Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(3), 158-163
Published Online March 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.143095

Hans汉斯

基于矩阵元素的广义逆的计算及应用

施　旭，尤　兰

盐城工学院数理学院，江苏　盐城

收稿日期：2024年2月5日；录用日期：2024年3月22日；发布日期：2024年3月29日

摘　要

结合广义逆矩阵的定义和性质，利用矩阵的元素表示其广义逆及左逆和右逆。计算一些具体矩阵的广义逆及左逆和右逆，并比较了这些广义逆的区别。

关键词

广义逆，左逆，右逆，Moore-Penrose方程

Calculation and Application of Generalized Inverse Based on Matrix Elements

Xu Shi, Lan You

College of Mathematics and Science, Yancheng Institute of Technology, Yancheng Jiangsu

Received: Feb. 5th, 2024; accepted: Mar. 22nd, 2024; published: Mar. 29th, 2024

Abstract

Combined with the definition and properties of the generalized inverse of matrix, the generalized inverses, left inverses and right inverses of a matrix are represented by the elements of the matrix. The generalized inverses, left inverses and right inverses of some special matrices are calculated, and the differences of these generalized inverses are compared.

Keywords

Generalized Inverse, Left Inverse, Right Inverse, Moore-Penrose Equation

文章引用: 施旭, 尤兰. 基于矩阵元素的广义逆的计算及应用[J]. 理论数学, 2024, 14(3): 158-163.
DOI: 10.12677/pm.2024.143095

1. 引言

矩阵是自然科学、工程技术乃至社会科学中许多领域的一个不可缺少的工具，如可以用矩阵解线性方程组[1] [2]。在高等代数中，我们学习了可逆方阵的逆矩阵的概念，但是当矩阵不是可逆的方阵时，就需要对逆矩阵的概念进行推广，这就是广义逆矩阵。E. H. Moore 于 1920 年首先提出了矩阵的广义逆的概念，对任意矩阵，利用投影矩阵定义了矩阵的唯一的广义逆。但在此之后，广义逆并没有引起重视，直到二十世纪 50 年代，人们开始注意到广义逆与线性方程组解的关系以及一些广义逆的最小二乘性质，才进一步推动了广义逆的研究[1] [3]。特别是 R. Penrose 于 1955 年给出的四个矩阵方程，证明了给定矩阵的 Moore 逆，就是满足这四个方程的唯一矩阵。从此，矩阵广义逆的理论、应用和计算方法的研究开始迅速发展[4] [5] [6] [7] [8]。因此矩阵的广义逆也称为 Moore-Penrose 逆(简称 M-P 逆)。

现在人们普遍使用 R. Penrose 给出的四个方程来定义广义逆矩阵，并且利用这四个方程的一部分定义了各种类型的广义逆矩阵。满足部分 Penrose 方程的广义逆矩阵一共有 15 类，即利用 Penrose 方程组可以给出 15 类广义逆矩阵的定义。国内外对广义逆矩阵的研究不断的深入，而广义逆的具体计算始终是广义逆矩阵理论的一个重要方面，目前主要有满秩分解法、奇异值分解法、Greville 递推法、迭代法、谱分解等等。

矩阵是由一些元素按行列排成的数阵，自然地，其广义逆也完全由这些元素所确定。如何用矩阵的元素表示其广义逆是一个值得探讨的问题。完全用矩阵的元素描述其广义逆是比较复杂的。对可逆的方阵，可以用它的伴随矩阵构造它的逆矩阵。但是对一般的矩阵，这方面依然没有什么结果。本文将在第 3 节中给出矩阵的广义逆用矩阵元素如何刻画，并对一些特殊的矩阵如零矩阵、行(列)矩阵，通过矩阵的元素给出其广义逆。另外矩阵的广义逆定义中的四个方程虽然各不相同，但也不是彼此完全独立的，对于一些特殊的矩阵，这些方程可能是同解的。本文也将在第 3 节与第 4 节中研究这四个方程对应的解，从而寻找这些方程之间的联系。我们也介绍了矩阵的左逆和右逆的定义，计算了一些矩阵的左逆、右逆，并比较广义逆和这些逆的异同，从而对矩阵的广义逆有个直观的了解，为进一步研究同一个矩阵的不同类型的广义逆之间的联系提供帮助。

记 $\mathbb{C}$、$\mathbb{R}$ 分别表示复数域和实数域，本文均是在复数域 $\mathbb{C}$ 上进行讨论。记 $\mathbb{C}^{n\times m}$ 表示 $\mathbb{C}$ 上全体 $n\times m$ 矩阵。除非特别指出，我们对零矩阵一般也用 0 来表示。

2. 定义

对复数域 $\mathbb{C}$ 上的矩阵，E. H. Moore 和 R. Penrose 分别给出了它的广义逆矩阵的定义。这里我们使用 R. Penrose 的定义。

定义 1 设 A 为 $m\times n$ 复矩阵，B 为 $n\times m$ 复矩阵。若满足以下

(1) $ABA = A$，

(2) $BAB = B$，

(3) $(AB)^* = AB$，

(4) $(BA)^* = BA$。

四个条件中的一个或几个，则称 B 为 A 的广义逆矩阵，其中*表示矩阵的共轭转置。这四个矩阵方

程称为 Moore-Penrose 方程(简称为 M-P 方程)。

设 $\{i_1,\cdots,i_s\}\subseteq\{1,2,3,4\}$，对 $m\times n$ 矩阵 A，我们将 A 的满足 M-P 方程 $(i_1),\cdots,(i_s)$ 的广义逆矩阵 B 称为 A 的 $\{i_1,\cdots,i_s\}$ 逆，记作 $B=A^{(i_1,\cdots,i_s)}$ 或 $B\in A\{i_1,\cdots,i_s\}$，这里 $A\{i_1,\cdots,i_s\}$ 表示 A 的全体 $\{i_1,\cdots,i_s\}$ 逆的集合。

显然，不同类别的广义逆共有 15 种，其中常用的有如下几类：满足 M-P 方程(1)的 A 的广义逆矩阵 $A^{(1)}$，简记为 A^-，称为 A 的减号逆；满足 M-P 方程(1)和(2)的 A 的广义逆矩阵 $A^{(1,2)}$，简记为 A_r^-，称为反射逆；满足 M-P 方程(1)和(3)的 A 的广义逆矩阵 $A^{(1,3)}$，简记为 A_l^-，称为最小二乘广义逆；满足 M-P 方程(1)和(4)的 A 的广义逆矩阵 $A^{(1,4)}$，简记为 A_m^-，称为极小范数广义逆；四个 M-P 方程都满足的 A 的广义逆矩阵记作 $A^{(1,2,3,4)}$，简记为 A^+，称为 A 的加号逆或 Moore-Penrose 逆或极小最小二乘逆。

这些广义逆在解各种矩阵方程和矩阵不等式，以及其它地方都有很多用处。

比如加号逆的一个重要的应用是：不可解的线性方程组 $Ax=b$ 的极小最小二乘解为 $x=A^+b$。

对一般的 $m\times n$ 矩阵，也可以定义它的左逆和右逆。

定义 2 设 A 为 $m\times n$ 复矩阵，B 为 $n\times m$ 复矩阵，I 为单位矩阵。若 $AB=I$，则称 A 是右可逆的，B 是 A 的一个右逆，记作 $B=A_R^{-1}$，同时称 B 是左可逆的，A 是 B 的一个左逆，记作 $A=B_L^{-1}$。

显然，对一般的 $m\times n$ 矩阵 A，其左逆和右逆不一定存在。事实上：A 的左逆存在当且仅当 A 的秩等于 n；A 的右逆存在当且仅当 A 的秩等于 m。既使 A 的左逆或右逆存在，也可能不唯一。当 A 是方阵且可逆时，A 的左逆和右逆存在且就是 A 的逆 A^{-1}。

3. 计算

对于简单的一般矩阵，可以直接计算广义逆。当 A 是方阵且可逆时，A 的逆 A^{-1} 也是 A 的任一种广义逆。

但一般矩阵的广义逆的计算比较复杂。每个复矩阵 A 都有唯一的加号逆 A^+，但是其它类型的广义逆不一定唯一。计算给定矩阵的广义逆，有各种各样的方法。如奇异值分解法：若 A 的奇异值分解为 $A=U\begin{pmatrix}\Sigma & O\\ O & O\end{pmatrix}V^*$，则 $A^+=V\begin{pmatrix}\Sigma^{-1} & O\\ O & O\end{pmatrix}U^*$，其中 O 表示零矩阵。再比如满秩分解法：若 A 的满秩分解为 $A=GH$，则 $A^+=H^*\left(HH^*\right)^{-1}\left(G^*G\right)^{-1}G^*$。本文直接从矩阵的元素出发计算广义逆，并且给出一些例子。

显然对任意的 $\{i_1,\cdots,i_s\}\subseteq\{1,2,3,4\}$，有 $A\{i_1,\cdots,i_s\}=A\{i_1\}\cap\cdots\cap A\{i_s\}$。所以为了计算每种广义逆，只要计算出每个 $A\{i\}$ 即可。

定理 1 设 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$，$B=\left(b_{ij}\right)_{n\times m}$，则

(a) $ABA=A$ 当且仅当 $\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{m}a_{is}b_{st}a_{tj}=a_{ij}$，$1\le i\le m$，$1\le j\le n$；

(b) $BAB=B$ 当且仅当 $\sum_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{n}b_{is}a_{st}b_{tj}=b_{ij}$，$1\le i\le n$，$1\le j\le m$；

(c) $\left(AB\right)^*=AB$ 当且仅当 $\sum_{s=1}^{n}\overline{a_{js}}\,\overline{b_{si}}=\sum_{s=1}^{n}a_{is}b_{sj}$，$1\le i,j\le m$；

(d) $\left(BA\right)^*=BA$ 当且仅当 $\sum_{t=1}^{m}\overline{b_{jt}}\,\overline{a_{ti}}=\sum_{t=1}^{m}b_{it}a_{tj}$，$1\le i,j\le n$。

证明：因为 $ABA=\left(a_{is}\right)\left(b_{st}\right)\left(a_{tj}\right)=\left(\sum_{s=1}^{n}a_{is}b_{st}\right)\left(a_{tj}\right)=\left(\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{m}a_{is}b_{st}a_{tj}\right)$，所以(a)得证。其余结论可以类似直接验证。

利用定理 1，我们可以验证

命题 1 如果 $m\times n$ 矩阵 $A=0$，则 $A\{1\}=A\{3\}=A\{4\}=\mathbb{C}^{n\times m}$； $A\{2\}=\{0\}$，即只有 $n\times m$ 零矩阵。

定理 2 设 $A=(a_1,\cdots,a_n)$， $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$，则

(a) $ABA=A$ 当且仅当 $a_1b_1+\cdots+a_nb_n=1$ 或 $A=0$；

(b) $BAB=B$ 当且仅当 $a_1b_1+\cdots+a_nb_n=1$ 或 $B=0$；

(c) $(AB)^*=AB$ 当且仅当 $a_1b_1+\cdots+a_nb_n$ 为实数;

(d) $(BA)^*=BA$ 当且仅当 $B=\lambda A^*$，其中 $\lambda\in\mathbb{R}$ 或 $A=0$。

证明：因为 $AB=a_1b_1+\cdots+a_nb_n$，所以(a), (b), (c)得证。对于(d)，若 $(BA)^*=BA$，因为 $(BA)^*=\left(\overline{b_j}\,\overline{a_i}\right)$，$BA=(b_ia_j)$，所以对任意的 $1\le i,j\le n$，有 $\overline{b_j}\,\overline{a_i}=b_ia_j$。若 $A\ne 0$，则至少存在某个 $a_{i_0}\ne 0$。因此 $b_i=\frac{\overline{b_{i_0}}}{a_{i_9}}\overline{a_i}$，$1\le i\le n$。记 $\lambda=\frac{\overline{b_{i_0}}}{a_{i_9}}$，则 $b_i=\lambda\overline{a_i}$，从而 $B=\lambda A^*$。将 $b_i=\lambda\overline{a_i}$ 代入 $\overline{b_j}\,\overline{a_i}=b_ia_j$，有 $\overline{\lambda}a_j\overline{a_i}=\lambda\overline{a_i}a_j$，从而 $\lambda\in\mathbb{R}$。反之，若 $B=\lambda A^*$，其中 $\lambda\in\mathbb{R}$ 或 $A=0$，显然有 $(BA)^*=BA$。

由定理 2，我们立刻可以得到下面的命题 2 和 3。

命题 2 设 $A=(a_1,\cdots,a_n)\ne 0$，则

(a) $A\{1\}=\left\{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{n\times 1}\middle| a_1b_1+\cdots+a_nb_n=1\right\}$；

(b) $A\{2\}=\left\{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{n\times 1}\middle| a_1b_1+\cdots+a_nb_n=1 \text{或} b_1=\cdots=b_n=0\right\}$；

(c) $A\{3\}=\left\{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{n\times 1}\middle| a_1b_1+\cdots+a_nb_n \text{为实数}\right\}$；

(d) $A\{4\}=\left\{\lambda A^* \middle| \lambda \text{为实数}\right\}$。

所以，此时 $A^+=\frac{1}{\|A\|^2}A^*$，其中 $\|A\|^2=a_1\overline{a_1}+\cdots+a_n\overline{a_n}$。

命题 3 设 $A=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\ne 0$，则

(a) $A\{1\}=\left\{(b_1\cdots b_n)\in\mathbb{C}^{1\times n}\middle| a_1b_1+\cdots+a_nb_n=1\right\}$；

(b) $A\{2\}=\left\{(b_1\cdots b_n)\in\mathbb{C}^{1\times n}\middle| a_1b_1+\cdots+a_nb_n=1 \text{或} b_1=\cdots=b_n=0\right\}$；

(c) $A\{3\}=\left\{\lambda A^* \middle| \lambda \text{为实数}\right\}$；

(d) $A\{4\}=\left\{(b_1\cdots b_n)\in\mathbb{C}^{1\times n}\middle| a_1b_1+\cdots+a_nb_n \text{为实数}\right\}$。

同样此时 $A^{+}=\dfrac{1}{\|A\|^{2}}A^{*}$，其中 $\|A\|^{2}=a_{1}\overline{a_{1}}+\cdots+a_{n}\overline{a_{n}}$。

下面我们再计算一下这两种矩阵的左逆和右逆。

定理 3 设 $A=(a_{1},\cdots,a_{n})\neq 0$，$B=\begin{pmatrix} b_{1}\\ \vdots\\ b_{n}\end{pmatrix}\neq 0$，$n\geq 2$，则 A 只有右逆而没有左逆，B 只有左逆而没有右逆，并且 $B=A_{R}^{-1}$ 当且仅当 $A=B_{L}^{-1}$ 当且仅当 $a_{1}b_{1}+\cdots+a_{n}b_{n}=1$。

证明：由于 $n\geq 2$，所以 BA 不会等于单位阵。由左逆和右逆的定义即证。

命题 4 (a) 设 $A=(a_{1},\cdots,a_{n})\neq 0$，则 $A_{R}^{-1}=\left\{\begin{pmatrix} b_{1}\\ \vdots\\ b_{n}\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{n\times 1}\middle| a_{1}b_{1}+\cdots+a_{n}b_{n}=1\right\}$；

(b) 设 $A=\begin{pmatrix} a_{1}\\ \vdots\\ a_{n}\end{pmatrix}\neq 0$，则 $A_{L}^{-1}=\left\{(b_{1}\cdots b_{n})\in\mathbb{C}^{1\times n}\middle| a_{1}b_{1}+\cdots+a_{n}b_{n}=1\right\}$。

结合命题 1~4，我们有如下的总结：

对行矩阵 $A=(a_{1},\cdots,a_{n})\neq 0$，它的 $\{1\}$ 逆和 $\{2\}$ 逆和右逆基本重合，且是其 $\{3\}$ 逆的一部分；对列矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_{1}\\ \vdots\\ a_{n}\end{pmatrix}\neq 0$，它的 $\{1\}$ 逆和 $\{2\}$ 逆和左逆基本重合，且是它的 $\{4\}$ 逆的一部分。

4. 例子

下面我们给出一个具体广义逆的例子。

例 1 设 $A=(1\quad 2)$，求 A 的各种广义逆。

解：设 $B=\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix}$。则由 M-P 方程(1)，$(1\quad 2)\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix}(1\quad 2)=(1\quad 2)$，知 $a+2b=1$；

由 M-P 方程(2)，$\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix}(1\quad 2)\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix}$，知 $a+2b=1$ 或者 $a=b=0$；

由 M-P 方程(3)，$\left((1\quad 2)\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix}\right)^{*}=(1\quad 2)\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix}$，知 $\overline{a+2b}=a+2b$，即 $a+2b$ 为实数；

由 M-P 方程(4)，$\left(\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix}(1\quad 2)\right)^{*}=\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix}(1\quad 2)$，知 $\begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b}\\ \overline{2a} & \overline{2b}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 2a\\ b & 2b\end{pmatrix}$，即 a,b 均为实数，且 $2a=b$。

所以 A 的各种广义逆是不同的，由哪些 M-P 方程确定的 A 的广义逆也是由这些 M-P 方程对应的 a,b 的解所确定的。比如：

$A\{1\}=\begin{pmatrix} a\\ \dfrac{1-a}{2}\end{pmatrix}$，$a$ 为任意复数。

$A^{+}=\begin{pmatrix} 1/5\\ 2/5\end{pmatrix}$，而 $A\{4\}=\begin{pmatrix} a\\ 2a\end{pmatrix}$，$a$ 为任意实数。

下面我们给出一个左逆和右逆的例子。

例 2 设 $A=(1\quad 2)$，求 A 的左逆和右逆。

解：设 $B=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$。则由 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=1$，知 $a+2b=1$，即对于任意的复数 a，矩阵 $\begin{pmatrix} a \\ \dfrac{1-a}{2} \end{pmatrix}$ 均是 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的右逆，且 A 的每个右逆也都是这种形式。由于 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的秩等于 1，小于列数 2，所以 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ 没有左逆。

由例 1 和例 2 可知，矩阵的广义逆和左逆、右逆是不同的。

基金项目

盐城工学院大学生创新创业训练计划项目(2022413, 2023519, 2023520)。

参考文献

[1] 邸继征. 矩阵论[M]. 北京: 科学出版社, 2016.
[2] 付美鑫. 利用行列式、矩阵求解线性方程组[J]. 黑龙江科学, 2017, 8(3): 72-73.
[3] 高珍珍. 广义逆矩阵及其应用[J]. 伊利师范学院学报(自然科学版) , 2011(4): 1-7.
[4] 杨云, 穆天红, 王秀峰. 求解广义逆矩阵方法在陶瓷坯料配方设计中的应用[J]. 中国陶瓷, 2012, 48(8): 27-29.
[5] 李悦. 浅介几种广义逆矩阵及其应用[J]. 山东工业技术, 2015(18): 225.
[6] 翟佩佩, 石欣侗, 魏俊潮. 矩阵广义逆与方程的解[J]. 大学数学, 2022, 38(5): 6-11.
[7] 田东霞. 广义逆矩阵 A+研究[J]. 西安文理学院学报(自然科学版), 2020, 23(4): 6-11.
[8] 欧阳光. 广义逆矩阵及其计算方法[J]. 湘南学院学报, 2020, 41(2): 1-4.