Operations Research and Fuzziology 运筹与模糊学, 2024, 14(2), 1386-1392
Published Online April 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/orf
https://doi.org/10.12677/orf.2024.142234

Hans汉斯

更优回应保障下*n*人非合作博弈Nash均衡解的良定性

田　魏，贾文生*

贵州大学数学与统计学院，贵州　贵阳

收稿日期：2024年1月11日；录用日期：2024年1月31日；发布日期：2024年4月30日

摘　要

本文主要研究一类不连续条件更优回应保障下的n人非合作博弈良定性。首先在有限理性模型下给出良定性的一个新的充分条件。然后通过这个充分条件证明此类不连续博弈是良定的。更进一步得到了此类不连续博弈的Tykhonov良定性与Hadamard良定性。这些结果推广了已有文献的研究成果。

关键词

不连续非合作博弈，良定性，更佳回应保障

Well-Posedness of Nash Equilibrium for *n*-Person Non-Cooperative Games under the Better-Reply security

Wei Tian, Wensheng Jia*

College of Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang Guizhou

Received: Jan. 11th, 2024; accepted: Jan. 31st, 2024; published: Apr. 30th, 2024

Abstract

This paper mainly studies the well-posedness of n-person non-cooperative games under the better-reply security. Firstly, a new sufficient condition of well-posedness is obtained under the bounded rational model. Furthermore, the Tykhonov well-posedness and Hadamard well-posedness of the discontinuous non-cooperative games are obtained. These results generalize some findings

*通讯作者。

文章引用: 田魏, 贾文生. 更优回应保障下 *n* 人非合作博弈 Nash 均衡解的良定性[J]. 运筹与模糊学, 2024, 14(2): 1386-1392.
DOI: 10.12677/orf.2024.142234

in recent literature.

Keywords

Discontinous Non-Cooperrative Games, Well-Posedness, Better-Reply Security

1. 引言

Tykhonov [1]良定性与 Hadamaard [2]良定性是良定性的两个主要概念，前者考虑近似解序列对于问题唯一解的收敛性而后者考虑近似问题的解序列对于问题的唯一解的收敛性。1993 年，Dontchcv 与 Zolezzi [3]在最优化与变分计算等问题上对于这些良定性进行了系统的研究。1995 年，Lucchetti 与 Revalski [4]主编的论文集继续研究了更广泛问题的良定性。而且，良定性的研究还被推广到更多的研究问题上，例如不动点问题，变分不等式问题，平衡问题等。

近些年，博弈 Nash 均衡的良定性已经成为一个研究热点。Patrone [5]与 Chicco [6]等学者研究了双人博弈 Nash 均衡的 Tykhonov 良定性。后来，Yu 等人[7]证明了一类不连续博弈的 Tykhonov 良定性与 Hadamaard 良定性。Scalzo [8]证明了更弱的支付函数连续条件伪连续与更优回应保障下博弈 Nash 均衡的 Hadamard 良定性。Yu [9]利用有限理性模型对各种问题的良定性进行了统一的研究。而且良定性在博弈的其他解上面也有广泛的研究。Yang 和 Meng [10]研究了几类不连续条件下 α-核的 Hadamard 良定性。Li 和 Jia [11]研究了广义模糊博弈 α-核的存在性与良定性。Hung 和 Keller [12]研究了广义模糊多目标博弈解的良定性。

另一方面，不连续博弈的研究也是一个热点，其主要研究目的是在支付函数不连续的情况下寻找更多的博弈均衡解存在的充分条件。Reny [13]给出了不连续条件更优回应保障，并证明了此条件下博弈 Nash 均衡的存在性。后来，Morgan 与 Scalzo [14]给出了新的不连续条件伪连续，且证明一个博弈如果是伪连续的其必是更优回应保障的。Nessah 与 Tian [15]研究了拟弱转移连续条件下的 n 人非合作博弈。Scalzo [16]引入了不连续条件——广义单偏差，并证明了此条件下 Nash 均衡的存在性定理。2020 年，Reny [17]对于拟凹条件下的各类不连续博弈进行了总结分析，并给出了新的不连续条件——鲁棒更优回应保障。Qiu 等人[18]把支付函数减弱为伪连续，并利用了伪连续条件下的 Berge 极大值定理证明了其弱 Pareto-Nash 平衡的存在性。最近 Mou 与 Jia [19]证明了支付函数为向量值广义单偏差条件下的弱 Pareto-Nash 平衡的存在性定理。各种各样的不连续博弈的研究成果还在不断涌现。

受上述研究工作的启发，本文给出了一个有限理性模型下博弈良定性新的充分条件，并证明了不连续条件更优回应保障下 n 人非合作博弈的良定性。我们的结果不仅减弱了良定性充分条件的连续性要求，而且也给出了不连续博弈良定性研究的新结果。

2. 预备知识

n 人非合作博弈模型：设 $\lambda=(S_i,u_i)_{i\in N}$ 是一个 n 人非合作博弈，其中 $N=\{1,\cdots,n\}$ 是局中人的集合，$\forall i\in N$，局中人 i 的策略集为 S_i，$S=\prod_{i\in N}S_i$。局中人 i 的支付由有界函数 $u_i:S\to R$ 的确定。$\forall i\in N$ 记 $-i=N\setminus\{i\}$。如果存在 $s^*\in S$，使得 $\forall i\in N$，有

$$u_i\left(s_i^*, s_{-i}^*\right)=\max_{\omega_i \in S_i} u_i\left(\omega_i, s_{-i}^*\right),$$

则称 s^* 为此 n 人非合作博弈 $\lambda=\left(S_i, u_i\right)_{i \in N}$ 的 Nash 均衡。显然在博弈的 Nash 均衡处，每个局中人都不能通过单独改变自己的策略而使自己获得更大的利益。如果对于任意的局中人 i，其策略空间 S_i 是一个 Hausdorff 局部凸拓扑线性空间的非空紧子集则称博弈 λ 是紧的。另外，如果对于任意的局中人 i，其策略空间 S_i 是凸的，而且 $\forall s_{-i} \in S_{-i}$， $u_i\left(\cdot, s_{-i}\right)$ 在 S_i 上面是拟凹的，则称博弈 λ 是拟凹的。

定义 1 [13] 博弈 λ 是更优回应保障的：如果对于任意的 $\left(s^*, u^*\right)$ 属于博弈 $\lambda=\left(S_i, u_i\right)_{i \in N}$ 的支付函数 $u(\cdot)$ 的闭图而且不是 Nash 均衡，则存在一个局中人 i 与 $\overline{s_i} \in S_i$ 以及 s_i 的某些领域 $O\left(s_{-i}^*\right)$ 与一个正数 ε，使得

$$u_i\left(\overline{s_i}, s_{-i}'\right) \geq u_i^*+\varepsilon, \forall s_{-i}' \in O\left(s_{-i}^*\right).$$

定义 2 [20] 设 S 是一个拓扑空间， $u: S \rightarrow R$ 是一个实值函数且 $0 \in u(S)$。 $u(\cdot)$ 在 s 点处称为 0-下伪连续的，如果 $u(s)>0$，则有 $\varliminf_{s' \rightarrow s} u\left(s'\right)>0$。

注 1：设如果一个函数是下伪连续的而且包含 0 值，则其必是 0-下伪连续的，反之不成立(参考如下反例)。

例 1：设 Q 是全体有理数集合，定义如下 $[0,1]$ 上的实值函数

$$u(s)=\begin{cases}0 & s=0 \\ 4 & s \in(0,1] \cap Q . \\ 8 & \text{其他}\end{cases}$$

则对于任意的 $s \in[0,1]$ 有 $\varliminf_{s' \rightarrow s} s'=4, \ \varlimsup_{s' \rightarrow s} s'=8$。易知，此函数是 0-下伪连续的但不是下伪连续的。

下面是有限理性模型下良定性的定义。

假设 $M=\{\Lambda, S, F, \phi\}$ 是一个有限理性模型，其中

(a) $\forall \lambda \in \Lambda$， $\lambda=\left(F_i(\lambda), u_i\right)_{i \in N}$ 是一个 n 人非合作博弈；

(b) $S=\left(S_1, S_2, \cdots, S_n\right)$ 是博弈的策略集合，$F(\lambda)=\left(F_1(\lambda), F_2(\lambda), \cdots, F_n(\lambda)\right)$ 是此博弈 λ 的可行策略集，由函数 $F: \Lambda \rightarrow P_0(S)$ 所定义；

(c) $\phi: \Lambda \times S \rightarrow R$ 是有限理性函数，当 $s \in F(\lambda)$ 时，则有 $\phi(\lambda, s) \geq 0$。

假设 $E(\lambda, \varepsilon)=\{s \in S \mid \phi(\lambda, s)<\varepsilon\}$ 是博弈 λ 的 ε-平衡点集，其中 ε 是一个正实数。如果 $\varepsilon=0$，设 $E(\lambda, 0)=E(\lambda)=\{s \in S \mid \phi(\lambda, s)=0\}$ 是博弈 λ 的所有 Nash 均衡组成的集合。

定义 3 [9] 一个博弈 λ 是广义良定的如果 $\forall \lambda_n \in \Lambda$，满足 $\lambda_n \rightarrow \lambda$ 且 $\forall s_n \in E\left(\lambda_n, \varepsilon_n\right)$，当 $\varepsilon_n \rightarrow 0$ 时，可以找到策略序列 $\left\{s_n\right\}$ 的一个子序列 $\left\{s_{n_k}\right\}$ 使得 $s_{n_k} \rightarrow s \in E(\lambda)$。如果博弈 λ 是广义良定的且有唯一的 Nash 均衡，则称博弈 λ 是良定的。

定义 4 [9] 一个博弈 λ 是广义 Tykhonov 良定的如果 $\forall s_n \in E\left(\lambda, \varepsilon_n\right)$，当 $\varepsilon_n \rightarrow 0$ 时，可以找到策略序列 $\left\{s_n\right\}$ 的一个子序列 $\left\{s_{n_k}\right\}$ 使得 $s_{n_k} \rightarrow s \in E(\lambda)$。如果博弈 λ 是广义 Tykhonov 良定的且有唯一的 Nash 均衡，则称博弈 λ 是 Tykhonov 良定的。

定义 5 [9] 一个博弈 λ 是广义 Hadamard 良定的如果 $\forall \lambda_n \in \Lambda$，满足 $\lambda_n \rightarrow \lambda$ 且 $\forall s_n \in E\left(\lambda_n\right)$ 时，可以找到策略序列 $\left\{s_n\right\}$ 的一个子序列 $\left\{s_{n_k}\right\}$ 使得 $s_{n_k} \rightarrow s \in E(\lambda)$。如果博弈 λ 是广义 Hadamard 良定的且有唯一

的 Nash 均衡，则称博弈 λ 是 Hadamard 良定的。

性质 1 [9] 如果一个博弈 λ 是广义良定的，则 λ 是广义 Tykhonov 良定的与广义 Hadamard 良定的。

3. 良定性

首先给出良定性的一个充分条件。

引理 1：假设 $M=\{\Lambda,S,F,\phi\}$ 是一个有限理性模型，$\forall\lambda\in\Lambda$ 有

(a) $F:\Lambda\to P_0(S)$ 在 Λ 中是上半连续的且 $F(\lambda)$ 是一个非空紧集；

(b) $\phi:\Lambda\times S\to R$ 在 $\Lambda\times S$ 上是 0-下伪连续的。

则博弈 λ 是广义良定的。

证：$\forall\lambda_n\in\Lambda$，满足 $\lambda_n\to\lambda$ 与 $\forall s_n\in E(\lambda_n,\varepsilon_n)$，当 $\varepsilon_n\to 0$ 时，有 $s_n\in F(\lambda_n)$。因为 $F(\cdot)$ 在 Λ 上是上半连续的且 $F(\lambda)$ 是紧的。根据引理 1.2 [21]，可以找到 $\{s_n\}$ 的一个子序列 $\{s_{n_k}\}$ 使得 $s_{n_k}\to s\in F(\lambda)$。我们只需要再证明 s 是博弈 λ 的一个 Nash 均衡即可。

因为 $\forall s_n\in E(\lambda_n,\varepsilon_n)$ 和 $\varepsilon_n\to 0$，显然

$$\phi\left(\lambda_{n_k},s_{n_k}\right)\to 0.$$

利用反证法。如果 $s\notin E(\lambda)$，则有 $\phi(\lambda,s)>0$。因为 $\phi(\cdot)$ 是 0-下伪连续的，有 $\underline{\lim}_{n_k\to+\infty}\phi\left(\lambda_{n_k},s_{n_k}\right)>0$。这与 $\phi\left(\lambda_{n_k},s_{n_k}\right)\to 0$ 是矛盾的，因此 $s\in E(\lambda)$，即 s 是博弈 λ 的一个 Nash 均衡。(证毕)

注 2：通过注 1 可知 0-下伪连续是比下伪连续更弱的不连续条件，所有此引理推广了 Yu [22]的充分条件(定理 8.2.1)。

假设 $M_A=\{\Lambda,S,F,\phi\}$ 是更优回应保障博弈的一个有限理性模型，其中

(a) $\forall\lambda\in\Lambda$，$\lambda=\left(F_i(\lambda),u_i\right)_{i\in N}$ 是一个紧的，拟凹的与更优回应保障的 n 人非合作博弈，且 $F(\cdot)$ 在 Λ 上是上半连续的；

(b) 定义 ρ 为 Λ 上的距离，对于任意的 $\lambda_1=\left(S_i,u_i^1\right)_{i\in N}$ 与 $\lambda_2=\left(S_i,u_i^2\right)_{i\in N}$ 属于 Λ，令

$$\rho(\lambda_1,\lambda_2)=\sum_{i=1}^{n}\sup_{s\in S}\left|u_i^1(s)-u_i^2(s)\right|; \tag{1}$$

(c) $\forall\lambda\in\Lambda$ 与 $\forall s\in S$，理性函数 $\phi(\lambda,s)$ 定义为

$$\phi(\lambda,s)=\sum_{i=1}^{n}\left[\sup_{w_i\in S_i}u_i\left(w_i,s_{-i}\right)-u_i\left(s_i,s_{-i}\right)\right]. \tag{2}$$

显然有 $\phi(\lambda,s)\geq 0$ 且 $\phi(\lambda,s)=0$ 当且仅当 $s\in E(\lambda)$。通过给出更优回应保障 n 人非合作博弈的有限理性模型 $M_A=\{\Lambda,S,F,\phi\}$，我们可以利用良定性去统一 Hadamard 良定性与 Tykhonov 良定性的研究。

定理 1：假设有限理性模型 $M_A=\{\Lambda,S,F,\phi\}$ 满足以上条件，则对于 $\forall\lambda\in\Lambda$，λ 是广义良定的。

证：因为 $\forall\lambda\in\Lambda$，$F(\cdot)$ 在 Λ 上是上半连续紧的，根据引理 1 只需要再证明理性函数 $\phi(\cdot)$ 是 0-下伪连续的即可。

对于任意的 $(\lambda,s)\in\Lambda\times S$，如果 $\phi(\lambda,s)>0$，且 $\{(\lambda_k,s_k)\}$ 是博弈与策略的笛卡尔乘积 $\Lambda\times S$ 中满足的序列，有

$$
\begin{aligned}
&\phi(\lambda_k,s_k)\\
&=\sum_{i=1}^{n}\left[\sup_{w_i\in S_i}u_i^k\left(w_i,s_{-i}^k\right)-u_i^k\left(s_i^k,s_{-i}^k\right)\right]=\sum_{i=1}^{n}\left[\sup_{w_i\in S_i}u_i^k\left(w_i,s_{-i}^k\right)-\sup_{w_i\in S_i}u_i\left(w_i,s_{-i}^k\right)\right]\\
&=\sum_{i=1}^{n}\left[\sup_{w_i\in S_i}u_i^k\left(w_i,s_{-i}^k\right)-u_i^k\left(s_i^k,s_{-i}^k\right)\right]\quad+\sum_{i=1}^{n}\left[u_i^k\left(s_i^k,s_{-i}^k\right)-u_i\left(s_i^k,s_{-i}^k\right)\right]\\
&\quad-\sum_{i=1}^{n}\left[\sup_{w_i\in S_i}u_i\left(w_i,s_{-i}^k\right)-u_i\left(s_i^k,s_{-i}^k\right)\right]\quad+\sum_{i=1}^{n}\left[\sup_{w_i\in S_i}u_i\left(w_i,s_{-i}^k\right)-u_i\left(s_i^k,s_{-i}^k\right)\right].\\
&\quad+\sum_{i=1}^{n}\left[\sup_{w_i\in S_i}u_i\left(w_i,s_{-i}^k\right)-u_i\left(s_i^k,s_{-i}^k\right)\right]
\end{aligned}
$$

由于 $u_i^k(\cdot)$ 是有界的，可以找到一个策略 $\overline{s}_i\in S_i$ 使得 $u_i^k\left(\overline{s}_i,s_{-i}^k\right)>\sup_{w_i\in S_i}u_i^k\left(w_i,s_{-i}^k\right)-\rho(\lambda_k,\lambda)$。根据 $\rho(\lambda_k,\lambda)$ 的定义，有

$$u_i^k\left(\overline{s}_i,s_{-i}^k\right)-\rho(\lambda_k,\lambda)\le u_i\left(\overline{s}_i,s_{-i}^k\right)\le\sup_{w_i\in S_i}u_i\left(w_i,s_{-i}^k\right).\text{则有}$$

$$\sup_{w_i\in S_i}u_i^k\left(w_i,s_{-i}^k\right)-2\rho(\lambda_k,\lambda)\le\sup_{w_i\in S_i}u_i\left(w_i,s_{-i}^k\right). \tag{3}$$

类似地，可得

$$\sup_{w_i\in S_i}u_i\left(w_i,s_{-i}^k\right)-2\rho(\lambda_k,\lambda)\le\sup_{w_i\in S_i}u_i^k\left(w_i,s_{-i}^k\right). \tag{4}$$

结合(3)与(4)，可以推出

$$
\begin{aligned}
-4n\rho(\lambda_k,\lambda)\le&\sum_{i=1}^{n}\left[\sup_{w_i\in S_i}u_i^k\left(w_i,s_{-i}^k\right)-\sup_{w_i\in S_i}u_i\left(w_i,s_{-i}^k\right)\right]\\
&\le 4n\rho(\lambda_k,\lambda).
\end{aligned}
$$

由于 $\rho(\lambda_k,\lambda)\to 0$，可得

$$\lim_{k\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\sup_{w_i\in S_i}u_i^k\left(w_i,s_{-i}^k\right)-\sup_{w_i\in S_i}u_i\left(w_i,s_{-i}^k\right)\right]=0. \tag{5}$$

因为 $\rho(\lambda_k,\lambda)\to 0$ 且 $-\rho(\lambda_k,\lambda)\le\sum_{i=1}^{n}\left[u_i^k\left(s_i^k,s_{-i}^k\right)-u_i\left(s_i^k,s_{-i}^k\right)\right]\le\rho(\lambda_k,\lambda)$,

可得

$$\lim_{k\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[u_i^k\left(s_i^k,s_{-i}^k\right)-u_i\left(s_i^k,s_{-i}^k\right)\right]=0. \tag{6}$$

令

$$\varphi(s)=\sum_{i=1}^{n}\left[\sup_{w_i\in S_i}u_i\left(w_i,s_{-i}\right)-u_i\left(s_i,s_{-i}\right)\right].$$

由于 $\phi(\lambda,s)>0$，则 s 不是博弈 λ 的 Nash 均衡。因 λ 是更优回应保障的，则 $\forall u_i'\in\left\{u_i'\middle|(s,u')\in cg(u)\right\}$ 其中 $cg(u)$ 为支付函数的闭图，可以找到局中人 i，$\overline{s}_i\in S_i$，s_{-i} 的一个开邻域 $O(s_{-i})$ 与一个正实数 ε 使得

$$u_i\left(\overline{s}_i,s_{-i}'\right)>u_i'+\varepsilon,\forall s_{-i}'\in O\left(s_{-i}'\right). \tag{7}$$

设 $\sup\limits_{(s,u')\in cg(u_i)}\{u_i'\}=\max\limits_{(s,u_i')\in cg(u_i)}\{u_i'\}=t$。根据(7)式，不妨设

$$u_i\left(\overline{s}_i,s'_{-i}\right)>t+\varepsilon,\forall s'_{-i}\in O\left(s'_{-i}\right).$$

因 $\sup\limits_{x_i\in S_i}u_i\left(x_i,s'_{-i}\right)\geq u_i\left(\overline{s}_i,s'_{-i}\right)$，有

$$\sup_{w_i\in S_i}u_i\left(w_i,s'_{-i}\right)>t+\varepsilon,\forall s'_{-i}\in O\left(s'_{-i}\right).$$

因博弈 λ 是有界的，对于任意的 $\{s'\}$，满足 $s'\to s$，不妨设 $\{s'\}\subset O\left(s'_{-i}\right)$，则有

$$\underline{\lim}_{s'\to s}\sup_{w_i\in S_i}u_i\left(w_i,s'_{-i}\right)\geq t+\varepsilon. \tag{8}$$

由 $\varphi(s)$ 的定义(2)式，有

$$\begin{aligned}\underline{\lim}_{s'\to s}\varphi\left(s'\right)&\geq\underline{\lim}_{s'\to s}\left\{\sup_{w_i\in S_i}u_i\left(w_i,s'_{-i}\right)-u_i\left(s'\right)\right\}\\&\geq\underline{\lim}_{s'\to s}\sup_{w_i\in S_i}u_i\left(w_i,s'_{-i}\right)-\overline{\lim}_{s'\to s}u_i\left(s'\right).\end{aligned} \tag{9}$$

又有

$$\overline{\lim}_{s'\to s}u_i\left(s'\right)\leq\sup_{(s,u')\in cg(u)}\{u'\}=\max_{(s,u_i')\in cg(u_i)}\{u_i'\}=t. \tag{10}$$

结合(8)、(9)与(10)，可得 $\underline{\lim}_{s'\to s}\varphi\left(s'\right)>\varepsilon>0$。由 $\{s'\}$ 的任意性，则

$$\underline{\lim}_{k\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\sup_{w_i\in S_i}u_i\left(w_i,s_{-i}^k\right)-u_i\left(s_i^k,s_{-i}^k\right)\right]>0. \tag{11}$$

结合(5)、(6)与(11)，可得 $\underline{\lim}_{(\lambda_k,s_k)\to(\lambda,s)}\phi\left(\lambda_k,s_k\right)>0$。因此 $\phi(\cdot)$ 是 0-下伪连续的。(证毕)

由于一个伪连续 n 人非合作博弈也是更优回应保障的，则有如下推论。

推论 1：对于满足上述条件的有限理性模型 $M_A=\{\Lambda,S,F,\phi\}$，$\forall\lambda\in\Lambda$，如果 λ 是一个伪连续的 n 人非合作博弈，则 λ 是广义良定的。

推论 2 [8]：对于满足上述条件的有限理性模型 $M_A=\{\Lambda,S,F,\phi\}$，$\forall\lambda\in\Lambda$，λ 是广义 Hadamard 良定的。

推论 3：对于满足上述条件的有限理性模型 $M_A=\{\Lambda,S,F,\phi\}$，$\forall\lambda\in\Lambda$，λ 是广义 Tykhonov 良定的。

4. 结论

本文通过不连续条件 0-下伪连续，给出了博弈良定性的新的充分条件。然后利用这个充分条件证明了有限理性模型下更优回应保障博弈的良定性。由于一个博弈如果是广义良定的则其必定也是广义 Tykhonov 良定的与广义 Hadamard 良定的，也就得到更优回应保障条件下博弈的 Tykhonov 良定性与 Hadamard 良定性。

基金项目

国家自然科学基金(12061020, 71961003)，贵州省自然科学基金(20205016, 2021088, 20215640)。

参考文献

[1] Tikhonov, A.N. (1966) On the Stability of the Functional Optimization Problem. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **6**, 28-33. https://doi.org/10.1016/0041-5553(66)90003-6

[2] Hadamard, J. (1902) Sur les problèmes aux dèrivèes partielles et leur signification physique. *Princeton University Bul-*

letin, **13**, 49-52.

[3] Dontchcv, A.L. and Zolezzi, T. (1993) Well-posed Optimization Problems. Springer-Verlag, Berlin. https://doi.org/10.1007/BFb0084195

[4] Lucchetti, R. and Revalski, J. (eds.) (1995) Recent Developments in Well-Posed Variational Problems. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-015-8472-2

[5] Patrone, F. (1995) Well-Posedness for Nash Equilibria and Related Topics. In: Lucchetti, R. and Revalski, J., eds., *Recent Developments in Well-Posed Variational Problems*, Springer, Dordrecht, 211-227. https://doi.org/10.1007/978-94-015-8472-2_9

[6] Chicco, L.P. (2001) Approximate Solutions and Tikhonov Well-Posedness for Nash Equilibria. Springer, USA, 231-246. https://doi.org/10.1007/0-306-48026-3_15

[7] Yu, J., Yang, H. and Yu, C. (2007) Well-Posed Ky Fan's Point, Quasi-Variational Inequality and Nash Equilibrium Problems. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **66**, 777-790. https://doi.org/10.1016/j.na.2005.10.018

[8] Scalzo, V. (2009) Hadamard Well-Posedness in Discontinuous Non-Cooperative Games. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **360**, 697-703. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2009.07.007

[9] 俞建. 关于良定问题[J]. 应用数学学报, 2011, 34(6): 1007-1022.

[10] Yang, Z. and Meng, D. (2017) Hadamard Well-Posedness of the α-Core. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **452**, 957-969. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2017.03.038

[11] Li, Y. and Jia, W. (2023) Existence and Well-Posedness of the α-Core for Generalized Fuzzy Games. *Fuzzy Sets and Systems*, **458**, 108-117. https://doi.org/10.1016/j.fss.2022.06.018

[12] Hung, N.V. and Keller, A.A. (2023) Generalized Well-Posedness for Parametric Fuzzy Generalized Multiobjective Games. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **422**, Article ID: 114917. https://doi.org/10.1016/j.cam.2022.114917

[13] Reny, P.J. (1999) On the Existence of Pure and Mixed Strategy Nash Equilibria in Discontinuous Games. *Econometrica*, **67**, 1029-1056. https://doi.org/10.1111/1468-0262.00069

[14] Morgan, J. and Scalzo, V. (2007) Pseudocontinuous Functions and Existence of Nash Equilibria. *Journal of Mathematical Economics*, **43**, 174-183. https://doi.org/10.1016/j.jmateco.2006.10.004

[15] Nessah, R. and Tian, G. (2016) On the Existence of Nash Equilibrium in Discontinuous Games. *Economic Theory*, **61**, 515-540. https://doi.org/10.1007/s00199-015-0921-8

[16] Scalzo, V. (2019) Equilibrium Existence in Games: Slight Single Deviation Property and Ky Fan Minimax Inequality. *Journal of Mathematical Economics*, **82**, 197-201. https://doi.org/10.1016/j.jmateco.2019.02.008

[17] Reny, P.J. (1999) On the Existence of Pure and Mixed Strategy Nash Equilibria in Discontinuous Games. *Econometrica*, **67**, 1029-1056. https://doi.org/10.1111/1468-0262.00069

[18] Qiu, X.L., Peng, D.T. and Yu, J. (2017) Berge's Maximum Theorem to Vector-Valued Functions with Some Applications. *Journal of Nonlinear Sciences & Applications* (*JNSA*), **10**, 1861-1872. https://doi.org/10.22436/jnsa.010.04.46

[19] Mou, Y.S. and Jia W.S. (2022) Existence and Stability of Weakly Pareto-Nash Equilibria for Discontinuous Multiobjective Games. *Applicable Analysis*, **102**, 4899-4908. https://doi.org/10.1080/00036811.2022.2147066

[20] Anh, L.Q., Anh, N.T., Duoc, P.T., *et al*. (2022) The Connectedness of Weakly and Strongly Efficient Solution Sets of Nonconvex Vector Equilibrium Problems. *Applied Set-Valued Analysis Optimization*, **4**, 109-127. https://doi.org/10.23952/asvao.4.2022.1.08

[21] Yu, J., Yang, H. and Yu, C. (2009) Structural Stability and Robustness to Bounded Rationality for Non-Compact Cases. *Journal of Global Optimization*, **44**, 149-157. https://doi.org/10.1007/s10898-008-9316-8

[22] 俞建. 有限理性与博弈论中平衡点集的稳定性[M]. 北京: 科学出版社, 2017.