

# 光晶格中的量子液滴的变分动力学分析

田 尚

浙江师范大学物理与电子信息工程学院, 浙江 金华

收稿日期: 2024年4月18日; 录用日期: 2024年5月24日; 发布日期: 2024年5月31日

## 摘 要

本文研究了光晶格中量子液滴的波包动力学以及动力学不稳定性。我们从光晶格中量子液滴的 Gross-Pitaevskii 方程出发, 通过紧束缚近似得到对应的离散方程, 随后通过拉格朗日变分法对量子液滴进行动力学分析, 并且通过元激发谱对量子液滴进行动力学不稳定性分析。结果表明, 随着量子液滴相互作用强度的增强, 波包的自束缚区域逐渐缩小, 扩散区域逐渐增大, 并且当液滴相互作用强度达到某一临界值时, 原本存在的稳定振荡区域完全消失。通过光晶格中量子液滴的元激发谱可以发现, 液滴相互作用强度发生微小的变化动力学不稳定性会发生显著变化, 并且随着液滴相互作用强度的减小, 动力学不稳定性区域逐渐收缩至准动量较小的区域。

## 关键词

玻色 - 爱因斯坦凝聚, 量子液滴, 光晶格, 拉格朗日变分法

# Analysis of Variational Dynamics of Quantum Droplets in Optical Lattices

Shang Tian

College of Physics and Electronic Information Engineering, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: Apr. 18<sup>th</sup>, 2024; accepted: May 24<sup>th</sup>, 2024; published: May 31<sup>st</sup>, 2024

## Abstract

This article investigates the wave packet dynamics and dynamic instability of quantum droplets in optical lattices. Starting from the Gross-Pitaevskii equation for quantum droplets in optical lattices, we obtain the corresponding discrete equations through the tight-binding approximation. Subsequently, the dynamics of quantum droplets are analyzed using the Lagrangian variational method, and the dynamic instability is analyzed through the elementary excitation spectrum. The results indicate that as the interaction strength of quantum droplets increases, the self-trapped region of the wave packet gradually shrinks, while the diffusive region gradually expands. Fur-

thermore, when the interaction strength of the droplets reaches a certain critical value, the originally stable oscillation region completely disappears. Through the elementary excitation spectrum of quantum droplets in optical lattices, it can be observed that minor changes in the interaction strength of the droplets lead to significant changes in dynamic instability. Additionally, as the interaction strength of the droplets decreases, the region of dynamic instability gradually contracts to areas with smaller quasi-momentum.

## Keywords

Bose-Einstein, Quantum Droplet, Optical Lattice, Lagrange Variational Method

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

玻色-爱因斯坦凝聚(BECs)的实验实现, 不仅搭建起一个研究自局域态稳定性与动力学特性的卓越平台, 更引领了非线性科学领域的新探索[1] [2] [3] [4]。在 BEC 中, 三次非线性吸引相互作用往往导致非线性模式在二维或三维自由空间中发生坍塌, 这使得在高维系统中稳定维持非线性自局域态成为一项艰巨的挑战。为了攻克这一难题, 研究者们积极探索多种策略, 如引入二次非线性、三次至五次的竞争型非线性、饱和非线性或非局域非线性等[5] [6] [7], 旨在有效修正三次非线性吸引相互作用。同时, 自旋-轨道耦合效应的引入也为稳定非线性自局域模式的形成, 如物质波孤子[8] [9] [10], 提供了新的可能性。

近年来, 一项振奋人心的实验成果为非线性科学领域注入了新的活力: 由李-黄-杨(LEE-HUANG-YANG, 简称 LHY) BV 修正项所描述的新型自局域态——量子液滴, 成功在实验室中实现。这一突破性的发现彻底颠覆了传统认知, 证明了即便在高维系统中仅存在吸引相互作用, 也能够形成稳定的自局域态。德国 T.Pfau 教授团队率先在极性的玻色原子气体滴中观测到了量子液滴的存在, 随后西班牙光电科学研究所的 CABRERA 等人也在混合两组分的钾原子气体中成功制备出具有各向同性结构的量子液滴[11] [12]。自此, 量子液滴在三维、二维和一维模型中的研究逐渐升温, 成为非线性科学研究领域的新热点[13] [14] [15]。

值得一提的是, 光晶格中的 BEC 为非线性自局域态及动力学特性的研究提供了更为理想的实验环境[16] [17]。在光晶格中, 研究者们发现了多种物质波孤子的形成机制, 这些孤子的形成与量子液滴的形成在物理原理上呈现出惊人的相似性[18]。因此, 将光晶格的概念引入量子液滴的研究中, 不仅能够深化我们对这一神秘现象的理解, 还有望为非线性科学的发展开辟新的道路。近年来 Zhou 等人研究了具有增益-耗散性质的一维双阱系统中量子液滴的稳定性和碰撞行为[19]; Dong 等人研究了光学晶格中的多稳态量子液滴[20]; Zheng 等人研究了二维周期势下 onsite 和 offsite 型晶格量子液滴[21], 目前为止量子液滴在光晶格中的变分动力学分析还没有人探索过。基于以上研究背景, 本文主要研究光晶格中的量子液滴的波包动力学分析, 详细的分析了液滴相互作用强度对液滴动力学行为的影响。

## 2. 离散非线性动力学

本文关注的是光晶格中的量子液滴的动力学。光晶格中的量子液滴的物理性质可由宏观波函数  $\Phi(r,t)$  所描述, 基于参考文献[4]我们写出  $\Phi(r,t)$  的动力学所遵循的 Gross-Pitaevskii 方程:

$$\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{ext}} + g_0 |\Phi|^2 \ln |\Phi|^2 - g_1 |\Phi|^2 \right) \Phi. \quad (1)$$

方程(1)描述了量子液滴系统的动力学特性。其中  $\hbar$  是约化普朗克常量,  $\Phi$  是量子液滴的宏观波函数,  $m$  是量子液滴的有效质量,  $g_0$  和  $g_1$  是非线性系数,  $g_0$  代表液滴相互作用强度,  $g_1$  代表两体相互作用强度。  $V_{\text{ext}}$  是外部势能, 由重力势和激光场的和给出:

$$V_{\text{ext}} = mgz + U_L(x, y) \cos^2 [2\pi z / \lambda]. \quad (2)$$

这里  $\lambda$  是激光器的波长(晶格的间距为  $\lambda/2$ ),  $U_L(x, y)$  由近似的激光光束(高斯近似)的横向强度分布决定,  $mgz$  为重力势。

我们考虑一维光学晶格中量子液滴的动力学和稳定性, 波函数可写为  $\Phi(r, t) = \sum_n \psi_n(t) \phi_n(x)$ , 并且满足归一化方程  $\int d\mathbf{r} |\Phi(r, t)|^2 = 1$ ,  $\phi_n(x)$  描述了局域在第  $n$  个阱中的凝聚态波函数, 满足归一化方程  $\int d\mathbf{r} \phi_n(\mathbf{r}) = 1$  以及波函数正交性  $\int d\mathbf{r} \phi_n(\mathbf{r}) \phi_{n+1}(\mathbf{r}) = 0$ 。将紧束缚近似代入到方程(1)中并且将时间比例定为  $t \rightarrow \hbar t / 2K$ , 我们可以得到量子液滴所满足的离散非线性薛定谔方程:

$$i \frac{\partial \psi_n}{\partial t} = -\frac{1}{2} (\psi_{n+1} + \psi_{n-1}) + \epsilon_n \psi_n + g |\psi_n| \psi_n + \alpha g \ln(|\psi_n|^2) |\psi_n|^2 \psi_n. \quad (3)$$

在方程(3)中  $\epsilon_n = \left[ (\nabla \phi_n)^2 d\mathbf{r} \hbar^2 / 2m + (V_{\text{ext}} \phi_n^2) d\mathbf{r} \right] / 2K$  表征势能项,  $\alpha g = g_0 |\phi_n|^4 d\mathbf{r} / 2K$  表示液滴相互作用强度,  $g = -g_1 |\phi_n|^4 d\mathbf{r} / 2K$  表示两体相互作用。至此我们已经推导出光晶格中量子液滴的离散非线性薛定谔方程, 这一成果在此之前还尚无人触及。

方程(3)可以写成  $i\dot{\psi}_n = \partial H / \partial (i\psi_n^*)$ , 这里  $H$  为哈密顿量:

$$H = \sum_n \left[ -\frac{1}{2} (\psi_n \psi_{n+1}^* + \psi_n^* \psi_{n+1}) + \epsilon_n |\psi_n|^2 \right] + \sum_n \left[ \frac{g}{2} |\psi_n|^4 + \frac{\alpha g}{4} |\psi_n|^4 (2 \ln(|\psi_n|^2) - 1) \right]. \quad (4)$$

### 3. 量子液滴的波包动力学特性

为了研究量子液滴波包的各种动态区域, 我们考虑了一个高斯分布波包的演化, 即:

$$\psi_n = \sqrt{k} e^{\left\{ -\frac{(n-\xi)^2}{\gamma^2} + ip(n-\xi) + i\frac{\delta}{2}(n-\xi)^2 \right\}}. \quad (4)$$

其中  $k = \sqrt{2/\pi\gamma^2}$ ,  $\xi(t)$  和  $\gamma(t)$  分别是波包的中心位置与宽度,  $p(t)$  表示波函数  $\psi_n$  的动量,  $\delta(t)$  表示与动量的二次项有关的项。波包的动力学演化可以通过拉格朗日变分法得到:

$$L = p\dot{\xi} - \frac{\gamma^2 \dot{\delta}}{8} + \cos p e^{-\eta} - V(\gamma, \xi) - \frac{g}{2\sqrt{\pi}\gamma} - \frac{\alpha g}{2\sqrt{\pi}\gamma} \ln \left( \sqrt{\frac{2}{\pi\gamma^2}} \right) + \frac{3\alpha g}{8\sqrt{\pi}\gamma}. \quad (5)$$

其中  $\eta = 1/2\gamma^2 + \gamma^2 \delta^2 / 8$ ,  $V(\gamma, \xi) = k \int_{-\infty}^{+\infty} dn \epsilon_n e^{-[2(n-\xi)^2/\gamma^2]}$  将方程(5)代入欧拉-拉格朗日方程  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} - \frac{\partial L}{\partial q(t)} = 0$  (这里  $q(t) = \xi, \gamma, \delta, p$  为变分参数) 关系以及运动方程:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -\frac{\partial V}{\partial \xi}, \\ \dot{\xi} &= \sin p e^{-\eta}, \\ \dot{\gamma} &= \delta \gamma \cos p e^{-\eta}, \\ \dot{\delta} &= \cos p \left( \frac{4}{\gamma^4} - \delta^2 \right) e^{-\eta} - \frac{4}{\gamma} \frac{\partial V}{\partial \gamma} + \frac{2g}{\sqrt{\pi}\gamma^3} + \frac{\alpha g}{\sqrt{\pi}\gamma^3} \left[ \frac{1}{2} + \ln \left( \frac{2}{\pi\gamma^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

有效哈密顿量为:

$$H = \frac{g}{2\sqrt{\pi\gamma}} + \frac{\alpha g}{2\sqrt{\pi\gamma}} \ln\left(\sqrt{\frac{2}{\pi\gamma^2}}\right) - \frac{3\alpha g}{8\sqrt{\pi\gamma}} - \cos p e^{-\eta} + V(\gamma, \xi). \quad (7)$$

根据有效哈密顿量, 我们可以得到量子液滴波包的速度  $v_g = \partial H / \partial p = \tan p / m^*$  以及逆有效质量  $(m^*)^{-1} = \partial^2 H / \partial p^2 = \cos p e^{-\eta}$ . 值得注意的是这个有效质量与准动量有关, 因此该系统将呈现非常丰富的动力学现象. 尤其是当  $\cos p < 0$  时, 有效质量为负, 此时系统存在孤子解.

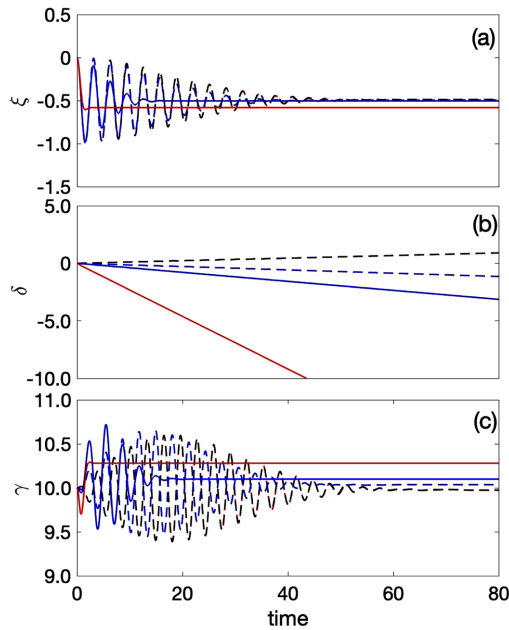
通过对方程组(6)进行解析求解可以得到量子液滴质心位置  $\xi$  的二阶运动方程:

$$\ddot{\xi} + \zeta \dot{\xi} + \omega^2 \xi = \omega H_0 - \frac{\omega g}{\sqrt{\pi\gamma}} \left( \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2} \ln\left(\sqrt{\frac{2}{\pi\gamma^2}}\right) - \frac{3\alpha}{8} \right), \quad (8)$$

其中

$$\zeta = \frac{\delta g}{\sqrt{\pi\gamma}} \left( \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{8} + \frac{\alpha \ln\left(\frac{2}{\pi\gamma^2}\right)}{4} \right). \quad (9)$$

通过方程(9)可以发现  $\zeta$  被非线性系数  $g$  影响, 并且在方程(8)左边与速度  $\dot{\xi}$  结合, 起到了一个阻尼的效果, 阻止布洛赫振荡的持续进行. 当非线性系数为零时, 方程(8)简化为简谐振动方程, 此时布洛赫振荡持续进行.



**Figure 1.** Quantum droplet parameter variation with time graph. The different colors and line types in the graph represent different interaction strengths of the droplet. The red dashed line represents  $\alpha=0$ , the black dashed line represents  $\alpha=0.001$ , the blue dashed line represents  $\alpha=1$ , the blue solid line represents  $\alpha=2$ , and the red solid line represents  $\alpha=10$ . The parameters are set as  $\omega=2$ ,  $g_1=10$ ,  $p_0=0$ ,  $\delta_0=0$ ,  $\gamma_0=10$

**图 1.** 量子液滴各参数随时间变化图, 图中不同颜色和种类的线型代表不同的液滴相互作用强度. 红色虚线  $\alpha=0$ , 黑色虚线  $\alpha=0.001$ , 蓝色虚线  $\alpha=1$ , 蓝色实线  $\alpha=2$ , 红色实线  $\alpha=10$ . 参数分别设置为  $\omega=2$ ,  $g_1=10$ ,  $p_0=0$ ,  $\delta_0=0$ ,  $\gamma_0=10$

通过数值求解方程组(6)画出量子液滴各参数随时间变化图即图 1。在图 1 中我们通过改变液滴相互作用强度  $\alpha$  的大小观察波包的中心位置、宽度以及动量随时间变化图像。通过图 1(a)，我们可以清晰地看到，随着时间的推移，中心位置  $\xi(t)$  逐渐衰减并趋向于一个常数，这意味着布洛赫振荡被破坏，波包停止运动，这与我们上面的分析对应。并且我们发现，随着液滴相互作用强度  $\alpha$  的增大，布洛赫振荡被破坏的也更迅速，并且最终的平衡位置也会有明显的改变。

在图 1(c)中，我们可以看到宽度  $\gamma(t)$  在时间与液滴相互作用强度  $\alpha$  均较小时，也呈现振荡现象，并且振荡频率明显高于中心位置  $\xi(t)$ ，这与我们之前的分析对应。并且随时间增加也逐渐趋向于一个常数  $\gamma_{\max}$ ，说明波包存在最大宽度。随着液滴相互作用强度  $\alpha$  的增大，达到最大宽度  $\gamma_{\max}$  的时间变短，同时最大宽度  $\gamma_{\max}$  也增大。

此外，图 1(b)展示了  $\delta(t)$  随时间增大而减小的趋势，二者之间呈现出线性关系，随着液滴相互作用强度  $\alpha$  的增大， $\delta(t)$  的变化速度更加明显。

值得注意的是，当液滴相互作用强度  $\alpha = 0$  时，上述结果将简化为参考文献[22]中的情况。

接下来我们将从无倾斜势阱出发，研究光晶格中量子液滴的波包动力学。对于无倾斜势阱来说， $V(\gamma, \xi) = 0$ ， $p(t) = p_0$ ，此时有效哈密顿量变为：

$$H = \frac{g}{2\sqrt{\pi}\gamma} + \frac{\alpha g}{2\sqrt{\pi}\gamma} \ln\left(\sqrt{\frac{2}{\pi\gamma^2}}\right) - \frac{3\alpha g}{8\sqrt{\pi}\gamma} - \cos p_0 e^{-\eta} \quad (10)$$

显然系统的动力学特性不仅受到参数  $g$  控制，也受到液滴相互作用强度  $\alpha$  影响，同时还可以看出  $\cos p_0$  的符号显著影响波包的动力学。因此我们将分别讨论  $\cos p_0 > 0$  和  $\cos p_0 < 0$  两种情况。

### 3.1. $\cos p_0 > 0$

我们首先考虑  $\cos p_0 > 0$  的情况，在这种情况下，存在两种非线性物理现象：自束缚与扩散

自束缚：在这种情况下，当  $t \rightarrow \infty$  时， $\gamma \rightarrow \gamma_{\max}$ ， $\delta \rightarrow \infty$ ， $\dot{\xi} \rightarrow 0$ ，此时哈密顿量满足：

$$H \rightarrow \frac{g_0}{2\sqrt{\pi}\gamma_{\max}} + \frac{\alpha g_0}{2\sqrt{\pi}\gamma_{\max}} \ln\left(\sqrt{\frac{2}{\pi\gamma_{\max}^2}}\right) - \frac{3\alpha g_0}{8\sqrt{\pi}\gamma_{\max}} \quad (11)$$

由于哈密顿量守恒，所以当  $H_0 > 0$  时，我们可以得到宽度的最大值：

$$\gamma_{\max} = \frac{\frac{g_0}{2\sqrt{\pi}} + \frac{\alpha g_0}{2\sqrt{\pi}} \ln\left(\sqrt{\frac{2}{\pi\gamma_{\max}^2}}\right) - \frac{3\alpha g_0}{8\sqrt{\pi}}}{H_0} \quad (12)$$

接下来讨论扩散：在这种情况下，当  $t \rightarrow \infty$  时  $\gamma \rightarrow \infty$ ， $\delta \rightarrow 0$ ， $\dot{\xi} \rightarrow \sin p_0/2$ ， $H \rightarrow -\cos p_0$ 。因此  $-\cos p_0 \leq H_0 \leq 0$  对应系统的扩散区域。自束缚与扩散得边界条件由  $H_0 = 0$  给出。即：

$$\frac{g_c}{2\sqrt{\pi}\gamma_0} + \frac{\alpha g_c}{2\sqrt{\pi}\gamma_0} \ln\left(\sqrt{\frac{2}{\pi\gamma_0^2}}\right) - \frac{3\alpha g_c}{8\sqrt{\pi}\gamma_0} - \cos p_0 e^{-\eta_0} = 0 \quad (13)$$

根据方程(13)可以得到边界处对应的相互作用强度：

$$g_c = \frac{\cos p_0 e^{-\eta_0}}{\frac{1}{2\sqrt{\pi}\gamma_0} + \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}\gamma_0} \ln\left(\sqrt{\frac{2}{\pi\gamma_0^2}}\right) - \frac{3\alpha}{8\sqrt{\pi}\gamma_0}} \quad (14)$$

自束缚线性发生在  $g > g_c$  区域，扩散现象发生在  $g < g_c$  区域。

### 3.2. $\cos p_0 < 0$

对于  $\cos p_0 < 0$  的情况, 我们给出的结果如下:

自束缚: 当扩散发生时, 存在  $H \rightarrow -\cos p_0$ , 在这种情况下, 自束缚发生的条件是  $H_0 > |\cos p_0|$ , 即

$\frac{g}{2\sqrt{\pi}\gamma_0} + \frac{\alpha g}{2\sqrt{\pi}\gamma_0} \ln\left(\sqrt{\frac{2}{\pi\gamma_0^2}}\right) - \frac{3\alpha g}{8\sqrt{\pi}\gamma_0} - \cos p_0 e^{-\eta_0} > |\cos p_0|$ 。最终我们可以得到:

$$g > g_c = \frac{8\sqrt{\pi}\gamma_0 |\cos p_0| \left(1 - e^{-\frac{1}{2\gamma_0^2}}\right)}{4 + 4\alpha \ln\left(\sqrt{\frac{2}{\pi\gamma_0^2}}\right) - 3\alpha} \quad (15)$$

方程(15)是自束缚发生的条件, 当  $g_1 < g_{1c}$  时, 扩散现象出现。在这种情况下, 当自束缚发生时

$\gamma \rightarrow \gamma_{\min} < \gamma_0$ ,  $\delta \rightarrow \infty$ ,  $\dot{\xi} \rightarrow 0$  以及  $H \rightarrow \frac{g}{2\sqrt{\pi}\gamma_{\min}} + \frac{\alpha g}{2\sqrt{\pi}\gamma_{\min}} \ln\left(\sqrt{\frac{2}{\pi\gamma_{\min}^2}}\right) - \frac{3\alpha g}{8\sqrt{\pi}\gamma_{\min}}$ 。这时

$H_0 = H = \frac{g}{2\sqrt{\pi}\gamma_0} + \frac{\alpha g}{2\sqrt{\pi}\gamma_0} \ln\left(\sqrt{\frac{2}{\pi\gamma_0^2}}\right) - \frac{3\alpha g}{8\sqrt{\pi}\gamma_0} - \cos p_0 e^{-\eta_0}$ , 由此我们可以得到:

$$\gamma_{\min} = \gamma_0 \frac{1 + \alpha \ln\left(\frac{2}{\pi\gamma_{\min}^2}\right) - \frac{3}{4}\alpha}{1 + \alpha \ln\left(\frac{2}{\pi\gamma_0^2}\right) - \frac{3}{4}\alpha + \frac{2\gamma_0\sqrt{\pi}|\cos p_0|e^{-\eta_0}}{g}} \quad (16)$$

当  $\dot{\gamma} = 0$ ,  $\dot{\delta} = 0$  时, 系统存在孤子解, 求解方程(6)可以得到:

$$g_{\text{sol}} = \frac{\frac{4\sqrt{\pi}}{\gamma_0} |\cos p_0| e^{-\eta_0}}{2 + \alpha \left(\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{2}{\pi\gamma_0^2}\right)\right)} \quad (17)$$

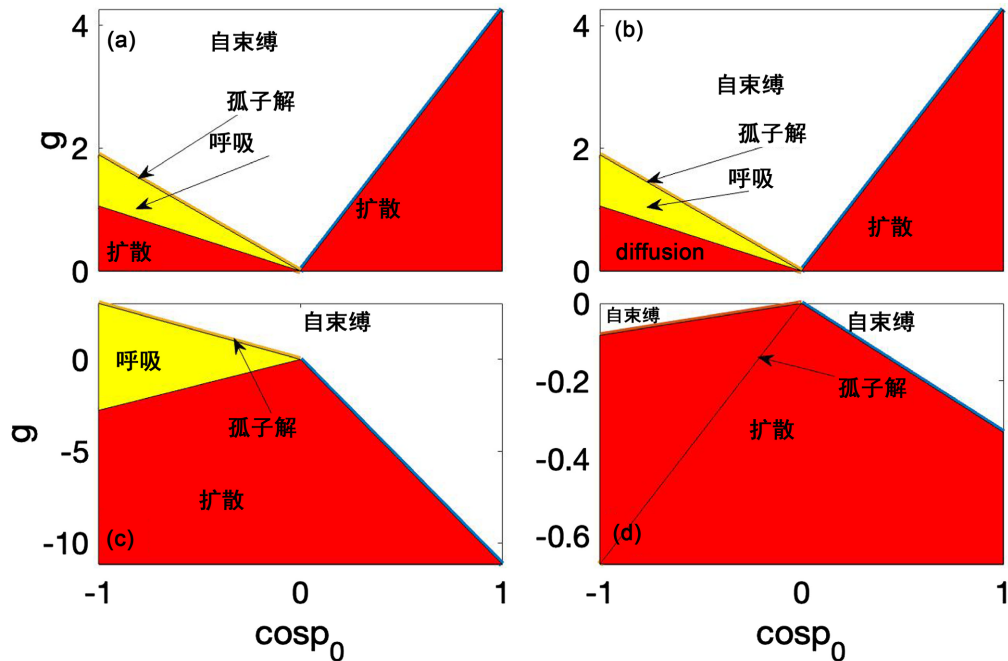
此外当  $g_c < g < g_{\text{sol}}$  时存在呼吸解。这里  $g_c$  由方程(15)给出。从上述这些变分参数的运动方程中发现, 我们可以用四个基本参数来表征动力学:  $\cos p_0$ ,  $g$ ,  $\gamma_0$  和  $\alpha$ 。参数  $\cos p_0$  与准动量  $p$  直接相关,  $\gamma_0$  和  $g$  分别对应波包的初始宽度和两体相互作用强度,  $\alpha$  对应液滴相互作用强度。根据方程(14)、(15)和(17)画出动力学相图, 图 2 显示了波包的动力学特征, 并且揭示了系统的动力学特征受量子液滴相互作用显著影响。

在图 2(a)中, 当仅考虑两体相互作用时( $\alpha = 0$ ), 液滴的动力学行为表现为一种相对简单的模式。而在图 2(b)中, 当液滴之间的相互作用强度较小( $\alpha = 0.001$ ), 我们发现两者的动力学行为非常相似。这一研究表明, 在液滴相互作用较弱的情况下, 它们对波包动力学的影响几乎可以忽略不计。

然而, 随着液滴间相互作用强度的增强, 波包动力学的性质发生了显著的变化。具体来说, 随着液滴相互作用强度  $\alpha$  值增大, 波包的自束缚区域逐渐缩小, 而扩散区域则逐渐扩大。这意味着随着液滴相互作用强度  $\alpha$  的增加, 波包更倾向于扩散而非自陷。

进一步地, 当液滴间的相互作用强度  $\alpha$  增大到某一临界值( $\alpha = 10$ )时, 如图 2(d)呼吸区域完全消失。呼吸区域是指波包在特定条件下呈现出的稳定振荡行为。这一现象表明, 过强的相互作用强度会破坏波包的这种稳定振荡模式, 导致其行为更倾向于扩散。

综上所述，液滴间的相互作用强度对波包动力学有着显著的影响。在弱相互作用下，波包动力学受影响较小；随着相互作用强度的增强，波包自陷区域减小，扩散区域增大；当相互作用强度达到一定值时，波包的稳定振荡行为(呼吸区域)会完全消失。这些发现为我们深入理解量子液滴在光晶格中的行为提供了重要线索，并为进一步探索其潜在应用提供了理论支撑。



**Figure 2.** Different kinetic phase diagrams under various interaction strengths, with parameter settings of  $\gamma_0 = 1.5$ , (a)  $\alpha = 0$ ; (b)  $\alpha = 0.001$ ; (c)  $\alpha = 1$ ; (d)  $\alpha = 10$

**图 2.** 不同相互作用强度下的动力学相图, 参数设置为  $\gamma_0 = 1.5$ , (a)  $\alpha = 0$ ; (b)  $\alpha = 0.001$ ; (c)  $\alpha = 1$ ; (d)  $\alpha = 10$

#### 4. 总结

本文研究了光晶格中量子液滴的动力学特性。通过紧束缚近似和拉格朗日变分法，推导出了量子液滴的运动方程，并进行了详细的动力学分析。研究结果显示，在不考虑非线性项时，波包呈现布洛赫振荡特性；引入非线性项后，布洛赫振荡受到显著影响，中心位置衰减速度加快，波包宽度逐渐减小并与衰减速度呈线性关系。动力学相图表明，随着液滴相互作用增强，自束缚区域缩小，扩散区域扩大，当相互作用达到临界值时，稳定振荡区域消失，揭示了液滴动力学行为的复杂性和多样性。

#### 参考文献

- [1] Xu, Y., Zhang, Y.P. and Wu, B. (2013) Bright Solitons in Spin-Orbit-Coupled Bose-Einstein Condensates. *Physical Review A*, **87**, Article ID: 013614. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.87.013614>
- [2] Han, W., Zhang, X.F., Wang, D.S., et al. (2018) Chiral Supersolid in Spin-Orbit-Coupled Bose Gases with Soft-Core Long-Range Interactions. *Physical Review Letters*, **121**, Article ID: 030404. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.030404>
- [3] Wang, L.X., Dai, C.Q., Wen, L., et al. (2018) Dynamics of Vortices Followed by the Collapse of Ring Dark Solitons in a Two-Component Bose-Einstein Condensate. *Physical Review A*, **97**, Article ID: 063607. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.97.063607>
- [4] Petrov, D.S. (2015) Quantum Mechanical Stabilization of a Collapsing Bose-Bose Mixture. *Physical Review Letters*,

- 115**, Article ID: 155302. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.115.155302>
- [5] Segev, M., Valley, G.C., Crosignani, B., *et al.* (1994) Steady-State Spatial Screening Solitons in Photorefractive Materials with Anexternal Applied Field. *Physical Review Letters*, **73**, Article ID: 3211. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.73.3211>
- [6] Huang, J.S., Jiang, X.D., Chen, H.Y., *et al.* (2015) Quadrupolar Matter-Wave Soliton in Two-Dimensional Free Space. *Frontiers of Physics*, **10**, 1-7. <https://doi.org/10.1007/s11467-015-0501-1>
- [7] Wang, Y.Y., Liang, C., Dai, C.Q., *et al.* (2017) Exact Vector Multipole and Vortex Solitons in the Media with Spatially Modulatedcubic-Quintic Nonlinearity. *Nonlinear Dynamics*, **90**, 1269-1275. <https://doi.org/10.1007/s11071-017-3725-5>
- [8] Dai, C.Q., Chen, R.P., Wang, Y.Y., *et al.* (2017) Dynamics of Light Bullets in Inhomogeneous Cubic-Quintic-Septimal Nonlinear Mediawith PT-Symmetric Potentials. *Nonlinear Dynamics*, **87**, 1675-1683. <https://doi.org/10.1007/s11071-016-3143-0>
- [9] Chen, X.W., Deng, Z.G., Xu, X.X., *et al.* (2020) Nonlinear Modes in Spatially Confined Spin-Orbit-Coupled Bose-Einstein Condensates with Repulsive Nonlinearity. *Nonlinear Dynamics*, **101**, 569-579. <https://doi.org/10.1007/s11071-020-05692-6>
- [10] Ye, Z.J., Chen, Y.X., Zheng, Y.Y., *et al.* (2020) Symmetry Breaking of a Matter-Wave Soliton in a Double-Well Potential Formed by Spatially Confined Spin-Orbit Coupling. *Chaos, Solitons & Fractals*, **130**, Article ID: 109418. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2019.109418>
- [11] Li, Y.Y., Luo, Z.H., Liu, Y., *et al.* (2017) Two-Dimensional Solitons and Quantum Droplets Supported by Competing Self-And Cross-Interactions in Spin-Orbit-Coupled Condensates. *New Journal of Physics*, **19**, Article ID: 113043. <https://doi.org/10.1088/1367-2630/aa983b>
- [12] Lee, T.D., Huang, K. and Yang, C.N. (1957) Eigenvalues and Eigenfunctions of a Bose System of Hard Spheres and Its Low-Temperature Properties. *Physical Review*, **106**, 1135-1145. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.106.1135>
- [13] Schmitt, M., Wenzel, M., Boettcher, F., *et al.* (2016) Self-Bound Droplets of a Dilute Magnetic Quantum Liquid. *Nature*, **539**, 259-262. <https://doi.org/10.1038/nature20126>
- [14] Cabrera, C.R., Tanzi, L., Sanz, J., *et al.* (2017) Quantum Liquid Droplets in a Mixture of Bose-Einstein Condensates. *Science*, **359**, 301-304. <https://doi.org/10.1126/science.aao5686>
- [15] Tylutki, M., Astrakharchik, G.E., Malomed, B.A., *et al.* (2020) Collective Excitations of a One-Dimensional Quantum Droplet. *Physical Review A*, **101**, Article ID: 051601. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.101.051601>
- [16] Luo, Z.H., Pang, W., Liu, B., *et al.* (2021) A New Form of Liquid Matter: Quantum Droplets. *Frontiers of Physics*, **16**, Article No. 32201. <https://doi.org/10.1007/s11467-020-1020-2>
- [17] Liu, B., Zhang, H.F., Zhong, R.X., *et al.* (2019) Symmetry Breaking of Quantum Droplets in a Dual-Core Trap. *Physical Review A*, **99**, Article ID: 053602. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.99.053602>
- [18] Guo, Z.C., Jia, F., Li, L.T., *et al.* (2021) Lee-Huang-Yang Effects in the Ultracold Mixture of  $^{23}\text{Na}$  and  $^{87}\text{Rb}$  with Attractive Interspecies Interactions. *Physical Review Research*, **3**, Article ID: 033247. <https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.3.033247>
- [19] Zhou, Z., Yu, X., Zou, Y., *et al.* (2019) Dynamics of Quantum Droplets in a One-Dimensional Optical Lattice. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **78**, Article ID: 104881. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2019.104881>
- [20] Dong, L.W., Qi, W., Peng, P., *et al.* (2020) Multi-Stable Quantum Droplets in Optical Lattices. *Nonlinear Dynamics*, **102**, 303-310. <https://doi.org/10.1007/s11071-020-05967-y>
- [21] Zheng, Y.Y., Chen, S.T., Huang, Z.P., *et al.* (2021) Quantum Droplets in Two-Dimensional Optical Lattices. *Frontiers of Physics*, **16**, Article No. 22501. <https://doi.org/10.1007/s11467-020-1011-3>
- [22] Trombettoni, A. and Smerzi, A. (2001) Discrete Solitons and Breathers with Dilute Bose-Einstein Condensates. *Physical Review Letters*, **86**, Article ID: 2353. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.86.2353>