

# 《岩石力学》课程中深埋圆形横断面隧道围岩应力计算方法的教学设计

周晓军

西南交通大学土木工程学院, 四川 成都

收稿日期: 2024年1月29日; 录用日期: 2024年3月18日; 发布日期: 2024年3月26日

## 摘要

文章根据《岩石力学》课程中深埋圆形横断面隧道围岩应力计算方法的教学内容, 对深埋隧道围岩塑性区和弹性区内应力及其分布特征进行了推导, 给出了易于学生理解和掌握的深埋隧道围岩应力计算方法及其分布特征的教学组织和设计, 并分析了影响隧道围岩塑性区的因素。通过对所设计的深埋隧道围岩应力计算方法的教学实践, 达到了预期的教学效果。

## 关键词

深埋隧道, 围压应力, 侧压力系数, 计算方法, 教学设计

## Teaching Design of Stress Calculation Method for Surrounding Rock of Deep Tunnel with Circular Cross-Section in Course Entitled *Rock Mechanics*

Xiaojun Zhou

School of Civil Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu Sichuan

Received: Jan. 29<sup>th</sup>, 2024; accepted: Mar. 18<sup>th</sup>, 2024; published: Mar. 26<sup>th</sup>, 2024

## Abstract

Based on the teaching contents of the stress calculation method for surrounding rock of deep tunnel with circular cross-section in the course entitled *Rock Mechanics*, the stress and its distribution

characteristics in the plastic and elastic zones of tunnel surrounding rock are derived in this paper. Both the teaching design and organization for the calculation method and distribution characteristics of surrounding rock stress for deep tunnel, which are easy for undergraduates to understand and master, are proposed, and meanwhile the factors affecting the plastic zone of tunnel surrounding rock are also analyzed. By designing and practicing the teaching method for calculating the stress of surrounding rock of a deep tunnel with circular transect presented in this paper, the expected teaching objectives has been achieved.

## Keywords

Deep Tunnel, Stress in Surrounding Rock, Coefficient of Lateral Pressure, Calculation Method, Teaching Design

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

分析和计算岩体中深埋圆形横断面隧道的围岩应力及其分布特征是《岩石力学》课程中的重要教学内容，也是要求选修此课程的学生应当理解和掌握的知识点和难点之一。而现行的岩石力学教材中对这部分内容和知识点的讲解较为粗略和笼统，且知识点的组织也不连贯。尤其是对深埋隧道围岩塑性区半径计算方法的讲述不详细[1] [2] [3] [4]。由于该内容涉及到弹性力学中的平面应变和三维空间中的轴对称问题，而选修本课程的学生在此之前尚未学习过弹性力学，因而对此内容的理解和掌握尚存在较大的困难。如何合理组织使学生易于理解和掌握的教学内容，是课程教学和方法设计需要研究的主要内容。本文结合教学实践，就《岩石力学》课程中深埋圆形横断面隧道在静水应力场中的围岩应力及其分布特征的教学组织和设计进行研究，并通过教学实践取得了良好的教学效果。

## 2. 深埋圆形横断隧道的围岩应力

考虑教学内容涉及到弹性力学中的平面应变和三维空间中的轴对称问题，为便于学生理解和掌握，此部分的教学内容可按照以下顺序进行组织和设计，即先讲解围岩应力场、平面应变和三维空间轴对称问题，然后建立圆形横断面深埋隧道的分析模型，在围岩中选取一个微单元体，分析其应力状态，并建立微单元体的静力平衡微分方程，利用岩石发生剪切破坏的 Mohr-Coulomb 强度准则来分析围岩塑性区的应力，同时以弹性力学中的厚壁圆筒来分析围岩弹性区内的应力，在得出围岩塑性区半径的计算方法后，讨论降低或减小围岩塑性区的工程措施。具体的教学内容设计如下。

### 2.1. 圆形横断面隧道围岩应力的计算

首先需要讲解岩体应力场的概念，所谓岩体中的应力场就是岩体中任何一点均存在着三维空间中与该点相对应的 6 个瞬时应力分量，即 3 个正应力和 3 个剪应力[5]，这些应力是由岩体自重和地质构造运动所引起的。岩体应力场的基本特征是在一定时期内处于平衡和稳定状态。而在岩体中进行诸如开挖隧道、修建地下建筑等人类工程活动时，原先处于平衡状态的应力场随即被扰动，而被扰动的岩体则称为围岩，并将其内部的应力称为围岩应力。围岩应力受扰动后会重新分布，并使岩体处于塑性或者弹性应力状态。当围岩内重新分布的应力小于岩体的屈服极限，此时围岩处于弹性应力状况，有利于围岩

的稳定。而当围岩内重新分布的应力大于其屈服极限，则围岩会从弹性状态过度到塑性状态，直至发生破坏和失稳，不利于围岩的稳定，并且对地下工程的建造构成威胁。因而分析围岩应力场中应力的大小及其变化特征是开展隧道围岩应力状态分析和评价其安全性的前提。

对于弹性力学中的平面应变问题，结合岩体中开挖的圆形横断面隧道进行讲解更易于理解。由于隧道纵向的长度远大于其横断面的尺寸，因而沿隧道纵向上围岩相互制约而不发生变形即位移，因而围岩的变形仅限制在其横断面内产生，如此可以沿隧道的纵向上取 1.0 m 厚度的围岩进行分析，这便是弹性力学中平面应变的含义，也可以将深埋隧道理解为沿其纵向上是无限长，而其横断面的尺寸远小于其纵向的长度，因此可用无限大的等厚度平板上开一个圆形的孔口来模拟地层中开挖的隧道。

此外，将圆形横断面隧道围岩中的应力和变形视为以通过隧道中心轴的任意平面对称，即满足三维空间中隧道围岩力学性质沿某一平面对称的特点，这便是弹性力学中空间轴对称问题的含义。在讲解了岩体应力场、平面应变和三维空间中轴对称的基本概念后，即可对隧道围岩应力的计算及其分布特征进行讲解。

在距离地表以下  $H$  深度处的岩体中开挖一个半径为  $R$  的圆形横断面隧道，且使  $H > 5R$ ，见图 1，地表以下的埋深  $H$  和隧道半径  $R$  的单位均为 m。

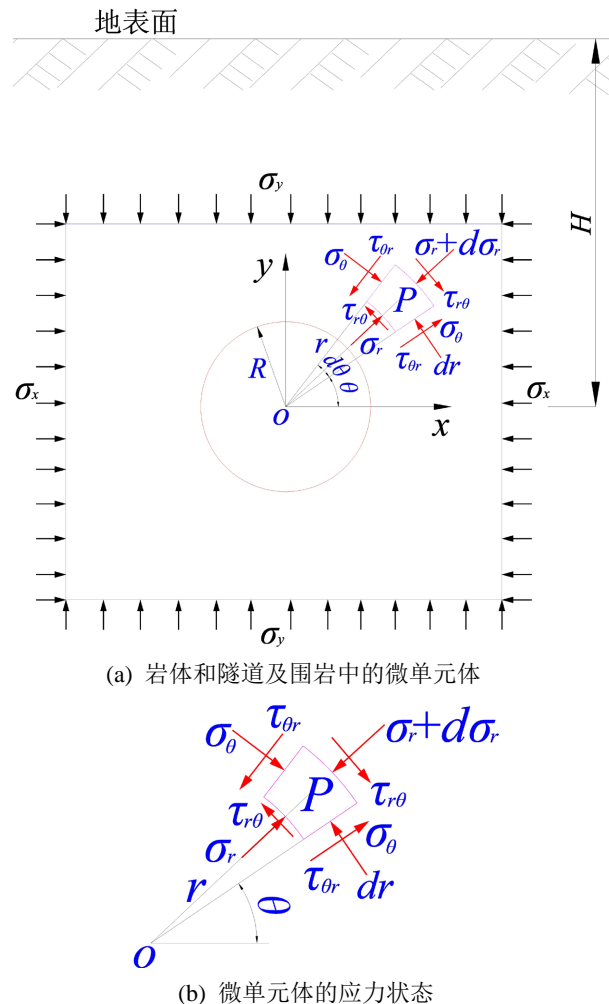


Figure 1. Stress state of deep tunnel with circular transect  
图 1. 深埋圆形横断面隧道应力状态

图 1 中隧道沿垂直于  $xoy$  平面的纵向上为无限长, 符合平面应变的应力状态。因此可以将围岩和隧道视为一个无限大等厚度平板上的圆孔, 并且将距离 5 倍隧道半径的区域作为承受地层中原始水平压应力  $\sigma_x$  和垂直压应力  $\sigma_y$  的作用范围, 此范围外岩体内的应力受隧道开挖影响很小, 可视为原始地应力。由于采用极坐标要比直角坐标易于分析, 因此隧道围岩应力的分析中均采用极坐标进行。就图 1 所示的地层和隧道模型分析, 岩体中原始水平压应力  $\sigma_x$  和垂直压应力  $\sigma_y$  仅作用在  $xoy$  平面内, 由此引起的变形也发生在  $xoy$  平面内, 而垂直于  $xoy$  平面的纵向上即无应力作用也不发生变形, 符合平面应变的应力状态。

在隧道围岩承受水平压应力  $\sigma_x$  和垂直压应力  $\sigma_y$  的作用范围内任取一点  $P$ , 点  $P$  的极坐标为  $(r, \theta)$ , 见图 1(a), 其中  $r$  为点  $P$  在极坐标中的半径, 而角度  $\theta$  为直线  $OP$  与过圆心  $O$  的水平面之间的夹角, 见图 1(b)。为便于分析和讲解, 针对图 1 中的围岩和隧道还需要做出以下假定:

1) 将圆形横断面隧道的围岩视为连续且各向同性的均质岩体, 同时岩体均处于线弹性应力状态, 不考虑岩体中的节理和地下水;

2) 深埋隧道开挖影响范围内围岩垂直应力的变化量与原岩应力相比较小, 因而可忽略垂直应力的线性增加, 并且不考虑围岩应力重分布区域内围岩的重力;

3) 地层无复杂地质构造, 因此不考虑围岩中的构造应力。

根据以上假定, 就可以对深埋隧道围岩中任意点的应力状态进行分析。对于图 1 所示的无限大平板中圆形孔边的应力可采用极坐标进行求解。德国的 G. Kirsch 于 1898 年利用弹性力学并通过对无限大平板上圆孔周边的微单元体应力进行分析, 给出了孔边微单元体上的应力理论解, 微单元体及其应力状态见图 1(b)。因而深埋隧道围岩内任意一点的应力即可借鉴 Kirsch 给出的理论解, 其以极坐标的形式可表示为[5]

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \left(1 - 3\frac{R^2}{r^2}\right) \cos 2\theta \\ \sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \left(1 + 3\frac{R^4}{r^4}\right) \cos 2\theta \\ \tau_{r\theta} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \left(1 + 3\frac{R^4}{r^4}\right) \sin 2\theta \end{cases} \quad (1)$$

式中  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  分别是原始地应力的水平应力和垂直应力, MPa, 且垂直应力就是由其上覆岩层的重力所引起压应力, 即  $\sigma_y = \gamma H$ ;  $\sigma_r$  为围岩中微单元体  $P$  上的径向应力, MPa;  $\sigma_\theta$  为围岩中微单元体  $P$  上的切向应力, MPa;  $\tau_{r\theta}$  为围岩中微单元体  $P$  上的剪切应力, MPa。

从式(1)可以看出, 隧道围岩内微单元体  $P$  上的应力与岩体的弹性常数无关, 而仅与岩体中的原始地应力  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ 、隧道半径  $R$  以及极坐标  $r$  与  $\theta$  有关。为便于工程应用, 通常用侧压力系数  $\lambda$  来表示岩体中的原始水平压应力  $\sigma_x$  与垂直压应力  $\sigma_y$  的比值, 即  $\lambda = \sigma_x/\sigma_y$ 。将侧压力系数  $\lambda$  代入式(1)即可得到

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{1+\lambda}{2} \sigma_y \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) - \frac{1-\lambda}{2} \sigma_y \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \left(1 - 3\frac{R^2}{r^2}\right) \cos 2\theta \\ \sigma_\theta = \frac{1+\lambda}{2} \sigma_y \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) + \frac{1-\lambda}{2} \sigma_y \left(1 + 3\frac{R^4}{r^4}\right) \cos 2\theta \\ \tau_{r\theta} = \frac{1-\lambda}{2} \sigma_y \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \left(1 + 3\frac{R^4}{r^4}\right) \sin 2\theta \end{cases} \quad (2)$$

为使学生理解和掌握分析的方法, 具体讲解中以侧压力系数  $\lambda = 1$  为例, 分析一种较为特殊的应力状

态,即假设岩体中的原始水平压应力 $\sigma_x$ 和垂直压应力 $\sigma_y$ 相等,即 $\lambda = \sigma_x/\sigma_y = 1$ 。在掌握了分析这种特殊应力状态的方法后,将其也用于分析侧压力系数 $\lambda \neq 1$ 的状态。当 $\lambda = 1$ ,此时岩体所处的应力状态被称为静水应力状态。将 $\lambda = 1$ 代入式(2)则式(2)可简化为

$$\begin{cases} \sigma_r = \sigma_y \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \\ \sigma_\theta = \sigma_y \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \\ \tau_{r\theta} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

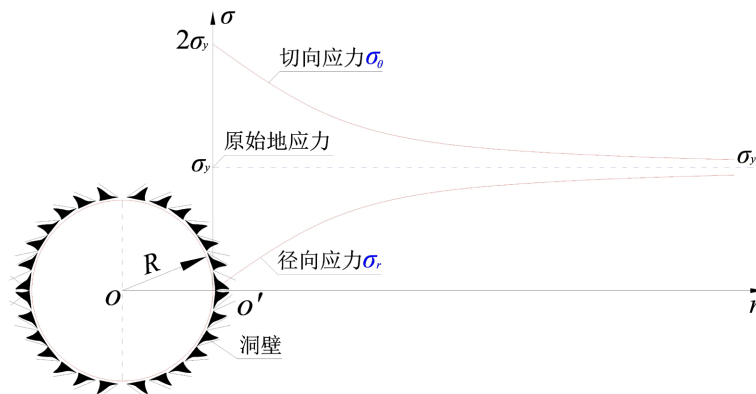
从式(3)可以看出,当岩体处于静水应力状态时,隧道围岩中的微单元体上仅存在径向应力 $\sigma_r$ 和切向应力 $\sigma_\theta$ ,而剪应力 $\tau_{r\theta} = 0$ 。由此表明在静水应力状态下圆形横断面隧道围岩中任意单元体均承受主应力的作用,且径向应力 $\sigma_r$ 为最小主应力,而切向应力 $\sigma_\theta$ 则为最大主应力。

根据式(3)可得,在隧道洞壁上即 $r = R$ 时式(3)可进一步简化为

$$\begin{cases} \sigma_r = 0 \\ \sigma_\theta = 2\sigma_y \\ \tau_{r\theta} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

从式(4)可知,在深埋圆形横断面隧道的内壁面上,任意微单元体仅承受切向应力 $\sigma_\theta$ 的作用,且切向应力 $\sigma_\theta$ 是原始垂直应力 $\sigma_y$ 的2倍。而径向应力 $\sigma_r$ 和剪切应力 $\tau_{r\theta}$ 均为0。此处,应当使学生明确,正是由于隧道洞壁处切向应力变成原始地应力的2倍,进而在隧道洞壁上易引起应力集中,当洞壁上的应力大于岩石的屈服极限时岩石便进入塑性状态而可能发生失稳和破坏。

从式(3)和式(4)可以分析得到,静水应力场中隧道围岩的径向应力 $\sigma_r$ 和切向应力 $\sigma_\theta$ 任处于弹性状态,且两者沿围岩深度即极坐标 $r$ 方向上的分布特征见图2。



**Figure 2.** Distribution characteristics of the stress in surrounding rock of the tunnel in static stress field

**图 2.** 静水应力场中隧道围岩应力分布特征

从图2可知,隧道围岩的径向应力 $\sigma_r$ 随着深度 $r$ 的增加从洞壁处的0逐渐增大,当深度 $r \rightarrow \infty$ 时径向应力 $\sigma_r$ 才趋近于原始应力 $\sigma_y$ ,而切向应力 $\sigma_\theta$ 则从洞壁处的最大值 $2\sigma_y$ 沿深度 $r$ 的增大而逐步降低,其值当 $r \rightarrow \infty$ 时也趋近于原始应力 $\sigma_y$ 。

为便于工程应用,根据式(3)中围岩径向应力 $\sigma_r$ 和切向应力 $\sigma_\theta$ 与极坐标半径 $r$ 之间的关系式,当取 $r = 5R$ 时,则由式(3)可得到隧道围岩内该点处的径向应力 $\sigma_r$ 和切向应力 $\sigma_\theta$ 分别为

$$\begin{cases} \sigma_r|_{r=5R} = 0.96\sigma_y \\ \sigma_\theta|_{r=5R} = 1.04\sigma_y \\ \tau_{r\theta}|_{r=5R} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

根据式(3)和图 2 可得,理论上隧道围岩内的弹性应力只有在  $r \rightarrow \infty$  时才趋近于原始应力。但从式(5)可以看出,当  $r = 5R$  时隧道围岩内径向应力  $\sigma_r$  和切向应力  $\sigma_\theta$  分别与原始地应力仅相差 4%,该值已经小于工程中常用的相对误差为 5% 的要求。因而,通常将隧道开挖后对其围岩应力影响的区域确定为  $5R$ ,超出此范围的围岩可视为不受隧道开挖后应力重分布的影响。这也就是解释了前文图 1 中建立隧道模型时需要满足  $H > 5R$  的条件。在实际工程中,通常将隧道和地下结构在岩体中开挖后对周围岩体影响的范围确定为  $5R$  或者  $2.5D$ ,  $D$  为隧道或者地下结构的最大开挖直径,即  $D = 2R$ 。针对分析所得到的这个结论,在课堂讲授时可向学生进行重点强调和说明,这有助于学生通过对该知识点的学习而增加或积累工程实践经验。

## 2.2. 隧道围岩应力的弹塑性状态

根据式(3)和式(4)分析的结果,在岩体中开挖横断面为圆形的隧道后引起围岩应力的重新分布。当隧道围岩内的应力大于围岩的屈服极限时洞壁附近的围岩便处于塑性状态,此时塑性区的围岩可能发生破坏而影响围岩的稳定性。为分析围岩的塑性应力状态,建立图 3 所示的圆形横断面隧道围岩塑性区和弹性区的分布模型。

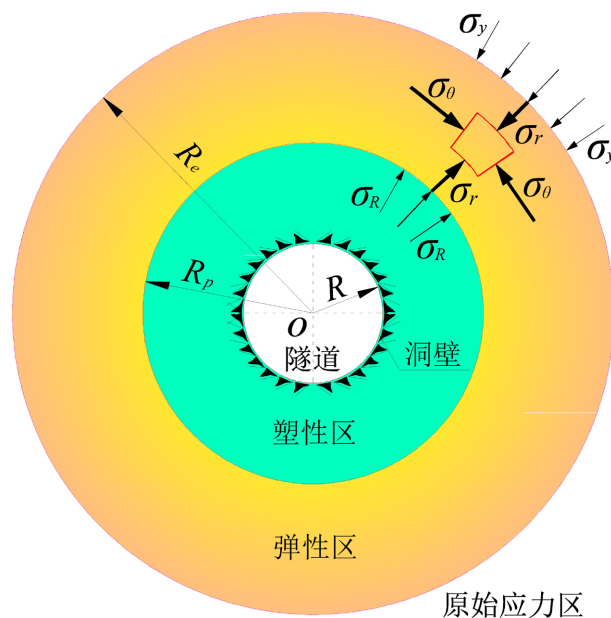


Figure 3. Plastic and elastic zone in surrounding rock of deep tunnel  
图 3. 深埋隧道围岩塑性区和弹性区

在图 3 中,假设塑性区和弹性区的范围均以隧道圆心为圆心的同心圆,并且图 3 中圆形横断面隧道的半径为  $R$ ,塑性区的半径为  $R_p$ ,弹性区的半径为  $R_e$ 。围岩中塑性区之外的区域均为弹性区,因而可将图 3 所示的隧道围岩塑性区和弹性区的模型视为厚壁圆筒。

根据岩石的 Mohr-Coulomb 强度准则,当塑性区内的围岩主应力满足 Mohr-Coulomb 强度准则时围岩即处于塑性应力状态。而弹性区的围岩则仍处于弹性应力状态。

为分析隧道围岩塑性区内的应力，在塑性区内选取由 ABCD 所围城的一个四边形微单元体  $P$ ，并且假设其处于静水应力条件下，同时满足轴对称条件，即微单元体上的应力和变形以过圆心  $O$  且垂直于极坐标  $(r, \theta)$  所在平面  $OP$  而对称，该微单元体  $P$  的应力状态见图 4。

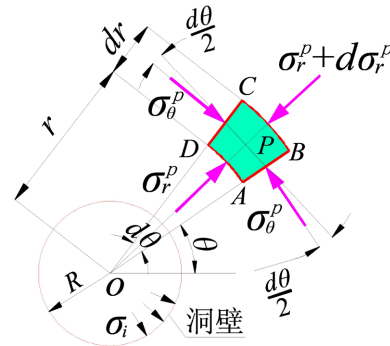


Figure 4. Stress state of a microelement  
图 4. 微单元体的应力状态

对图 4 中的微单元体  $P$  进行静力平衡分析，不考虑其内体积力的作用。由于图 4 所示的微单元体  $P$  是轴对称问题，则组成微单元体  $P$  的平面  $AB$  和  $CD$  上的切向应力  $\sigma_\theta^p$  相等，但其曲面  $AD$  和  $BC$  上的径向应力  $\sigma_r^p$  并不相等，而是其沿径向发生微小的改变。对图 4 中的微单元体  $P$  沿  $OP$  方向进行静力平衡分析，可得用应力表示的静力平衡关系式为

$$\sigma_r^p r dr - (\sigma_r^p + d\sigma_r)(r + dr) d\theta + 2\sigma_\theta^p dr \sin \frac{d\theta}{2} = 0 \quad (6)$$

对式(6)进行化简，化简时可利用微分中微分量之间乘积为 0 和微分角度的正弦等于该微分角度的关系即可得到静力平衡微分方程为

$$\frac{\sigma_\theta^p - \sigma_r^p}{r} - \frac{d\sigma_r^p}{dr} = 0 \quad (7)$$

当隧道围岩处于塑性应力状态时，微单元体  $P$  在主应力作用下满足 Mohr-Coulomb 强度准则，即由切向主应力  $\sigma_\theta^p$  和径向应力  $\sigma_r^p$  组成的 Mohr 应力圆与岩石的库伦抗剪强度直线  $MN$  相切，见图 5。

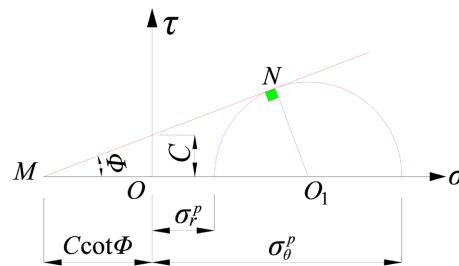


Figure 5. Mohr's stress circle and Coulomb's criterion for surrounding rock in plastic zone  
图 5. 围岩塑性区的应力圆和库伦准则

从图 5 中  $Rt\triangle MNO_1$  中即可得到

$$\sin \phi = \frac{NO_1}{MO_1} = \frac{\sigma_\theta^p - \sigma_r^p}{2C \cot \phi + \sigma_\theta^p + \sigma_r^p} \quad (8)$$

由式(8)可得

$$\sigma_{\theta}^p - \sigma_r^p = \frac{2 \sin \phi}{1 - \sin \phi} (C \cot \phi + \sigma_r^p) \quad (9)$$

将式(9)代入式(7), 并经过化简和不定积分运算后得到

$$\ln(C \cot \phi + \sigma_r^p) = \frac{2 \sin \phi}{1 - \sin \phi} \ln r + C_0 \quad (10)$$

式(10)中  $C_0$  为不定积分常数, 可利用边界条件加以确定。

当极坐标  $r = R$  时, 在隧道洞内的壁面上施加用于维护围岩稳定的支护压力为  $\sigma_i$ , 利用此边界条件, 并将其代入式(10)即可求得不定积分常数  $C_0$  为

$$C_0 = \ln(C \cot \phi + \sigma_i) - \frac{2 \sin \phi}{1 - \sin \phi} \ln R \quad (11)$$

将式(11)代入式(10)并对其进行化简后得到径向应力  $\sigma_r^p$  的表达式为

$$\sigma_r^p = (\sigma_i + C \cot \phi) \left( \frac{r}{R} \right)^{\frac{2 \sin \phi}{1 - \sin \phi}} - C \cot \phi \quad (12)$$

将式(12)代入式(9)并对其进行化简后得到切向应力  $\sigma_{\theta}^p$  的表达式为

$$\sigma_{\theta}^p = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} (\sigma_i + C \cot \phi) \left( \frac{r}{R} \right)^{\frac{2 \sin \phi}{1 - \sin \phi}} - C \cot \phi \quad (13)$$

至此便得到了在岩体中静水应力条件下深埋圆形横断面隧道围岩塑性区内的径向应力  $\sigma_r^p$  和切向主应力  $\sigma_{\theta}^p$  的表达式, 即式(14)。

$$\begin{cases} \sigma_r^p = (\sigma_i + C \cot \phi) \left( \frac{r}{R} \right)^{\frac{2 \sin \phi}{1 - \sin \phi}} - C \cot \phi \\ \sigma_{\theta}^p = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} (\sigma_i + C \cot \phi) \left( \frac{r}{R} \right)^{\frac{2 \sin \phi}{1 - \sin \phi}} - C \cot \phi \end{cases} \quad (14)$$

从式(14)可知, 隧道围岩塑性区内的径向应力  $\sigma_r^p$  和切向应力  $\sigma_{\theta}^p$  均为主应力, 且其数值与隧道洞壁面内所施加的支护压力  $\sigma_i$ 、围岩的粘聚力  $C$ 、内摩擦角  $\phi$ 、圆形横断面隧道的半径  $R$  以及极坐标  $r$  有关。

根据图 3 分析, 隧道围岩内塑性区之外则为弹性区, 而弹性区可视为一个无限大的厚壁圆筒, 其外界面上作用有原始地应力  $\sigma_y$ 。内界面则为弹性区和塑性区的分界面, 该分界面上作用有应力  $\sigma_R$ 。根据弹性力学中厚壁圆筒内部任一点应力的表达式, 即可得到弹性区围岩的径向应力  $\sigma_r^e$  和切向应力  $\sigma_{\theta}^e$  的表达式为[5]

$$\begin{cases} \sigma_r^e = -\frac{\frac{R_e^2}{r^2} - 1}{\frac{R_p^2}{r^2} - 1} \sigma_R - \frac{1 - \frac{R_p^2}{r^2}}{1 - \frac{R_p^2}{R_e^2}} \sigma_y \\ \sigma_{\theta}^e = +\frac{\frac{R_e^2}{r^2} + 1}{\frac{R_e^2}{r^2} - 1} \sigma_R - \frac{1 + \frac{R_p^2}{r^2}}{1 - \frac{R_p^2}{R_e^2}} \sigma_y \end{cases} \quad (15)$$



式中  $R_e$  为围岩中弹性区的半径, m;  $R_p$  为围岩中塑性区的半径, m。

在弹塑性区的交界面处极坐标  $r = R_p$ , 将其入式(15)并对其进行简化后得到

$$\begin{cases} \sigma_r^e = -\sigma_R \\ \sigma_\theta^e = \frac{R_e^2 (\sigma_R - 2\sigma_y) + R_p^2 \sigma_R}{R_e^2 - R_p^2} \end{cases} \quad (16)$$

式(16)中, 当围岩弹性区的半径为无限大时, 即  $R_e \rightarrow \infty$  时, 则有

$$\begin{cases} \sigma_r^e|_{R_e \rightarrow \infty} = -\sigma_R \\ \sigma_\theta^e|_{R_e \rightarrow \infty} = \sigma_R - 2\sigma_y \end{cases} \quad (17)$$

将式(17)中的两式相加可得

$$\sigma_r^e + \sigma_\theta^e = -2\sigma_y \quad (18)$$

式(18)表明, 在圆形横断面隧道围岩的塑性区和弹性区交界面处, 弹性区的围岩径向应力  $\sigma_r$  和切向应力  $\sigma_\theta$  之和为原始地应力的 2 倍, 围岩处于受压状态。

而对于隧道围岩的塑性区内, 当极坐标  $r = R_p$  时塑性区和弹性区的分界面上塑性区的应力可由式(14)得到, 即

$$\begin{cases} \sigma_r^p|_{r=R_p} = (\sigma_i + C \cot \phi) \left( \frac{R_p}{R} \right)^{\frac{2 \sin \phi}{1 - \sin \phi}} - C \cot \phi \\ \sigma_\theta^p|_{r=R_p} = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} (\sigma_i + C \cot \phi) \left( \frac{R_p}{R} \right)^{\frac{2 \sin \phi}{1 - \sin \phi}} - C \cot \phi \end{cases} \quad (19)$$

将式(19)中的两式相加, 即可得到

$$\sigma_r^p|_{r=R_p} + \sigma_\theta^p|_{r=R_p} = \frac{2}{1 - \sin \phi} (\sigma_i + C \cot \phi) \left( \frac{R_p}{R} \right)^{\frac{2 \sin \phi}{1 - \sin \phi}} - 2C \cot \phi \quad (20)$$

比较式(18)和式(20), 在塑性区和弹性区的交界面处主应力之和应相等, 即满足

$$\sigma_r^e + \sigma_\theta^e = \sigma_r^p + \sigma_\theta^p|_{r=R_p} \quad (21)$$

将式(18)和式(20)代入式(21)并经过化简后即可得到围岩塑性区半径  $R_p$  为

$$R_p = R \left[ \frac{C \cot \phi - \sigma_y (1 - \sin \phi)}{C \cot \phi + \sigma_i} \right]^{\frac{1 - \sin \phi}{2 \sin \phi}} \quad (22)$$

式(22)就是岩体处于静水应力条件下深埋圆形横断面隧道围岩塑性区半径的计算公式。从式(22)可知, 围岩中因应力重分布而引起的塑性区半径  $R_p$  不仅与原始地应力  $\sigma_y$ 、围岩的粘聚力  $C$  和内摩擦角  $\phi$  有关, 而且还与隧道洞壁上设置的支护压力  $\sigma_i$  和隧道的半径  $R$  有关。

将式(22)代入式(19)即可得到隧道围岩塑性区和弹性区交界面处塑性区内围岩的应力为

$$\begin{cases} \sigma_R = \sigma_r^p|_{r=R_p} = -[\sigma_y (1 - \sin \phi) + C \cos \phi] \\ \sigma_\theta = \sigma_\theta^p|_{r=R_p} = -[\sigma_y (1 + \sin \phi) - C \cos \phi] \end{cases} \quad (23)$$

此外，将塑性区的半径即式(22)代入式(17)即可得到塑性区与弹性区分界面处弹性区内围岩应力为

$$\begin{cases} \sigma_r^e|_{r=R_p} = \sigma_y(1 - \sin\phi) + C \cos\phi \\ \sigma_\theta^e|_{r=R_p} = -[\sigma_y(1 - \sin\phi) + C \cos\phi] - 2\sigma_y \end{cases} \quad (24)$$

经过对比分析式(23)和式(24)均满足式(21)所体现的关系，即在隧道围岩塑性区和弹性区的交界面处塑性区和弹性区内的围岩径向应力与切向应力之和均等于原始地应力的2倍，且围岩处于受压状态。

对上述求解静水应力条件下深埋圆形横断面隧道围岩塑性区半径的过程进行分析可得，其思路在于分别求得围岩塑性区和弹性区内的径向和切向应力，然后借助塑性区和弹性区在分界面处径向应力和切向应力之和均为原始垂直地应力的2倍这一特性即可得到围岩塑性区的半径。此特性作为求解围岩塑性区半径的重要知识点，需要在课堂向学生重点予以讲解并要求学生掌握。

### 2.3. 隧道围岩应力的分布特征

在得到静水应力条件下深埋圆形横断面隧道围岩塑性区和弹性区内的应力计算方法之后，即可分析深埋圆形横断面隧道径向主应力 $\sigma_r$ 和切向主应力 $\sigma_\theta$ 从洞壁面沿围岩深度即极坐标 $r$ 方向上的变化及其分别特征，其结果见图6。

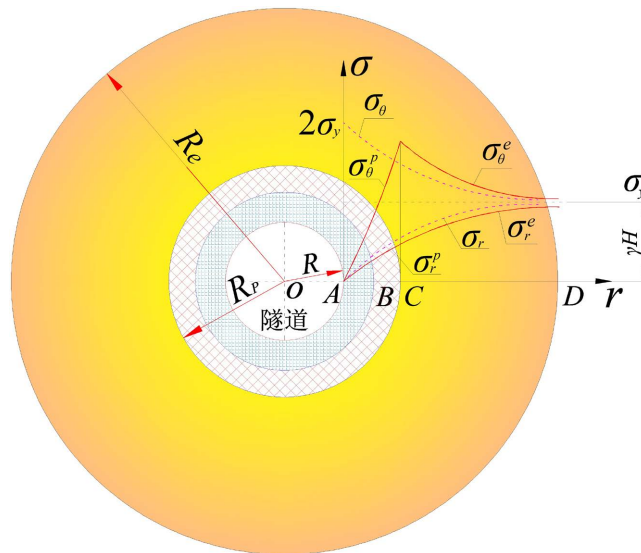


Figure 6. Distribution characteristics of stress in tunnel surrounding rock

图 6. 隧道围岩应力分布特征

图6中隧道围岩因应力重新分布而形成了塑性区和弹性区以及原始应力区。图6中的AC区域为塑性区，CD区域为弹性区，CD以外为未受扰动的原始应力区。在AC塑性区内，AB为围岩的松动区，BC为围岩应力升高区。AB松动区内岩体已被裂隙所切割，围岩的粘聚力接近于0，其内摩擦角也降低，岩体强度较低。该区域内围岩的应力低于原始地应力，因此又称应力降低区，该区域内岩体易发生坍塌和破坏。BC区域又称塑性强化区，该区域内岩体处于塑性状态，但仍具有较高的承载能力，岩体的应力大于原始地应力，也是隧道围岩的承载区。CD区域内岩体处于弹性应力状态，但各点的应力却高于原岩应力，但随着远离隧道洞壁深度的增加其值逐步恢复到原岩应力状态。CD以外的区域为未扰动的原始应力区，此处岩体的应力状态未受到隧道开挖的影响。

### 3. 围岩塑性区的工程意义

前文中已经分别分析了影响隧道围岩应力和塑性区半径的主要因素，但并未分析和研究围岩塑性区半径的工程实际意义。因此，还需要进一步就围岩塑性区半径的工程意义进行讲解。从计算得到的塑性区半径表达式(22)可知：

1) 当隧道的开挖半径  $R$  增大时，显然  $R_p$  也会增大。由此表明，在岩体中开挖的地下洞室半径或面积越大，则围岩内塑性区的范围也越大，围岩发生失稳和破坏的风险也越高，施工的难度也越大。

2) 当增加隧道内壁面上提供的支护压力  $\sigma_i$  时，则围岩中塑性区的半径  $R_p$  会减少，因此适当提高隧道支护的压力有利于维护隧道围岩的稳定与安全。

3) 岩体中的原始地应力  $\sigma_y$  较大时，围岩塑性区的范围会减小。即随着隧道埋深的增加会有利于减少围岩内部的塑性区。

4) 当岩体的粘聚力  $C$  和内摩擦角  $\phi$  越小，则岩体的剪切强度越低，由此会增加围岩的塑性区。

5) 隧道围岩塑性区内松动圈的范围可通过测试围岩中弹性波纵波波速与深度之间的变化关系来加以确定。测定隧道围岩内松动圈范围的目的在于为设计用于加固围岩的锚杆或锚索的长度提供依据。

从以上分析可知，为确保隧道工程施工和衬砌结构的安全，应采取工程措施防治围岩进入塑性状态和减小隧道围岩发生的塑性区范围。可采取的工程措施主要包括：在隧道开挖后及时设置衬砌支护、对隧道周围的软弱围岩进行注浆加固、在围岩塑性区内设置锚杆或锚索以及采用非爆破方式如采用隧道掘进机(TBM)进行开挖以减少对围岩的扰动等。在讲解此内容时可列举一些实际工程的案例。

如此组织和设计的教学内容，既有理论分析，又可用于实际工程，且不仅有助于学生的理解和掌握，更能提升学生学习岩石力学课程的兴趣和积累初步的工程经验。

通过上述的就圆形横断面深埋隧道围岩压力及其分布特征教学内容的组织和设计，使围岩应力场的概念和应力计算方法及其分布特征的讲授思路更加清晰，易于学生理解和掌握此部分的内容与知识点。

### 4. 结束语

深埋隧道围岩应力的计算是《岩石力学》课程中重要的讲授内容之一，而现行的岩石力学教材中对这部分内容的讲解较为粗略和笼统，且未给出其具体的推导过程，致使学生在学习和掌握课程教学的内容和相应的计算方法方面尚存在不少困难。本文结合课程的教学实践，就深埋圆形隧道围岩应力计算方法的推导过程和弹塑性区分布特征以及围岩塑性区半径的求解方法及其工程意义进行了相应的教学设计。通过对圆形横断面隧道围岩应力场、围岩塑性区、弹性区应力以及围岩塑性区半径的分析及其推导，给出了相应的教学设计。经过对我校 2020 至 2023 年选修岩石力学课程的学生在课堂上的测验和期末考核，90% 的同学已经能够理解和掌握所教授的相关知识点和计算方法，达到预期的教学效果。

### 致 谢

本文的研究还得到了西南交通大学课堂教学与改革项目的支持，并得到文章所列参考文献的作者们的指导与帮助，在此一并表示诚挚的感谢！

### 基金项目

本文的研究得到国家重点研发计划项目“极高地应力隧道吸能防岩爆技术研究”(2021YFB2300706)和四川省 2021~2023 年高等教育人才培养质量和教学改革项目“服务交通强国，聚焦智能建造”(JG2021-258)的支持。

## 参考文献

- [1] 许明, 张永兴. 岩石力学[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2020.
- [2] 吴顺川, 李利平, 张晓平. 岩石力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2021.
- [3] 沈明荣. 岩体力学[M]. 上海: 同济大学出版社, 1999.
- [4] 李元松, 张小敏, 周春梅, 蔡路军, 等. 岩土力学[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2013.
- [5] 徐芝纶. 弹性力学(上册) [M]. 北京: 高等教育出版社, 1990.