

基于“最近发展区”的高中数学教学案例

——高中“直线与圆的位置关系”教学

周梅芳, 陈惠汝*, 郭辰晓

黄冈师范学院数学与统计学院, 湖北 黄冈

收稿日期: 2024年1月16日; 录用日期: 2024年4月1日; 发布日期: 2024年4月10日

摘要

核心素养是学生应具备的适应终身发展和社会发展需要的必备品格和关键能力, 基于核心素养的数学教学能发展学生的现有水平, 丰富学生的认知结构, 使学生快速与社会接轨。随着课程改革的不断推进, 最近发展区在数学教学中发挥着重大作用, 立足于学生原有的知识基础、心理结构、学习特点, 实现“知识”核心向“素养”核心的转变。本案例通过梳理《直线与圆的位置关系》的知识点, 从教学现状、学生认知水平出发, 关注学生知识的主动建构过程, 运用最近发展区理论教学, 以期为高中数学解析几何的教学提供参考。

关键词

最近发展区, 核心素养, 直线与圆的位置关系

A Case Study of High School Mathematics Teaching Based on the “Recent Development Zone”

—Teaching of “The Positional Relationship between Straight Line and Circle” in Senior High School

Meifang Zhou, Huiru Chen*, Chenxiao Guo

School of Mathematics and Statistics, Huanggang Normal University, Huanggang Hubei

Received: Jan. 16th, 2024; accepted: Apr. 1st, 2024; published: Apr. 10th, 2024

*通讯作者。

Abstract

Core literacy is a necessary character and key ability that students should possess to meet the needs of lifelong development and social development. Mathematics teaching based on core literacy can develop students' current level, enrich their cognitive structure, and enable them to quickly integrate with society. With the continuous advancement of curriculum reform, the recent development zone plays a significant role in mathematics teaching, based on the original knowledge base, psychological structure, and learning characteristics of students, to achieve the transformation from the "knowledge" core to the "literacy" core. This case will focus on the active construction process of students' knowledge through the "positional relationship between straight lines and circles" from the perspective of teaching status and students' cognitive level, using the theory of the zone of proximal development to provide reference for the teaching of mathematical analytic geometry in senior high schools.

Keywords

Recent Development Zone, Core Literacy, The Positional Relationship between a Line and a Circle

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 问题提出

在《教育部关于全面深化课程改革落实立德树人根本任务的意见》中，明确界定了核心素养，即学生应具备的适应终身发展和社会发展需要的必备品格和关键能力[1]。学生核心素养的生成和发展离不开课堂教学，在学习知识的过程中，能够潜移默化的培养学生的核心素养。

在传统的课堂教学中，教师往往按照教材预设的知识体系和结构进行教学，导致学生无法整体把握知识结构，存在所学知识碎片化，知识迁移能力难提高的现象。教育家维果斯基提出了“最近发展区”理论，他认为学生有两种发展水平，即现有水平和可能发展水平，前者指的是学生在有效学习活动中可以达到的水平，后者指的是一种学习的潜能，而“最近发展区”介于这二者之间[2]。该理论认为前面的学习是后面的基础，把相关或相近的内容整合在一起学习，注重知识的系统性和关联性。立足最近发展区教学，就要求教师从单元设计观念对知识进行重组，根据学生的心理特点搭建相关支架，从而帮助学生达到下一发展阶段的水平。

“直线与圆的位置关系”作为高中数学选修部分的重要内容，一方面可以为后续学习圆与圆的位置关系做准备，另一方面也对后面的解题及相关数学问题的解决起到重要作用，是学习直线与圆锥曲线位置关系的基础，本文以《直线与圆的位置关系》为教学案例揭示学生从“知识学习”到“素养提升”的转变过程。通过本次案例分析，加深对核心素养生成过程的理解，学习最近发展区理论及其运用；能根据给定直线、圆的方程，判断直线与圆的位置关系，深入理解数形结合的数学思想；体会用代数方法解决几何问题的思想方法，提高学生的思维品质，发展学生的核心素养。

2. 教材分析与教学过程

“直线与圆的位置关系”是人教版高中数学(A版)选择性必修一第2章第5节内容，本节课的重、难

点是学生通过观察、比较、抽象和概括,探索出判定直线与圆的位置关系可以通过联立直线与圆的方程,判定方程组解的个数,进而判定交点个数。“直线与圆的位置关系”是对初中数学直线与圆的位置关系的延续,从直观的图像判断直线与圆的位置关系,过渡到从代数的角度解决几何问题,并将以代数结果解释几何问题,本节内容,既是两条直线的交点坐标的深入,也是后续学习圆锥曲线的基础,起着承前启后的作用。同时,本节课学习内容也是培养学生能用数形结合的思想方法解决几何问题的能力,增强学生迁移意识和应用意识。

2.1. 制造认知冲突, 激发学习兴趣

在课堂教学中设置认知冲突可以形成悬念,打破学生的直观感受,让学生们认识到,不能只通过直观的图片来判断直线与圆的位置关系,激发学生的学习兴趣;从直观到严谨,提升学生的数学素养。从圆心到直线的距离与半径进行比较是学生判断直线与圆的位置关系的直接思路,而从直线与圆的交点来判断直线与圆的位置关系,是学生理解直线与圆位置关系的难点。尤其是对于高中的学生来讲,他们很难从代数的角度去判断直线与圆的位置关系,为帮助学生理解,笔者尝试创设以下数学情境。

师:现在老师截取了太阳落下的一张图片,如图1,你们看地平线与太阳又是什么关系呢?

生:相切的。

师:同学们都是这样认为的吗?



Figure 1. Sunset view

图 1. 落日图

(大部分同学点头,少部分同学犹豫)

师(放大图片):现在你们再看看,如图2,它们还是相切的吗?

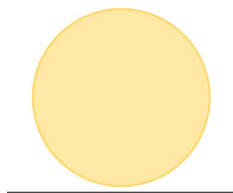


Figure 2. Magnified sunset view

图 2. 放大的落日图

生:不是,它们是相离的。

打破学生的直观感受,让学生们认识到,不能只通过直观的图片来判断直线与圆的位置关系,激发学生的学习兴趣;从直观到严谨,提升学生的数学素养。

师:那我们应该如何判断它们的位置关系呢?

生:计算圆心到直线的距离,与半径进行比较。

师:如何计算圆心到直线的距离呢?

生:建立直角坐标系,得到直线与圆的方程。

师:如何建立直角坐标系呢?

生：以圆心为原点建立直角坐标系。

师：好，那大家动手操作，计算圆心到直线的距离。

设计思路：通过顺应学生认知结构的问题链，从认知冲突情境中深入判定直线与圆的位置关系的本质，引导初中阶段学生就已经学过了通过判断圆心到直线的距离，与半径进行比较，进而确定直线与圆的位置关系，学生很容易想到用这种方法。并且学生在之前就学习过点到直线的距离公式，顺其自然的就想到运用距离计算，符合学生的认知发展水平，在计算过程中加强学生的数学运算素养。

2.2. 顺应知识生长，发展迁移思想

根据维果斯基的最近发展区理论，要想使教学有好的效果，关键就在于为学生搭好“脚手架”，即搭建学习支架[3]。之前已经引导学生回忆直线与圆的位置关系的判断方法，一个方法是通过计算圆心到直线的距离与半径进行比较来判断，另一个方法是通过交点个数来判断，让学生初步理解用代数的方法解决几何问题。

师：除了通过计算圆心到直线的距离，大家还有其它的方法判断直线与圆的位置关系吗？同桌互相讨论一下。

生：还可以通过交点个数判断，但是我不知道怎么求交点。

师：有同学知道如何判断交点吗？(沉默)我们之前是如何判断两条直线的交点呢？

生：建立直角坐标系得出直线方程，所以把这两个直线的方程联立，求这个方程组的解。

师：那你们觉得要如何判断直线与圆的位置关系呢？

生：建立直角坐标系得出直线和圆的方程，联立直线与圆的方程，因此方程组解的个数就是交点个数，通过交点个数来判断直线与圆的位置关系。

师：为什么解的个数就是交点个数呢？

生：如果是交点，那么它既在直线上，又在圆上，同时满足直线与圆两个方程，所以也就是联立两个方程的解。

引导学生从图形的几何关系进行思考，数形结合，这也是数学中研究图形及图形关系常用的方法，逐渐加深学生的数形结合思想，提升学生的数学思维水平。

师：老师把同学的思路写出来了，大家看。

生：老师，这题是判断直线与圆的位置关系，不需求出交点，我们可以通过化简的一元二次方程，求它的判别式判断交点个数，就可以判断出直线与圆的位置关系了。

设计思路：找到直线与圆的位置关系的知识结合点，以原有的经验推导出面临的问题。学生将学习直线与直线交点的方法，类比迁移到判断直线与圆的交点，初步形成判断位置关系的思想方法，潜移默化的培养学生类比迁移的数学思想。

2.3. 进行知识归纳，形成系统性思维

知识从来不是孤立的，而是由一个个知识点构造出知识群，挖掘各类主题与知识点之间的有机联系，从而明确教学设计的思路，按照知识的逻辑结构，把握事物发展的脉络，设计系统的、合乎逻辑的教学过程。“直线与圆位置关系”教学中笔者尝试渗透了单元设计观念，意在促进学生形成对判断图像位置关系的方法的整体认识。

师：那么同学们一起回顾一下，本节课我们学习了什么？

生：我们学习了直线与圆位置关系的判断方法。

师：有哪些方法可以判断直线与圆的位置关系呢？

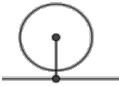
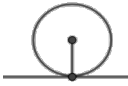
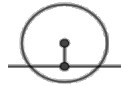
生：可以通过计算圆心到直线的距离与半径进行比较。

生：还可以联立直线与圆的方程，它们的解就是交点，通过交点个数来判断直线与圆的位置关系。

师：老师把判断直线与圆的位置关系总结成一张表格，见表 1。

Table 1. Determination of the position relationship between straight lines and circles

表 1. 直线与圆的位置关系的判定

图形			
直线与圆的位置关系	相离	相切	相交
公共点	0	1	2
判别式	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
圆心到直线的距离 d 与半径 r 的关系	$d > r$	$d = r$	$d < r$

师：我们已经学习了直线与圆的位置关系，能否大胆猜想一下，后续我们可能会研究什么的位置关系？你是怎么理解的？

生：我们学过直线与圆的位置关系，我觉得之后可能会研究圆与圆的位置关系。

师：这位同学分析的很好，那大家思考，如何判断圆与圆的位置关系？

在教师与学生共同探讨下，体验研究判断位置关系路径的共性：先研究图像，从直观的图像上找出圆心、半径和圆心到直线距离的数量关系，从而判断位置关系；从代数的角度研究直线和圆的方程，方程组交点所代表的几何意义，从而判断位置关系。

师：通过刚才探索，我们能归纳出研究几何问题的一般思想方法，比如类比思想，数形结合的思想方法将伴随我们后续进一步学习。

设计思路：通过研究直线与圆位置关系的判定方法，引导学生归纳总结研究几何问题的一般方法和思路，培养学生的逻辑推理和数学抽象的核心素养，帮助学生形成对位置关系的整体认识，为之后学习圆与圆的位置关系奠定基础。

2.4. 梳理认知思路，发展核心素养

数学教学不仅是教学生知识，更重要的是要在提升学生的数学能力上下功夫，提升学生的数学素养，知识和能力是显性的，素养是隐性的，三者之间相互依赖、相互促进，理清“知识”、“能力”与“素养”之间的关系对教师教学有着重要作用。数学教学中培养学生的数学核心素养，是高中数学教育的重要内容之一。核心素养是知识学习、能力发展的基础，数学课堂的中心任务就是发展学生的核心素养，让学生学会数形结合、类比迁移的思考办法，要学会主动思维，不断提高自身学科素养，发展应用能力。

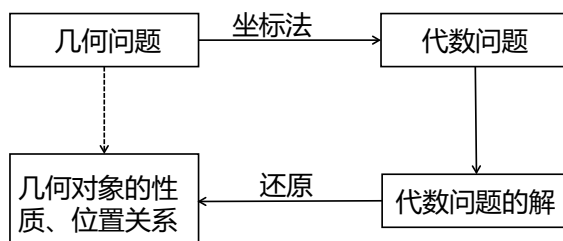


Figure 3. Flow chart of numerical shape combination

图 3. 数形结合流程图

“直线与圆的位置关系”教学中，笔者将数形结合的思想贯穿整堂课，判断直线与圆位置关系这个几何问题，将直线与圆在坐标中表示出来，于是将几何问题转变为代数问题，联立直线与圆的方程，方程组的解就是直线与圆的交点坐标，将代数问题的解还原为几何对象的位置关系，最终解决几何问题。回顾概念生成过程中的核心要点融入结构图(如图3)，有利于培养学生数形结合的思想，清晰的了解知识的内在逻辑，形成解决这类问题的一般性方法。

3. 结语

维果斯基提出的“最近发展区”为理论基础展开本节课的学习，最不可忽略的一个环节就是预测学生的最近发展区。在初中数学已经学过了直线与圆位置关系的判断，学生也掌握了从几何方面判断直线与圆位置关系的两种方法，这为高中学习直线与圆的位置关系搭建了知识的基层支架，并且在本节课之前，学生也学过了直线的方程与位置关系，以及圆的方程和几何要素，所以有理由相信学生可以从代数的角度来判断直线与圆的位置关系，这就是学生的“最近发展区”，学生在教师的引导下，深刻理解将几何问题代数化，反过来再用代数的方法去解决几何问题，建立几何与代数的桥梁，获取解决几何问题的思想方法[4]。通过对案例的深入分析，展现课堂教学中如何将关注学生的认知特点和已有经验，依据学习理论将学生的学习主体地位落到实处，发展学生的思维品质，从而实现学生核心素养的发展。

基金项目

黄冈师范学院 2023 年教育专业学位教学案例项目(5022023002)。

参考文献

- [1] 喻平. 数学核心素养评价的一个框架[J]. 数学教育学报, 2017, 26(2): 19-23+59.
- [2] 贾连梅. 基于学生“最近发展区”的数学教学实践——“分数的意义(第一课时)”教学尝试与思考[J]. 数学教学通讯, 2022(7): 26-27.
- [3] 马营. 基于建构主义学习理论的支架式高中数学教学策略探究[D]: [硕士学位论文]. 济南: 济南大学, 2019. <https://doi.org/10.27166/d.cnki.gsdcc.2019.000541>
- [4] 胡云飞. “教什么”和“怎么教”是课堂教学落实核心素养的关键维度——以“直线与圆的位置关系”为例[J]. 数学通报, 2019, 58(11): 33-37.