Operations Research and Fuzziology 运筹与模糊学, 2024, 14(2), 63-70
Published Online April 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/orf
https://doi.org/10.12677/orf.2024.142112

模糊*S*-拟正规嵌入子群的同态性质研究

王　悦[1,2]，闫　焱[1,2*]，阎　熠[1]，商欣茹[1]

[1]华北理工大学理学院，河北 唐山
[2]河北省数据科学与应用重点实验室，河北 唐山

收稿日期：2024年1月10日；录用日期：2024年1月31日；发布日期：2024年4月8日

摘　要

本文在模糊*S*-拟正规子群的基础上提出了模糊*S*-拟正规嵌入子群的概念，利用既约集合套理论对模糊*S*-拟正规嵌入子群进行了研究。首先给出了群的模糊子群是模糊*S*-拟正规嵌入的当且仅当它的水平子集是通常群论意义上的*S*-拟正规嵌入，其次讨论了模糊*S*-拟正规嵌入子群的同态性质，最后将同态性质推广到了模糊*S*-拟正规子群。

关键词

模糊*S*-拟正规嵌入子群，既约集合套，同态

Research on the Homomorphism Properties of Fuzzy *S*-Quasinormally Embedded Subgroups

Yue Wang[1,2], Yan Yan[1,2*], Yi Yan[1], Xinru Shang[1]

[1]College of Science, North China University of Science and Technology, Tangshan Hebei
[2]Hebei Key Laboratory of Data Science and Application, Tangshan Hebei

Received: Jan. 10th, 2024; accepted: Jan. 31st, 2024; published: Apr. 8th, 2024

Abstract

In the paper, based on the fuzzy *S*-quasinormal subgroups, the concept of fuzzy *S*-quasinormally embedded subgroups is proposed and studied by using irreducible nested sets. Firstly, it is given that a fuzzy subgroup of a group is fuzzy *S*-quasinormally embedded if and only if its level subset is

*通讯作者。

文章引用: 王悦, 闫焱, 阎熠, 商欣茹. 模糊 *S*-拟正规嵌入子群的同态性质研究[J]. 运筹与模糊学, 2024, 14(2): 63-70.
DOI: 10.12677/orf.2024.142112

***S*-quasinormally embedded in the usual sense of group theory. Secondly, the homomorphic properties of fuzzy *S*-quasinormally embedded subgroups are discussed. Finally, the homomorphic properties are extended to fuzzy *S*-quasinormal subgroups.**

Keywords

Fuzzy *S*-Quasinormally Embedded Subgroups, Irreducible Nested Sets, Homomorphic

1. 引言

正规子群的研究是有限群研究中重要的一部分，许多学者对子群的正规性进行推广。1939 年 O. Ore 提出了拟正规子群的概念[1]，1962 年 O. Kegel 将拟正规子群的概念进一步弱化得到 *S*-拟正规子群的概念[2]，1998 年 A. Ballester-Bolinches 和 M. C. Pedraza-Aguilera 提出了 *S*-拟正规嵌入子群的概念并证明了 *G* 的每个 Sylow 子群的极大子群在 *G* 中是 *S*-拟正规嵌入的，则 *G* 是超可解的[3]。2001 年 M. Asaad 和 A. A. Heliel 将这个结果推广到包含所有超可解群类 $\mathfrak{U}$ 的饱和群系 $\mathfrak{F}$ [4]，之后在 *G* 的素数幂阶子群在 *G* 中是 *S*-拟正规嵌入的假设下研究了 *G* 的结构[5] [6]，最近利用子群的 *S*-拟正规嵌入性得到了有限群 *p*-幂零性和超可解性的新刻画，推广了关于 *S*-拟正规嵌入子群的一些已知结果[7]。

随着经典代数的迅速发展，形成了一门新的数学分支—模糊代数。1965 年 L. A. Zadeh 给出了模糊子集的定义[8]，1971 年 A. Rosenfeld 提出了模糊子群的定义[9]，1993 年 N. Ajmal 和 K. V. Thomas 将拟正规性的概念推广到模糊集，证明了群的模糊子群是模糊拟正规的当且仅当它的所有水平子集是通常群论意义上的拟正规[10]。2011 年李卫霞等重新定义了模糊 Sylow 子群的概念，进而定义了模糊 *S*-拟正规子群的概念，讨论了其模糊商群的性质[11]，之后利用既约集合套理论引入了模糊 *S*-拟正规子群的概念并研究其同态、同构性质[12]。2015 年何利芳等利用既约集合套理论研究了模糊弱 *S*-置换子群的概念及同态性质[13]，随后余敢华等利用既约集合套理论研究了模糊 *S*-半置换子群的概念及同态性质且在模糊 *S*-拟正规子群上获得了相应结论[14]，2017 年王朗等利用 Zadeh 函数和集合套理论研究了模糊弱 *S*-半置换子群两种定义的等价性及其商群的性质[15]。

本文在此基础之上，对模糊 *S*-拟正规子群进行推广，提出了模糊 *S*-拟正规嵌入子群的概念并研究了其相关性质。

2. 基础知识

如果 G 是有限群，令 $S(G)$ 表示 G 的全体子群的集合，$\tilde{S}(G)$ 表示 G 的全体模糊子群的集合，若 $\mu\in\tilde{S}(G)$，记 $\mu(G)=\left\{\mu(g)\middle|g\in G\right\}$。

定义 1 [8]如果 X 是一个非空的集合，则称函数 $A:X\to[0,1]$ 是 X 的一个模糊子集。

定义 2 [9]设 G 是一个有限群，A 是 G 的模糊子集，如果对于 $\forall x,y\in G$，恒有 1) $A(x,y)\ge A(x)\wedge A(y)$；2) $A(x^{-1})\ge A(x)$ 成立，则称 A 是 G 的一个模糊子群。

定义 3 [16]设 A 是 G 的模糊子集，$\lambda\in[0,1]$，称 $A_\lambda=\left\{x\in G\middle|A(x)\ge\lambda\right\}$ 为 G 的水平子集。

定理 1 [16]设 A 是 G 的模糊子集，则 $A_\lambda=\{x\in G|A(x)\ge\lambda\}(\lambda\in[0,1]且\lambda\le A(e))$ 是 G 的子群的充要条件为 A 是 G 的模糊子群。

定义 4 [17]设 X 是一个论域 [1]，$P(X)$ 是其幂集，$\Gamma\subseteq[0,1]$。若映射 $H:\Gamma\to P(X)$，$\lambda\to H(\lambda)$ 满足 $\lambda\le\mu\Leftrightarrow H(\lambda)\ge H(\mu)$，则称 H 为 X 上的一个集合套，记为 $H_\Gamma=\{H(\lambda)|\lambda\in\Gamma\}$。

若 $\alpha,\beta\in[0,1]$ 时(其中 $\alpha>\beta$)，$\forall\lambda,\mu\in(\beta,\alpha)$ (或者 $[\beta,\alpha)$ 或者 $(\beta,\alpha]$ 或者 $[\beta,\alpha]$)，都有 $H(\lambda)=H(\mu)$，令 $t=\sup\limits_{\lambda\in(\beta,\alpha)}\lambda$，用 $H(\lambda)(\lambda\in(\beta,\alpha))$ 代替 $H(t)$，仍然记为 $H(t)$，同时删去所有的 $H(\lambda)$，于是可以得到一个新的集合套，$H_{\Gamma'}=\{\Gamma'=\Gamma-(\beta,\alpha)\}\cup\{t\}$。

定义 5 [17]如上确定的集合套 $H_{\Gamma'}$ 叫做 H_Γ 的约简集合套，H_Γ 叫做 $H_{\Gamma'}$ 的加细集合套，若 H_Γ 满足：$\forall\lambda,\mu\in\Gamma$，当 $\lambda\ne\mu$ 时，$H(\lambda)\ne H(\mu)$，称 H_Γ 为既约集合套。

下面给出 Sylow p-子群与 Sylow 子群之间的关系如下：

设 G 是有限群，$|G|=p^n m$，p 为素数，$(p,m)=1$，则称 G 中阶为 p^n 的子群为 G 的 Sylow p-子群。Sylow 子群是指所有这样子群的集合，因此 Sylow p-子群是 Sylow 子群的一个子集。

定义 6 [2]设 H 是 G 的子群，P 是 G 的任意一个 Sylow 子群，如果恒有 $HP=PH$ 成立，则称 H 在 G 中是 S-拟正规的。

定义 7 [11]设 μ 是 G 的一个模糊子群，μ_Γ 是 μ 在 G 中的一个既约集合套，且有

$$\mu_\Gamma:\mu^0\le\cdots\le\mu_\lambda\le\mu_u\le\mu_\omega\le\cdots\left(\mu^e=\{x\in G|\mu(x)=\mu(e)\}\right)$$

若 μ^e 是 G 的 Sylow 子群，则称 μ 是 G 的模糊 Sylow 子群。特殊地，如果 μ^e 是 G 的 Sylow p-子群，则称 μ 是 G 的模糊 Sylow p-子群。

定义 8 [11]设 ω 是 G 的一个模糊子群，μ 是 G 的任意一个模糊 Sylow 子群，如果恒有 $\omega\mu=\mu\omega$ 成立，则称 ω 为 G 的一个模糊 S-拟正规子群。

定义 9 [12]设 H 是 G 的模糊子群，H_Γ 为 H 的既约集合套，$H(\lambda)\in H_\Gamma$，如果对于 $\forall\lambda\in\Gamma$，$H(\lambda)$ 为 G 的 S-拟正规子群，则称 H 是 G 的模糊 S-拟正规子群。

3. 模糊 S-拟正规嵌入子群的概念及性质

基于模糊 S-拟正规子群的定义，给出了模糊 S-拟正规嵌入子群的概念，并利用既约集合套理论对其进行研究。

定义 10 [3]设 G 是有限群，H 是 G 的子群，如果对于整除 H 的阶的每个素数 p，H 的 Sylow p-子群也是 G 的某个 S-拟正规子群的 Sylow p-子群，则称 H 为 G 的 S-拟正规嵌入子群。

由定义很容易得到每个 S-拟正规子群都是 S-拟正规嵌入的，但反之不成立。下面给出 S-拟正规嵌入子群的性质。

引理 1 [3]设 U 是 G 的 S-拟正规嵌入子群，$H\le G$ 且 K 是 G 的正规子群，则

1) 如果 $U\le H$，则 U 是 H 的 S-拟正规嵌入子群；
2) UK 是 G 的 S-拟正规嵌入子群且 UK/K 是 G/K 的 S-拟正规嵌入子群；
3) 如果 $K\le H$ 且 H/K 是 G/K 的 S-拟正规嵌入子群，则 H 是 G 的 S-拟正规嵌入子群。

定义 11 设 G 是有限群，H 是 G 的模糊子群，如果对于整除 H 的阶的每个素数 p，H 的模糊 Sylow p-子群也是 G 的某个模糊 S-拟正规子群的模糊 Sylow p-子群，则称 H 为 G 的模糊 S-拟正规嵌入子群。

[1]在一个逻辑系统中，所有的个体组成的集合，称为个体域，亦称论域。其中个体指独立存在于客观世界的事物，个体可以是具体的，也可以是抽象的，它们可以用专有名词来指称。

定义 12 设 G 是有限群，H 是 G 的模糊子群，H_Γ 为 H 的既约集合套，$H(\lambda)\in H_\Gamma$，$\Gamma\subseteq[0,1]$，$\forall\lambda\in\Gamma$，$H(\lambda)$ 为 G 的 S-拟正规嵌入子群，则称 H 为 G 的模糊 S-拟正规嵌入子群。

事实上，定义 11 与定义 12 是等价的。一方面，设 H 是由定义 11 给出的模糊 S-拟正规嵌入子群，则 $\forall\alpha\in[0,1]$，H_α 是 G 的 S-拟正规嵌入子群，取 $\Gamma\subseteq[0,1]$，且满足 $H:\Gamma\to H(\lambda)$，$H(\lambda)=H_\lambda$。对于 $\forall\lambda\in\Gamma$，H_λ 是 G 的 S-拟正规嵌入子群，则 $H(\lambda)$ 是 G 的 S-拟正规嵌入子群，又因为 $H=\bigcup_{\lambda\in\Gamma}\lambda H(\lambda)$，所以可得 H 是 G 的模糊 S-拟正规嵌入子群。

另一方面，设 H 是由定义 12 给出的模糊 S-拟正规嵌入子群，即 $\exists H\in H_\Gamma$，$H=\bigcup_{\lambda\in\Gamma}\lambda H(\lambda)$，对于 $\forall\lambda\in\Gamma$，$H(\lambda)$ 为 G 的 S-拟正规嵌入子群。又因为 $\forall\lambda\in\Gamma$，$H_\lambda=\bigcap_{\alpha<\lambda}H(\lambda)=\bigcap\left\{H(\alpha)\middle|0<\alpha<\lambda\right\}$，即 H_λ 是 G 的 S-拟正规嵌入子群，则可得 H 是 G 的模糊 S-拟正规嵌入子群。

下面给出集合 A 的特征函数的概念如下：

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A\\ 0, & x\notin A\end{cases}$$

则称 χ_A 为集合 A 的特征函数。

下面的定理讨论了 S-拟正规嵌入性与模糊 S-拟正规嵌入性之间的转化。

定理 2 设 A 是 G 的 S-拟正规嵌入子群当且仅当 A 的特征函数 χ_A 是 G 的模糊 S-拟正规嵌入子群。

证明：“$\Rightarrow$”设 A 的特征函数 χ_A 的既约集合套为 $\chi_A=\bigcup_{\lambda\in\Gamma}\lambda\chi_A(\lambda)$，$\Gamma$ 为二元集 $\{0,1\}$，其中 $\chi_A(0)=A$，$\chi_A(1)=A$。因为 A 是 G 的 S-拟正规嵌入子群，则 $\chi_A(0)$ 和 $\chi_A(1)$ 是 G 的 S-拟正规嵌入子群，则 A 的特征函数 χ_A 是 G 的模糊 S-拟正规嵌入子群。

“$\Leftarrow$”因为 χ_A 是 G 的模糊 S-拟正规嵌入子群，A 的特征函数 χ_A 的既约集合套为 $\chi_A=\bigcup_{\lambda\in\Gamma}\lambda\chi_A(\lambda)$，$\Gamma=\{0,1\}$，则 $\chi_A(0)$ 和 $\chi_A(1)$ 是 G 的 S-拟正规嵌入子群，即 $A=\chi_A(0)$，$A=\chi_A(1)$ 是 G 的 S-拟正规嵌入子群。

定理 3 设 μ 是 G 的模糊子群，μ_λ 是 μ 在 G 中的水平子集 $\left(\lambda\in\left[0,\mu(e)\right]\right)$，$\mu$ 是 G 的模糊 S-拟正规嵌入子群，当且仅当 μ_λ 是 G 的 S-拟正规嵌入子群。

证明：“$\Leftarrow$”若 μ_λ 是 G 的 S-拟正规嵌入子群，由 $\mu:\Gamma\to\mu(\lambda)$ 可得 $\mu(\lambda)=\mu_\lambda$，所以 $\mu(\lambda)$ 是 G 的 S-拟正规嵌入子群，则 $\mu=\bigcup_{\lambda\in\Gamma}\lambda\mu(\lambda)$ 是 G 的模糊 S-拟正规嵌入子群。

“$\Rightarrow$”由 $\mu=\bigcup_{\lambda\in\Gamma}\lambda\mu(\lambda)$，因为 μ 是 G 的模糊 S-拟正规嵌入子群，所以 $\mu(\lambda)$ 是 G 的 S-拟正规嵌入子群。$\forall\lambda\in\Gamma$，$\mu_\lambda=\bigcap_{\alpha<\lambda}\mu(\lambda)=\bigcap\left\{\mu(\alpha),0<\alpha<\lambda\right\}$，则 μ_λ 是 G 的 S-拟正规嵌入子群。

下面利用上述结论，基于模糊 S-拟正规子群继续研究模糊 S-拟正规嵌入子群的性质。

引理 2 [11]设 A 与 B 均是 G 的 S-拟正规子群，则 $A\cap B$ 是 G 的 S-拟正规子群。

定理 4 设 A 与 B 均是 G 的模糊 S-拟正规子群，则 $A\cap B$ 是 G 的模糊 S-拟正规嵌入子群。

证明：因为 A 与 B 均是 G 的模糊 S-拟正规子群，$\forall\lambda\in[0,1]$，A_λ,B_λ 是 G 的 S-拟正规子群，$(A\cap B)_\lambda=A_\lambda\cap B_\lambda$ 是 G 的 S-拟正规子群，也是 G 的 S-拟正规嵌入子群，则 $A\cap B$ 是 G 的模糊 S-拟正规嵌入子群。

引理 3 [13]设 A 与 B 均是 G 的 S-拟正规子群，则 AB 是 G 的 S-拟正规子群。

定理 5 设 A 与 B 均是 G 的模糊 S-拟正规子群，则 AB 是 G 的模糊 S-拟正规嵌入子群。

证明：因为 A 与 B 均是 G 的模糊 S-拟正规子群，$\forall\lambda\in[0,1]$，A_λ,B_λ 是 G 的 S-拟正规子群，$(AB)_\lambda=A_\lambda B_\lambda$

是 G 的 S-拟正规子群，也是 G 的 S-拟正规嵌入子群，则 AB 是 G 的模糊 S-拟正规嵌入子群。

定理 6 G 为有限群，H 是 G 的模糊子群，$H=\bigcup\limits_{\lambda\in[0,1]}\lambda H(\lambda)$，对于 $\forall\lambda\in[0,1]$，如果 $H(\lambda)$ 是 G 的 S-拟正规子群，则 H 为 G 的模糊 S-拟正规嵌入子群。

证明：设 $\tilde{K}$ 是 G 的模糊子群，对于 $\forall\lambda\in[0,1]$，令 $H:[0,1]\to S(G)$，$H(\lambda)=\tilde{K}_\lambda$，则 $\tilde{K}=\bigcup\limits_{\lambda\in[0,1]}\lambda H(\lambda)$。由 $H(\lambda)$ 是 G 的 S-拟正规子群，则 $\tilde{K}_\lambda$ 是 G 的 S-拟正规子群，也是 G 的 S-拟正规嵌入子群，则 $\tilde{K}$ 是 G 的模糊 S-拟正规嵌入子群，所以 H 是 G 的模糊 S-拟正规嵌入子群。

定义 13 G 为有限群，H，U 是 G 的模糊子群，$H\le U$。如果 $\forall\lambda\in[0,1]$，H_λ 是 U_λ 的 S-拟正规嵌入子群，则称 H 是 U 的模糊 S-拟正规嵌入子群。

定理 7 设 H 是 G 的模糊 S-拟正规嵌入子群，如果 $H\le U\le G$，则 H 是 U 的模糊 S-拟正规嵌入子群。

证明：H 是 G 的模糊 S-拟正规嵌入子群，$\forall\lambda\in[0,1]$，H_λ 是 G 的 S-拟正规嵌入子群。由 $H\le U\le G$ 可得 $H_\lambda\le U_\lambda\le G$，由引理 1(1)可得 H_λ 是 U_λ 的 S-拟正规嵌入子群，由定义 13 可以得到 H 是 U 的模糊 S-拟正规嵌入子群。

4. 模糊 S-拟正规嵌入子群的同态性质

利用既约集合套理论对模糊 S-拟正规嵌入子群的同态性质进行研究，将条件转化为模糊 S-拟正规子群结论仍成立。

定义 14 [18]设 $f:G\to G'$ 为一个群同态，A 和 B 分别为 G 和 G' 的模糊子群。如果 $f(A)\le B$ 且 f 为满同态，则称模糊子群 A 与 B 同态，记为 $A\sim B$；如果 $f(A)=B$ 且 f 为同构映射，则称模糊子群 A 与 B 同构，记为 $A\cong B$。

定理 8 [19] f 是群 G 到群 G' 的同态满射，则：

1)如果 H 是 G 的一个模糊子群，则 $f(H)$ 是 G' 的模糊子群；

2) 如果 N 是 G 的一个模糊正规子群，则 $f(N)$ 是 G' 的模糊正规子群，且 $G/N\sim G'/f(N)$ (满同态)。

定理 9 [19] f 是群 G 到群 G' 的同态满射，则：

1) 如果 H' 是 G' 的一个模糊子群，则 $f^{-1}(H')$ 是 G 的模糊子群；

2) 如果 N' 是 G' 的一个模糊正规子群，则 $f^{-1}(N')$ 是 G 的模糊正规子群，且 $G/f^{-1}(N')\sim G'/N'$ (满同态)。

定义 15 [19]设 H 是 G 的一个模糊子群，称 H_{λ_e} 为 H 的拟核，简记为 H_e，其中 $\lambda_e=H(e)$。

定理 10 [19]设 N 是 G 的一个模糊正规子群，则 N_e 是 G 的正规子群，G/N 为 G 关于模糊正规子群 N 的模糊商群，则 $G/N\cong G/N_e$。

由模糊 S-拟正规子群和模糊 S-拟正规嵌入子群的定义可知，H 为 G 的模糊 S-拟正规子群，则 H 为 G 的模糊 S-拟正规嵌入子群，所以将下列同态性质定理推广到模糊 S-拟正规子群结论仍成立。

定理 11 设 H 是 G 的模糊 S-拟正规嵌入子群，N 为 G 的模糊正规子群，则 H 关于 N 的模糊商群 H/N 是 G/N 的模糊 S-拟正规嵌入子群。

证明：由 $H/N=\bigcup\limits_{\lambda\in\Gamma}\lambda(H_\lambda/N)$，$H_\lambda/N$ 是 H/N 的既约集合套。若 H 为 G 的模糊 S-拟正规嵌入子群，对于 $\forall\lambda\in\Gamma$，H_λ 是 G 的 S-拟正规嵌入子群。设 $f:G\to G/N$ 是同态满射，令 $f:h\mapsto hN$，对于 $\forall\lambda\in\Gamma$，$f(H_\lambda)=H_\lambda/N$ 是 G/N 的 S-拟正规嵌入子群，所以 H/N 是 G/N 的模糊 S-拟正规嵌入子群，$H_\lambda\to f(H_\lambda)$ 是同态满射，所以 $H\to H/N$ 是同态满射。

推论 1 设 H 是 G 的模糊 S-拟正规子群，N 为 G 的模糊正规子群，则 H 关于 N 的模糊商群 H/N 是 G/N 的模糊 S-拟正规嵌入子群。

定理 12 设 H 是 G 的模糊 S-拟正规嵌入子群，N 为 G 的模糊正规子群，则有 HN/N 是 G/N 的模糊 S-拟正规嵌入子群。

证明：设 $f:G\to G/N$ 是同态满射，令 $f:h\mapsto hN$。因为 H 是 G 的模糊 S-拟正规嵌入子群，N 为 G 的模糊正规子群，对于 $\forall\lambda\in[0,1]$，H_λ 是 G 的 S-拟正规嵌入子群，N_λ 是 G 的正规子群，由引理 1(2)可得 $H_\lambda N_\lambda$ 是 G 的 S-拟正规嵌入子群，即 $(HN)_\lambda=H_\lambda N_\lambda$ 是 G 的 S-拟正规嵌入子群，所以 HN 是 G 的模糊 S-拟正规嵌入子群。由定理 11 可知 $f(HN)=(HN)/N$ 是 G/N 的模糊 S-拟正规嵌入子群。

推论 2 设 H 是 G 的模糊 S-拟正规子群，N 为 G 的模糊正规子群，则 HN/N 是 G/N 的模糊 S-拟正规嵌入子群。

定理 13 设 N 为 G 的模糊正规子群，M 为 G 的模糊子群，且有 $N\le M$，如果 M/N 是 G/N 的模糊 S-拟正规嵌入子群，则 M 为 G 的模糊 S-拟正规嵌入子群。

证明：设 $f:G\to G/N$ 是同态满射，令 $f:h\mapsto hN$，可得 $f^{-1}(M/N)=M$，由 $M=\bigcup_{\lambda\in\Gamma}\lambda M_\lambda$，$\{M_\lambda\}$ 是 M 的既约集合套，若 M/N 是 G/N 的模糊 S-拟正规嵌入子群，对于 $\forall\lambda\in\Gamma$，M_λ/N 是 G/N 的 S-拟正规嵌入子群。因为 f 是同态满射，所以 M_λ 是 G 的 S-拟正规嵌入子群，即 M 是 G 的模糊 S-拟正规嵌入子群。

推论 3 设 N 为 G 的模糊正规子群，M 为 G 的模糊子群，且 $N\le M$，如果 M/N 是 G/N 的模糊 S-拟正规子群，则 M 为 G 的模糊 S-拟正规嵌入子群。

定理 14 设 H 为 G 的模糊 S-拟正规嵌入子群，$f:G\to G'$ 为同态满射，则 $f(H)$ 是 G' 的模糊 S-拟正规嵌入子群，且 $H\to f(H)$ 是同态满射。

证明：由 $f(H)=\bigcup_{\lambda\in\Gamma}\lambda f(H_\lambda)$，则 $f(H_\lambda)$ 是 $f(H)$ 的既约集合套。如果 H 为 G 的模糊 S-拟正规嵌入子群，对于 $\forall\lambda\in\Gamma$，H_λ 是 G 的 S-拟正规嵌入子群。因为 $f:G\to G'$ 是同态满射，所以有 $f(H_\lambda)$ 是 G' 的 S-拟正规嵌入子群，即 $f(H)$ 是 G' 的模糊 S-拟正规嵌入子群。对于 $\forall\lambda\in\Gamma$，$H_\lambda\to f(H_\lambda)$ 是同态满射，所以 $H\to f(H)$ 是同态满射。

推论 4 设 H 为 G 的模糊 S-拟正规子群，$f:G\to G'$ 为同态满射，则 $f(H)$ 是 G' 的模糊 S-拟正规嵌入子群，且 $H\to f(H)$ 是同态满射。

定理 15 设 $f:G\to G'$ 是同态满射，若 H 是 G' 的模糊 S-拟正规嵌入子群，则 $f^{-1}(H)$ 是 G 的模糊 S-拟正规嵌入子群，且 $f^{-1}(H)$ 到 H 是同态满射。

证明：由 $f^{-1}(H)=\bigcup_{\lambda\in\Gamma}\lambda f^{-1}(H_\lambda)$，$\{f^{-1}(H_\lambda),\lambda\in\Gamma\}$ 是 $f^{-1}(H)$ 的既约集合套，若 H 为 G' 的模糊 S-拟正规嵌入子群，对于 $\forall\lambda\in\Gamma$，H_λ 为 G' 的 S-拟正规嵌入子群，$f:G\to G'$ 是同态满射，所以 $f^{-1}(H_\lambda)$ 是 G 的 S-拟正规嵌入子群，$f^{-1}(H)$ 是 G 的模糊 S-拟正规嵌入子群。对于 $\forall\lambda\in\Gamma$，$f^{-1}(H_\lambda)\to H_\lambda$ 是同态满射，即 $f^{-1}(H)\to H$ 是同态满射。

推论 5 设 $f:G\to G'$ 是同态满射，若 H 是 G' 的模糊 S-拟正规子群，则 $f^{-1}(H)$ 是 G 的模糊 S-拟正规嵌入子群，且 $f^{-1}(H)$ 到 H 是同态满射。

定义 16 [19]设 A 为 G 的模糊子群，I 为 G 的模糊正规子群，则称 A/I 为模糊子群 A 关于模糊正规子群 I 的模糊商群，A/I 由下列模糊商群套唯一确定：

$$A/I:\cdots\le A_\lambda/I\le A_\mu/I\le\cdots\le A_\omega/I\le\cdots(\cdots\ge\lambda\ge\mu\ge\cdots\ge\omega\ge\cdots)$$

定理 16 设 A 为 G 的模糊 S-拟正规嵌入子群，K 与 N 为 G 的模糊正规子群，$K\subseteq N\subseteq A$，有 $A/N\cong(A/K)/(N/K)$。

证明：因为 $K\subseteq N\subseteq A$，所以 N/K 是 A/K 的模糊正规子群，由既约模糊商群套可得：

$$\cdots \le (A/K)_{\lambda}/(N/K) \le (A/K)_{\mu}/(N/K) \le \cdots \le (A/K)_{\omega}/(N/K) \le \cdots$$

$\forall \lambda \in [0,1]$，$(A/K)_{\lambda} = A_{\lambda}/K$，由定理 10 可以得到 $A_{\lambda}/K \cong A_{\lambda}/K_e$，对于 $\forall \lambda \in [0,1]$，有 $(A/K)_{\lambda}/(N/K) \cong (A_{\lambda}/K_e)/(N/K) \cong (A_{\lambda}/K_e)/(N/K)_e \cong (A_{\lambda}/K_e)/(N_e/K) \cong (A_{\lambda}/K_e)/(N_e/K_e) \cong A_{\lambda}/N_e$ 成立。所以可以得到 $(A/K)_{\lambda}/(N/K) \cong A_{\lambda}/N_e$，又因为 $(A/K)_{\lambda}/(N/K) = ((A/K)/(N/K))_{\lambda}$ 且有 $A_{\lambda}/N_e \cong A_{\lambda}/N = (A/N)_{\lambda}$，所以有 $((A/K)/(N/K))_{\lambda} \cong (A/N)_{\lambda}$，即可得 $A/N \cong (A/K)/(N/K)$。

定理 17 设 A 为 G 的模糊 S-拟正规嵌入子群，I 为 G 的模糊正规子群，f 为 $G \to G'$ 的同态满射，如果 I 在核 $Ker\ f$ 上不变，则 $A/I \cong f(A)/f(I)$。

证明：由既约模糊商群套可得：

$$A/I: \cdots \le A_{\lambda}/I \le A_{\mu}/I \le \cdots \le A_{\omega}/I \le \cdots$$

$$f(A)/f(I): \cdots \le f(A)_{\lambda}/f(I) \le f(A)_{\mu}/f(I) \le \cdots \le f(A)_{\omega}/f(I) \le \cdots$$

由于 $\forall \lambda \in [0,1]$，$(A/I)_{\lambda} \cong A_{\lambda}/I$，且 f 为 $G \to G'$ 的同态满射，即 $A_{\lambda}/I \cong f(A_{\lambda})/f(I) = f(A)_{\lambda}/f(I)$，所以 $A/I \cong f(A)/f(I)$。

定理 18 设 A' 为 G' 的模糊 S-拟正规嵌入子群，I' 为 G' 的模糊正规子群，f 为 $G \to G'$ 的同态满射，则 $f^{-1}(A')/f^{-1}(I') \cong A'/I'$。

证明：因为 f 为 $G \to G'$ 的同态满射，所以 $f^{-1}(I')$ 在核 $\ker f$ 上不变，有 $f\left(f^{-1}(A')\right) = A'$，$f\left(f^{-1}(I')\right) = I'$，由定理 17 可得 $f^{-1}(A')/f^{-1}(I') \cong A'/I'$。

5. 结论

有限群的 S-拟正规嵌入性对于研究有限群的结构具有重要意义。本文给出了模糊 S-拟正规嵌入子群的概念，同时研究了模糊 S-拟正规嵌入子群的同态性质，使得模糊代数的相关理论更加丰富。模糊 S-拟正规嵌入性的研究对有限群的结构也应具有重要影响，所以模糊群论中还有许多内容值得我们深入研究。

基金项目

国家自然科学基金面上项目“结构数学在现代数学中的渗透与应用”(项目编号：12171137)。

参考文献

[1] Ore, O. (1939) Contributions to the Theory of Groups of Finite Order. *Duke Mathematical Journal*, **5**, 431-460. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-39-00537-5

[2] Kegel, O.H. (1962) Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen. *Mathematische Zeitschrift*, **78**, 205-221. https://doi.org/10.1007/BF01195169

[3] Ballester-Bolinches, A. and Pedraza-Aquilera, M.C. (1998) Sufficient Conditions for Supersolvability of Finite Groups. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **127**, 113-118. https://doi.org/10.1016/S0022-4049(96)00172-7

[4] Asaad, M. and Heliel, A.A. (2001) On S-Quasinormally Embedded Subgroups of Finite Groups. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **165**, 129-135. https://doi.org/10.1016/S0022-4049(00)00183-3

[5] Li, S.R. and He, X.L. (2008) On Normally Embedded Subgroups of Prime Power Order in Finite Groups. *Communications in Algebra*, **36**, 2333-2340. https://doi.org/10.1080/00927870701509370

[6] Yu, H.R., Xu, X.W. and Zhang, G.H. (2022) A Note on S-Semipermutable and S-Permutably Embedded Subgroups of Finite Groups. *Ricerche di Matematica*. https://doi.org/10.1007/s11587-022-00717-1

[7] Zheng, W.C., Cui, L., Meng, W., *et al*. (2023) On NH-Embedded and S-Quasinormally Embedded Subgroups of Finite Groups. *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, **17**, 67-73. https://doi.org/10.1007/s40574-023-00379-3

[8] Zadeh, L.A. (1965) Fuzzy Sets. *Information and Control*, **68**, 338-353. https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X

[9] Rosenfeld, A. (1971) Fuzzy Groups. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **35**, 512-517. https://doi.org/10.1016/0022-247X(71)90199-5

[10] Ajmal, N. and Thomas, K.V. (1993) Quasinormality and Fuzzy Subgroups. *Fuzzy Sets and Systems*, **58**, 217-225. https://doi.org/10.1016/0165-0114(93)90497-6

[11] 李卫霞, 张诚一. 模糊 S-拟正规子群[J]. 模糊系统与数学, 2011, 25(6): 69-74.

[12] 李卫霞, 邹春平, 张诚一. 模糊 S-拟正规子群及其同态与同构[J]. 模糊系统与数学, 2012, 26(3): 58-62.

[13] 何利芳, 陈奕娟, 张诚一. 模糊弱 S-置换子群[J]. 模糊系统与数学, 2015, 29(1): 59-64.

[14] 余敢华, 王朗, 张诚一. 模糊 S-半置换子群的同态性质[J]. 模糊系统与数学, 2017, 31(2): 22-28.

[15] 王朗, 余敢华, 张诚一. 模糊弱 S-半置换子群及其商群[J]. 模糊系统与数学, 2017, 31(3): 37-43.

[16] Sivaramakrishna, D.P. (1981) Fuzzy Group and Levels Subgroups. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **84**, 264-269. https://doi.org/10.1016/0022-247X(81)90164-5

[17] 张诚一. Fuzzy 子环的商环与直积[J]. 模糊系统与数学, 1993, 7(1): 93-100.

[18] 张桂生. L-fuzzy 群的同态和同构[J]. 模糊系统与数学, 1996, 10(2): 19-23.

[19] 罗承忠. 集合套与 Fuzzy 子群[J]. 北京师范大学学报: 自然科学版, 1986(4): 1-5.