函数分布的求解方法。

另外，教师应当丰富课堂教学方法与评价方式。传统的上课方式已然不能满足学生，故教师应对教学方式的进行改革。在教学方式上可采用板书 + 多媒体，特别在公式推导过程以及解题过程时，可采用板书进行详细讲解，而列举实例时可以使用多媒体使其更为形象生动，也可活跃课堂氛围[5]。互联网时代要充分利用网上资源，引入慕课、QQ、学习通、钉钉平台等学生喜欢的现代化教学，促进学生的学习。在对学生进行评价时，适当降低期末考试成绩的权重，可根据授课目标适当增加平时成绩的比例，这样

不仅能促使学生树立正确的学习态度，打消临时抱佛脚的想法，使其脚踏实地的学习，逐渐务实数学基础，还能够提高评价环节的时效性，确保学生得到全面的评价与科学指导。

4.2.2. 从学生的学习情况出发

所谓教学，是指老师的教与学生的学，这是一个双向的过程，要想取得好成绩，单方面改变教学方法不行，不仅要求教师在教法上下功夫，还得要求学生端正学习态度认真学。课堂不是教师一个人的课堂，不要一言堂；课堂是教师和学生共同的课堂，要多言堂[6]。学生在学习二维连续型随机变量函数的分布时，教师要鼓励学生多听多问，而学生也及时向教师反馈学习情况，这样教师便可根据学生的反馈信息来适当调节课堂的讲解内容与难度。另外，课堂的学习时间非常有限，故要求学生课后可采用分组合作的学习方式，不仅能促进彼此的交流，同学间互相督促与讨论，还能快速地提高学习效率。

5. 小结

概率统计课程中关于二维连续型随机变量函数的分布这部分的理论知识较为抽象，学生学起来相对困难。本文在自己的实际教学经验之上，总结归纳了学生在学习二维连续型随机变量函数的分布时常出现的问题及原因，并提出了自己的教学见解与策略，希望可以给高校教师探索这部分教学改革的实践途径提供一些帮助和借鉴。

基金项目

课题部分受到 2023 年度广西民族师范学院校级科研(项目编号：JGYB202319)资助。

参考文献

[1] 盛骤, 谢式千, 潘承毅. 概率论与数理统计[M]. 第 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2008.

[2] 贺艳婷. 关于二维随机变量函数的分布的教学思考[J]. 当代教育实践与教学研究, 2020(14): 57-58.

[3] 王凤英. 二维连续型随机变量函数的分布的教学探讨[J]. 教育现代化, 2017, 4(49): 345-346.

[4] 葛煜慧. 关注数学本质强调理性思维——巧用启发式教学法提高数学教学质量[J]. 小学生(上旬刊), 2023(4): 40-42.

[5] 曹军芳. “互联网+”背景下高职院校高等数学教学中信息素养的培养思考[J]. 江西电力职业技术学院学报, 2023, 36(5): 52-54.

[6] 楚先雷. 重视学生主体地位 促进数学素养提升[J]. 中学数学, 2023(5): 91-92.