

# Mycielski图的哈密尔顿连通性

沈源源

陕西职业技术学院基础课部, 陕西 西安

收稿日期: 2024年1月22日; 录用日期: 2024年3月20日; 发布日期: 2024年3月27日

## 摘要

2017年, Jarnicki等人提出如下猜想: 如果图 $G$ 是哈密尔顿连通的且不是 $K_2$ , 那么它的Mycielski图 $\mu(G)$ 也是哈密尔顿连通的。在这篇论文中, 证明了该猜想在部分图上是正确的。本文的主要研究结果如下: 刻画了特殊图类的Mycielski图 $\mu(G)$ 是哈密尔顿连通的。当图 $G$ 满足最小度 $\delta(G) \geq \frac{n}{2} + 1$ 时,  $\mu(G)$ 是哈密尔顿连通的。

## 关键词

Mycielski图, 哈密尔顿连通, Mycielski因子

# Hamilton-Connectedness of Mycielski Graphs

Yuanyuan Shen

Department of Basic Courses, Shaanxi Vocational & Technical College, Xi'an Shaanxi

Received: Jan. 22<sup>nd</sup>, 2024; accepted: Mar. 20<sup>th</sup>, 2024; published: Mar. 27<sup>th</sup>, 2024

## Abstract

2017, Jarnicki and others conjectured that if  $G$  is Hamilton-connected and not  $K_2$ , then its Mycielski graph  $\mu(G)$  is Hamilton-connected. In this paper, we confirm that the conjecture is true for part of graphs. Our main results are summarized as follows: We characterize special graph classes of  $\mu(G)$  which are depicted to satisfy the characteristics of Hamiltonian connectivity. They are characterized as follows: Graph  $G$  satisfies  $\delta(G) \geq \frac{n}{2} + 1$ ,  $\mu(G)$  satisfies Hamiltonian connectivity.

## Keywords

Mycielski Graphs, Hamilton-Connectedness, Mycielski Factor

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

### 1.1. 研究背景及现状

自从二十世纪六十年代以来,图论已经成为发展迅速的数学分支之一,图论的很多理论在解决运筹学,化学,生物学,网络理论,博弈论等学科问题中起着非常重要的作用。它作为组合数学的一个分支受到了各个方向的普遍重视。

图的哈密顿问题便是其中一个比较重要的研究主题,哈密顿图是以爱尔兰著名数学家 William·Hamilton 的名字所命名的。他是第一个给出复数的代数(而非几何)描述的人,并且他于 19 世纪所发明的 Icosian 的游戏正是哈密顿图的前身,哈密顿图作为图论的一个重要分支和其它图理论问题有着非常紧密的联系,Hamilton 问题是从所谓的“周游世界问题”的游戏中提出来的[1]。1856 年著名的爱尔兰数学家 William·Hamilton (1805~1865)设计了一个游戏:给定世界上 20 个城市,从某一顶点出发,沿着十二面体的棱,经过每个顶点恰好 1 次,最后回到出发点[2]。

1998 年 Fisher, McKenna 和 Boyer [3]研究了图  $G$  的 Mycielski 图  $\mu(G)$  的哈密顿性质,并得出了以下结论:

**定理 1.1** (Fisher [3])以下是关于图  $G$  的相关结论:

- (1) 设  $G$  是哈密顿图,则  $\mu(G)$  也是哈密顿图;
- (2) 设  $G$  不是连通的,则  $\mu(G)$  不是哈密顿图;
- (3) 设  $G$  是至少含有两个悬挂点的图,则  $\mu(G)$  不是哈密顿图。

2017 年 Jarnicki, Myrvold, Saltzman 和 Wagon [3]进一步研究了一般图  $G$  及其 Mycielski 图之间的关系,并得到了以下结论:

**定理 1.2** (Jarnicki, Myrvold, Saltzman, Wagon [3])图  $G$  具有如下结论:

- (1) 如果图  $G$  是一个奇圈,那么  $\mu(G)$  是哈密顿连通的;
- (2) 如果图  $G$  是阶数为奇数的哈密顿连通图,那么  $\mu(G)$  是哈密顿连通的;
- (3) 如果图  $G$  是一个偶圈,那么  $\mu(G)$  不是哈密顿连通的。

### 1.2. 基本概念

本文只研究有限简单图。一个图称为简单图,如果它既没有自环也没有两条边连接同一对顶点。设  $G=(V(G),E(G))$  是一个简单图,  $V(G)$  是图  $G$  的顶点集,顶点数  $|V(G)|$  称为图  $G$  的阶数,  $E(G)$  是图  $G$  的边集,边数  $|E(G)|$  称为图  $G$  的大小。一般地,把由顶点  $u$  和  $v$  组成的边记为  $e=uv$  或者  $uv$ 。图  $G$  中顶点  $v$  的度是指与  $v$  相关联的边数,记为  $d_G(v)$  或  $d(v)$ ,度为 0 的顶点称为孤立点,度为 1 的顶点称为悬挂点。我们用  $\delta(G)=\min\{d(v)|v\in V(G)\}$  记为  $G$  的最小度,即  $\delta(G)=\min\{d(v)|v\in V(G)\}$ ,用  $\Delta(G)$  记为  $G$

的最大度, 即  $\Delta(G) = \max\{d(v) | v \in V(G)\}$ 。

称图  $H$  是图  $G$  的子图(记为  $H \subseteq G$ ), 如果  $V(H) \subseteq V(G)$ , 并且对于每一条边  $e = uv \in E(H)$ ,  $u, v$  都在顶点集  $V(H)$  中。也就是说, 图  $H$  可以通过删除图  $G$  中的一些顶点或一些边获得。图  $G$  的生成子图是指满足  $V(H) = V(G)$  的子图  $H$ 。

包含  $G$  的每个顶点的路称为  $G$  的哈密尔顿路; 类似地,  $G$  的哈密尔顿圈是指包含  $G$  的每个顶点的圈。图  $G$  称为哈密尔顿连通当  $G$  满足, 对任意一对顶点  $x, y$ ,  $G$  中都存在从  $x$  出发到  $y$  的哈密尔顿路。

图  $G$  的顶点集记为  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ , 它的 Mycielski 图记为  $\mu(G)$ ,  $\mu(G)$  的顶点集为  $X \cup Y \cup Z = \{x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n, z\}$ , 边集为  $Z$  所有的  $y_i$  相邻, 以及  $x_i x_j, x_i y_j, y_i y_j \in E(\mu(G))$ , 当  $v_i v_j \in E(G)$ 。令  $M_1 = K_1$ , 构造  $M_1$  的 Mycielski 图得到  $M_2 = \mu(M_1) = K_2$ , 由此重复迭代可以得到  $M_3 = \mu(M_2) = C_5, M_4, \dots$ 。这样得到的图称为 Mycielski 图  $M_n$ 。 $M_n$  是色数为  $n$  的不含三角形且顶点数较少的图。

对于上述概念和术语可以参考[2] [4] [5]。

### 1.3. 本文主要工作

本文研究了一些具有哈密尔顿性质的特殊图类, 这些图的 Mycielski 图均具有哈密尔顿连通性质。

在本文中, 我们主要得到一下结果。

**定理 1.3** 设图  $G$  是哈密尔顿连通图, 如果对任意的  $v \in V(G)$ , 存在由  $v$  开始的 Mycielski 因子, 则  $\mu(G)$  是哈密尔顿连通的。

**定理 1.4** 设图  $G$  是阶数  $n \geq 3$  的哈密尔顿连通图, 如果  $\delta(G) \geq \frac{n}{2} + 1$ , 则  $\mu(G)$  是哈密尔顿连通的。

## 2. 主要结果

简单回忆哈密尔顿连通的定义: 图  $G$  中, 任意一对顶点  $(x, y)$  在  $G$  中都存在从  $x$  出发到  $y$  结束的哈密尔顿路。

在证明下述定理之前, 首先我们定义 Mycielski 因子如下:

**定义 2.1** 设图  $G$  是阶数为偶数的  $n$  阶连通图,  $v_1 \in V(G)$ 。称图  $G$  的连通生成子图为 Mycielski 因子当且仅当中有一条从  $v_1$  出发的路, 该路包含个数为偶数的奇圈  $C_1, C_2, \dots, C_{2n}$  (可能  $n = 0$ ) 和含有一条偶长弦的偶圈  $C_{2n+1}$  (可能不存在), 这些圈由  $2s$  条边  $e_1, e_2, \dots, e_{2s}$  连接,  $e_i = v_i v_{i+1}$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, 2s\}$  使得  $v_i v_i' \in V(C_i)$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, 2s+1\}$ , 偶圈的弦连接  $v_{2s+1}$  和  $C_{2s+1}$  上的一点使得该弦的距离为偶长。

**定理 2.2** 设图  $G$  是哈密尔顿连通图, 如果对任意的  $v \in V(G)$ , 存在由  $v$  开始的 Mycielski 因子, 则  $\mu(G)$  是哈密尔顿连通的。

证明: 设图  $G$  是哈密尔顿连通的。由定理 1.7 (2) 可知, 图  $G$  的顶点数为奇数时  $\mu(G)$  也是哈密尔顿连通。故只需考虑当图  $G$  的顶点数为偶数时的情形。令  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{2n}\}$ ,  $n \geq 2$ ,

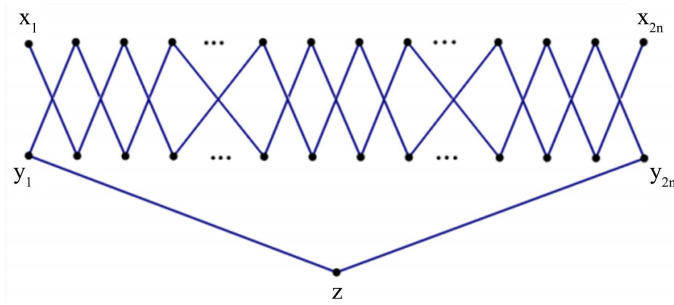
$V(\mu(G)) = X \cup Y \cup Z$ 。任取两点  $u, v \in V(\mu(G))$  分别讨论  $u, v$  在  $X, Y, \{z\}$  中不同位置时的情况, 并证明。

(i)  $u \in X, v \in X$ 。

当  $u = x_1, v = x_{2n}$  时, 由于图  $G$  是哈密尔顿连通的, 因此在图  $G$  中存在一条路  $P$ , 其中  $P$  的起点为  $v_1$ , 终点为  $v_{2n}$ , 故在  $\mu(G)$  中存在一条哈密尔顿路  $P'$ 。记作:

$$x_1 - y_2 - x_3 - \dots - y_{2n} - z - y_1 - x_2 - y_3 - \dots - x_{2n},$$

如图 1 所示。



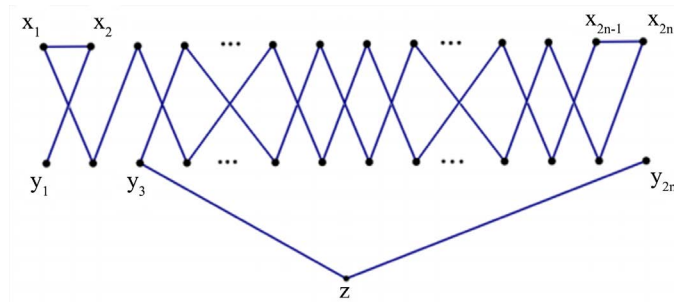
**Figure 1.** Hamilton road from  $u$  to  $v$  (1)  
**图 1.**  $u$  到  $v$  的哈密尔顿路(1)

(ii)  $u \in Y, v \in Y$ 。

当  $u = y_1, v = y_{2n}$  时, 由于图  $G$  是哈密尔顿连通的, 因此在图  $G$  中存在一条路  $P$ , 其中  $P$  的起点为  $v_1$ , 终点为  $v_{2n}$ , 故在  $\mu(G)$  中存在一条哈密尔顿路  $P'$ 。记作:

$$y_1 - x_2 - x_1 - \dots - x_{2n-1} - x_{2n} - y_{2n-1} - x_{2n-2} - \dots - y_3 - z - y_{2n},$$

如图 2 所示。



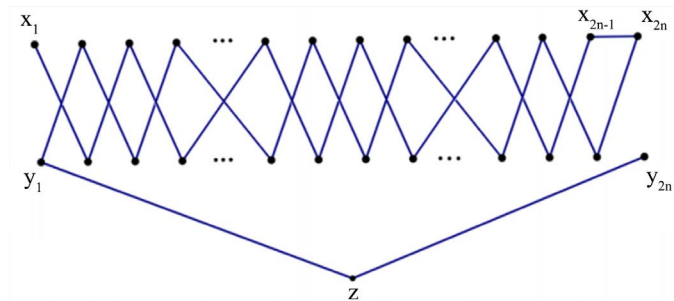
**Figure 2.** Hamilton road from  $u$  to  $v$  (2)  
**图 2.**  $u$  到  $v$  的哈密尔顿路(2)

(iii)  $u \in X, v \in Y$ 。

当  $u = x_1, v = y_{2n}$  时, 由于图  $G$  是哈密尔顿连通的, 因此在图  $G$  中存在一条路  $P$ , 其中  $P$  的起点为  $v_1$ , 终点为  $v_{2n}$ , 故在  $\mu(G)$  中存在一条哈密尔顿路  $P'$ 。记作:

$$x_1 - y_2 - x_3 - \dots - x_{2n-1} - x_{2n} - y_{2n-1} - x_{2n} - x_{2n-1} - \dots - y_1 - z - y_{2n},$$

如图 3 所示。



**Figure 3.** Hamilton road from  $u$  to  $v$  (3)  
**图 3.**  $u$  到  $v$  的哈密尔顿路(3)

(iv)  $u \in Y, v = z$ 。

当  $u = y_1$  时，由于图  $G$  是哈密顿连通的，因此在图  $G$  中存在一条路  $P$ ，其中  $P$  的起点为  $v_1$ ，终点为  $v_{2n}$ ，故在  $\mu(G)$  中存在一条哈密顿路  $P'$ 。记作：

$$y_1 - x_2 - y_3 - \cdots - x_{2n} - x_1 - y_2 - \cdots - y_{2n} - z,$$

如图 4 所示。

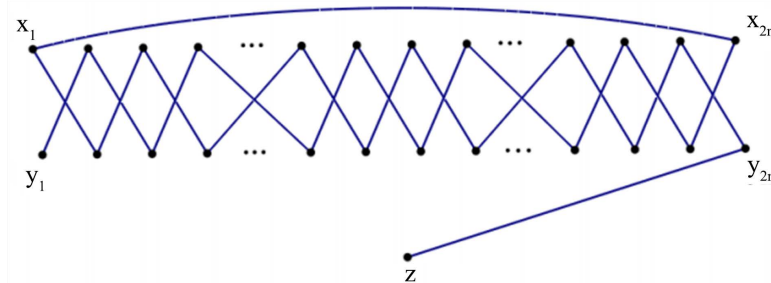


Figure 4. Hamilton road from  $u$  to  $v$  (4)  
图 4.  $u$  到  $v$  的哈密顿路(4)

(v)  $u \in X, v = z$ 。

令  $u = x_1$ ，图  $G$  中有一条从  $v_1$  出发的路，该路包含个数为偶数的奇圈  $C_1, C_2, \dots, C_{2n}$  (可能  $n = 0$ ) 这些圈由  $2s$  条边  $e_1, e_2, \dots, e_{2s}$  连接，和含有一条偶长弦的偶圈  $C_{2n+1}$  (可能不存在)，偶长弦连接  $v_{2s+1}$  和  $C_{2s+1}$  上的一点，若  $S \geq 1$ ，对任意  $i \in \{1, 2, \dots, 2s\}$ ，给  $C_i$  的顶点顺时针排序为  $u_1 u_2 \cdots u_{2k+1}$ 。因此在  $\mu(C_i)$  中有如下的哈密顿路  $P_i$ ：

$$x_1 y_2 x_3 \cdots x_{2k+1} y_1 x_2 \cdots y_{2k+1}, \text{ 其中 } u_1 = v_i, u_{2k+1} = v_i' (i \in \{1, 2, 3, \dots, 2s\})。$$

令含有偶长弦的偶圈  $C_{2n+1} = w_1 w_2 w_3 \cdots w_{2m}$ ，其中偶长弦为  $w_{2l} w_{2m}$ ，因为可以在  $\mu(C_{2s+1})$  中找到如下哈密顿路  $P_{2s+1}$ ：

$$x_1 y_2 x_3 y_4 \cdots y_{2m} x_{2l} y_{2l+1} x_{2l+2} \cdots x_{2m} y_1 x_2 y_3 \cdots y_{2l-1}, w_1 = v_{2s+1}, w_{2m} = v_{2s+1}'。$$

如此便可得到  $\mu(G)$  中从  $x_1$  出发到  $z$  的哈密顿路：

$$\left( \bigcup_{i=1}^{2s+1} P_i \right) \cup \{v_i v_i' : 1 \leq i \leq 2s\} \cup \{y_{2l-1} z\}$$

如此完成了证明[3] [6]。

**定理 2.3** 设图  $G$  是阶数  $n \geq 3$  的哈密顿连通图，如果  $\delta(G) \geq \frac{n}{2} + 1$ ，则  $\mu(G)$  是哈密顿连通的。

证明：因为图  $G$  是哈密顿连通的，故图  $G$  有哈密顿圈  $C$ 。 $u$  是圈  $C$  上的一点，因为  $d(u) \geq \frac{n}{2} + 1$ ，所以圈  $C$  上有距离  $u$  为偶数的邻点。由定理 2.2 可得， $\mu(G)$  也是哈密顿连通的。

### 参考文献

- [1] Bondy, J.A. and Chvatal, V. (1976) A Method in Graph Theory. *Discrete Mathematics*, **15**, 111-135. [https://doi.org/10.1016/0012-365X\(76\)90078-9](https://doi.org/10.1016/0012-365X(76)90078-9)
- [2] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (2008) Graph Theory. Springer, New York. <https://doi.org/10.1007/978-1-84628-970-5>
- [3] Fisher, D.C., Mckenna, P.A. and Boyer, E.D. (1998) Hamiltonicity, Diameter, Domination, Packing, and Biclique Partitions of Mycielski's Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **84**, 93-105.

- [https://doi.org/10.1016/S0166-218X\(97\)00126-1](https://doi.org/10.1016/S0166-218X(97)00126-1)
- [4] Jarnicki, W., Myrvold, W., Saltzman, P. and Wagon, S. (2017) Properties, Proved and Conjectured, of Keller, Mycielski, and Queen Graphs. *Ars Mathematica Contemporanea*, **13**, 427-460.  
<https://doi.org/10.26493/1855-3974.1143.844>
- [5] Cheng, S.T., Wang, D. and Liu, X. (2018) Hamiltonicity of Mycielski Graphs. *American Journal of Applied Mathematics*, **6**, 20-22. <https://doi.org/10.11648/j.ajam.20180601.14>
- [6] Karaganis, J.J. (1968) On the Cube of a Graph. *Canadian Mathematical Bulletin*, **11**, 295-296.  
<https://doi.org/10.4153/CMB-1968-037-0>