Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(3), 100-104
Published Online March 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.143089

一道中考压轴题的数形解析

罗 洁

新疆师范大学数学科学学院，新疆 乌鲁木齐

收稿日期：2024年2月10日；录用日期：2024年3月22日；发布日期：2024年3月29日

摘 要

平面几何与函数内容是初中数学的重要组成部分，考察学生的理解能力、应用能力以及解决问题的能力。本题是一道综合性较高的平面几何和函数的综合题，理清问题的本质即可解决问题。

关键词

函数，平面几何，数形结合

The Number Form Analysis of the Final Question of a Senior High School Examination

Jie Luo

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: Feb. 10th, 2024; accepted: Mar. 22nd, 2024; published: Mar. 29th, 2024

Abstract

Plane geometry and function content is an important part of junior high school mathematics, examining students' understanding ability, application ability and problem solving ability. This problem is a comprehensive problem of plane geometry and function, which can be solved by clarifying the essence of the problem.

Keywords

Function, Plane Geometry, Number Form Association

文章引用: 罗洁. 一道中考压轴题的数形解析[J]. 理论数学, 2024, 14(3): 100-104.
DOI: 10.12677/pm.2024.143089

1. 引言

《义务教育数学课程标准》(2022 年修订)明确提出要培养学生数学核心素养，使学生学会用数学眼光观察现实世界，用数学思维思考现实世界，用数学语言表达现实世界，明确提出培养学生抽象能力、运算能力、推理能力、空间观念、数据观念、模型观念、应用意识、创新意识、几何直观[1]。新课标中三维目标被核心素养所取代，数学核心素养被提升到了新的高度[2]。简而言之，学生在面对综合又稍具难度的问题时，能够全面地分析问题、解决问题。

本题选自二次函数与平面几何相关联的综合题目，不同的题目会用所对应的方法[3]，其内涵丰富，解题灵活多样，从各个方面理解题目能够拓深学生思维以及学生触类旁通的能力，以培养学生的核心素养。有助于提高学生的模型思想和触类旁通的能力，培养学生的转化思想，提升学生的数学核心素养[4]。

2. 原题呈现

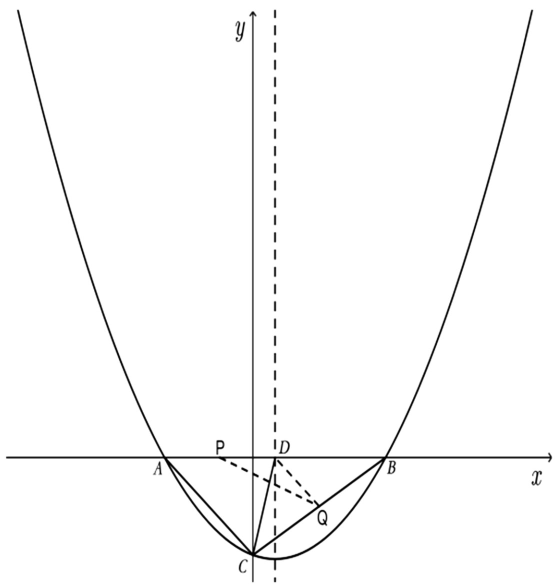

Figure 1. Schematic diagram of parabola
图 1. 抛物线示意图

已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c\left(a > 0\right)$ 的图像经过点 $B\left(12,0\right)$ 和 $C\left(0,-6\right)$，对称轴 $x = 2$ 。如图 1 所示。

(1) 求该抛物线的解析式；

(2) 点 D 在线段 AB 上且 $AD = AC$ ，若动点 P 从 A 出发沿线段 AB 以每秒 1 个单位长度的速度匀速运动，同时另一点 Q 以某一速度从 C 出发沿线段 CB 匀速运动，问是否存在某一时刻，使线段 PQ 被直线 CD 垂直平分？若存在，请求出此时的时间 t (秒)和点 Q 的运动速度；若不存在，请说明理由；

(3) 在(2)的结论下，直线 $x = 1$ 上是否存在点 M，使 $\triangle MPQ$ 为等腰三角形？若存在，请求出所有点 M 的坐标，若不存在，请说明理由。

试题分析：此类型题目属于二次函数综合应用的相关题型，出现在中考压轴题的概率较大，考查学生综合能力(抽象能力、运算能力、推理能力、几何直观等)，可以利用二次函数与一次函数的图像、性质通过代数的方法解决问题。同时作为一道二次函数的综合题，第(2)小问已知条件 $AD=AC$ 将其与几何图形联系起来，即也可利用平行线、中位线等相关知识进行处理。当学生面对此种问题时，可依据代数、图形、数形结合等方法综合考虑，严谨推理，细心计算，方能解决此类问题。

此题第(1)小问较为简单，在此不做分析，抛物线的解析式为 $y=\frac{1}{16}x^2-\frac{1}{4}x-6$。

3. 解法探析

3.1. 解法一：代数法视角

考场上学生见到此种题型，最容易入手考虑的方法多为代数法。用代数法做此种题目，利用二次函数和一次函数的基础知识，同时考查学生运算能力及应变能力。

解决任何问题都须从问题出发，梳理已知条件。根据题目已知即可得知 $A(-8,0)$，$B(12,0)$，$C(0,-6)$，$D(2,0)$，线段 PQ 被直线 CD 垂直平分，其交点为 M (即 $PQ\perp CD$ 且 $PM=QM$)。假设存在 t 时刻，使线段 PQ 被直线 CD 垂直平分，依据题意列出关于未知数 t 的方程即可解。

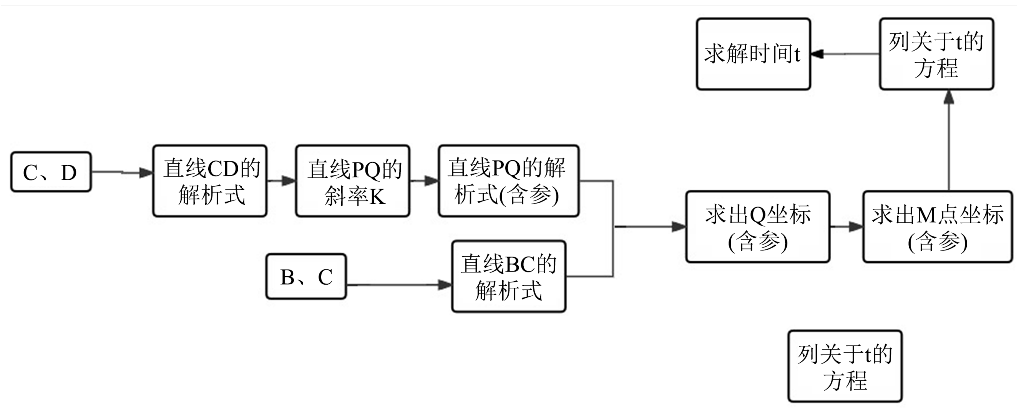

Figure 2. Algebraic solution process
图 2. 代数法求解流程

具体解法(图 2)：由题意知 $B(12,0)$，$C(0,-6)$，$D(2,0)$ 可知直线 CD 的解析式为 $y_{CD}=3x-6$，直线 CB 的解析式为 $y_{CB}=\frac{1}{2}x-6$，由线段 PQ 被直线 CD 垂直平分可设 $y_{PQ}=-\frac{1}{3}x-b$，依题意可设 $P(t-8,0)$，可以得到直线 PQ 含参的解析式 $y_{PQ}=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}(t-8)$，由 $\begin{cases} y_{CB}=\frac{1}{2}x-6 \\ y_{PQ}=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}(t-8) \end{cases}$ 得交点 $Q\left(\frac{2t+20}{5},\frac{t-20}{5}\right)$，由此得到线段 PQ 中点 M 为 $\left(\frac{7t-20}{10},\frac{t-20}{10}\right)$，由 M 在直线 CB 上，带入可得到关于参数 t 的一元一次方程 $\frac{1}{2}\left(\frac{7t-20}{10}\right)=\frac{t-20}{10}$，解得 $t=5$。

将参数反带即可求出 $P(-3,0)$，$Q(6,-3)$，$M\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$。利用两点之间距离公式即可求出线段

$CQ=\sqrt{6^2+(3-6)^2}=3\sqrt{5}$，点 Q 的运动速度为 $V_Q=\frac{CQ}{t}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$。至此第二问解决。

3.2. 解法二：图象法视角

本题作为二次函数的综合题，但也可从图象视角切入。将图像进行剥离，如图 3 所示。由图中 $AD=AC$ 知 $\angle ACD=\angle ADC$，又由线段 PQ 被直线 CD 垂直平分知 $\angle ADC=\angle CDQ$，因此等量代换知 $\angle ACD=\angle CDQ$，由此可推出 $DQ \parallel AC$。由 D 为 AB 的中点，可进而推出 Q 为 CB 的中点，因此 Q 点的坐标为 $(6,-3)$。

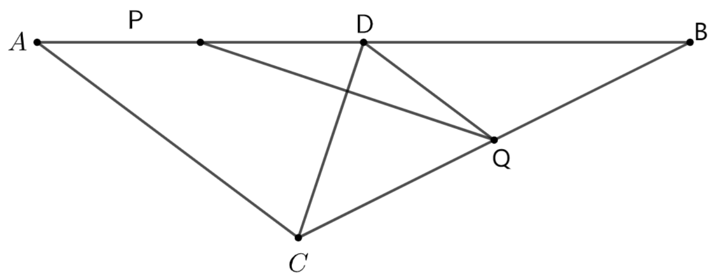

Figure 3. Image method
图 3. 图像法

通过已有条件可以推出 $DQ=DP=\sqrt{(6-2)^2+(3-0)^2}=5$，因此 $AP=AD-DP=10-5=5$。由动点 P 从 A 出发沿线段 AB 以每秒 1 个单位长度的速度匀速运动知，动点 P 运动的时间 $t=5\text{ s}$。由 $C(0,-6)$，$Q(6,-3)$ 知，$CQ=\sqrt{6^2+(3-6)^2}=3\sqrt{5}$，$V_Q=\frac{CQ}{t}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$.至此问题解决。

3.3. 关于第(2)的综合分析

通过函数的教学，通过对现实问题中变量的分析，建立两个变量之间变化的依赖关系，让学生理解用函数表达变化关系的实际意义；要引导学生借助平面直角坐标系中点线的关系，对所求问题进行分析解答。

通过掌握图形的基本事实和性质，使学生对“图形的变化”有着深刻的理解，从运动变化的观点来研究图形，同时也可从代数的方法研究图形，以解决实际问题。本小题需解决的问题较为灵活，既可以从代数视角进行求解，又可以从几何图形视角进行求解，当然学生在解决此种问题时还可以利用代数和几何视角综合思考此题。教师在讲解的过程中可以从各个方面进行，既可提高学生学习数学的兴趣，又可拓展学生学习的思维。在完全掌握此题后，引导学生对解题方法进行反思和总结。

数学是一门数形并存的学科，教师在平时的教学当中，既要重视学生的函数基础知识、代数综合计算能力的培养，也要关注学生几何直观能力，抽象能力和推理能力。

3.4. 关于第(3)小问的解析

此小问情况较多，解决问题时力求不缺不漏，因此找到三角形 $\triangle MPQ$ 三个顶点的坐标，求出其每条边长，分类讨论即可。

由题意知，$P(-3,0)$，$Q(6,-3)$，由 M 在对称轴 $x=1$ 上可是设 $M(1,m)$，三边分别为 $PQ=3\sqrt{10}$，$MQ=\sqrt{25+(3+m)^2}$，$MP=\sqrt{4+m^2}$。对等腰 $\triangle MPQ$ 的两腰进行分类讨论：第①种情况：$PQ=MQ$，

即 $25+(m+3)^2=90$，解得 $m_1=\sqrt{65}-3$ 或 $m_2=-\sqrt{65}-3$。

第②种情况：$PQ=MP$，即 $16+m^2=90$，解得 $m_3=\sqrt{74}$ 或 $m_4=-\sqrt{74}$。

第③种情况：$MQ=MP$，即 $25+(3+m)^2=16+m^2$，解得 $m_5=-3$。

因此，$M\left(1,\sqrt{65}-3\right)$ 或 $\left(1,-\sqrt{65}-3\right)$ 或 $\left(1,\sqrt{74}\right)$ 或 $\left(1,-\sqrt{74}\right)$ 或 $(1,-3)$。

4. 小结

本题从几何与代数视角对所求问题进行解析，此题也可利用数形结合法进行解决问题，在理解与计算方面更加的简单。在解决此类问题的同时可以让学生将这些知识联系起来，加以巩固，并且对培养学生的直观想象和发散性思维有很大帮助。同时，对此类综合问题的深入理解，可以激发学生自主思考与探索创新意识，发展其抽象能力和创新思维，以促进学生解决问题。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2020.

[2] 白华贤. 高中数学核心素养培养路径探讨——评《基于高中数学核心素养的教学设计与反思》[J]. 中国教育学刊, 2023(4): 144.

[3] 杨子圣. 高中数学教育重在培养数学能力与数学思想等核心素养[J]. 人民教育, 2022(23): 77-78.

[4] 程华. 从“一题多解”审思解题教学的思维培养[J]. 数学通报, 2020, 59(8): 50-54.