Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(4), 137-151
Published Online April 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.144120

Hans汉斯

带有奇异非线性项的分数阶p-Kirchhoff方程解的存在性问题

张 莹

上海理工大学理学院，上海

收稿日期：2024年2月27日；录用日期：2024年3月23日；发布日期：2024年4月23日

摘 要

本文主要研究如下带有奇异非线性项的分数阶p-Kirchhoff方程解的存在性：

$$\begin{cases} M\left(\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right)(-\Delta)_p^s u+\mu|u|^{q-2}u=\lambda g(x)u^{-\gamma}+f(x,u), & x\in\Omega, \\ u=0, & x\in\partial\Omega, \end{cases}$$

其中$\Omega\subset\mathbb{R}^N\ (N>ps)$是一个边界光滑的有界区域，$(-\Delta)_p^s$是一个分数阶p-Laplace算子，$M(t)=a+bt^{k-1}$，$t\ge 0$，$a,b>0$。假设$\gamma\in(0,1)$，$s\in(0,1)$，$\lambda$是一个正实数，$1<p<pk<p_s^*$，其中$p_s^*$是分数阶索伯列夫临界指数。通过Nehari流行方法和变分法，证明了该方程解的存在性。

关键词

Kirchhoff型方程，分数阶p-Laplace方程，Nehari流行，变分法

Existence of Solutions for a Fractional p-Kirchhoff Equation with Singular Nonlinearity

Ying Zhang

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Feb. 27th, 2024; accepted: Mar. 23rd, 2024; published: Apr. 23rd, 2024

Abstract

This paper studies the following fractional p-Kirchhoff equation with singular nonlinearity:

文章引用: 张莹. 带有奇异非线性项的分数阶 p-Kirchhoff 方程解的存在性问题[J]. 理论数学, 2024, 14(4): 137-151.
DOI: 10.12677/pm.2024.144120

$$\begin{cases} M\left(\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right)(-\Delta)_p^s u+\mu|u|^{q-2}u=\lambda g(x)u^{-\gamma}+f(x,u), & x\in\Omega, \\ u=0, & x\in\partial\Omega, \end{cases}$$

where Ω is a bounded smooth domain of $\mathbb{R}^N$ $(N>ps)$, $(-\Delta)_p^s$ is a fractional p-Laplace operator, $M(t)=a+bt^{k-1}$, $t\geq 0$, $a,b>0$. Suppose $\gamma\in(0,1)$, $s\in(0,1)$, λ is a positive real number, $1<p<pk<p_s^*$, where p_s^* is the fractional Sobolev critical exponent. The existence of the equation is proved by Nehari manifold method and variational method.

Keywords

Kirchhoff Type Equation, Fractional p-Laplace Equation, Nehari Manifold, Variational Method

1. 引言

设 $s\in(0,1)$，$p\in(1,\infty)$，$\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 是一个边界光滑的有界区域，本文考虑如下问题：

$$\begin{cases} M\left(\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right)(-\Delta)_p^s u+\mu|u|^{q-2}u=\lambda g(x)u^{-\gamma}+f(x,u), & x\in\Omega, \\ u=0, & x\in\partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $\gamma\in(0,1)$，λ 是正实数，$1<p<pk<p_s^*=\frac{Np}{N-ps}$，$N>ps$。$(-\Delta)_p^s$ 是分数阶 p-Laplace 算子，定义为：

$$(-\Delta)_p^s u(x)=2\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\varepsilon(x)}\frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+ps}}\mathrm{d}y,\quad x\in\mathbb{R}^N。$$

近年来，由于椭圆型的分数算子和非局部算子在金融、薄障碍、优化等问题应用广泛，因此该类算子的研究也受到越来越多的关注。在[1] [2] [3]中，利用变分法研究了分数阶拉普拉斯算子的半线性 Dirichlet 问题，在[4] [5] [6] [7]中研究了带有凹凸非线性项的非局部算子的存在性和多重性结果，在[8] [9]中研究了分数阶 p-Laplace 算子的特征值问题和最小特征值的简单性质，在[10]中研究了带有超线性项和奇异非线性的(p, q)拉普拉斯问题解的存在性和正则性问题。

在 $s=1$ 的情况下，Crandal M. G.，Rabinowitz P. H.和 Tartar L.在[11]最先研究了一类带有奇异非线性项问题的半线性问题。此后许多作者利用[11]中的技术将其与 Nehari 流行方法结合，研究了 Laplace 算子、p-Laplace 算子、分数阶 Laplace 算子和分数阶 p-Laplace 算子的问题，见[12] [13][14]。在[15] [16]中，Tuhina M.和 Yang D. D.研究了类似的奇异问题：

$$(-\Delta)_p^s u=\lambda u^{-q}+u^{\alpha},$$

其中在 Ω 中 $u>0$，在 $\mathbb{R}^N\setminus\Omega$ 上 $u=0$，利用 Nehari 流行方法证明了方程解的存在性。在[17]中，Fiscella A.

和 Mishra P. K.研究了如下的一类奇异 Kirchhoff 问题：

$$M\left(\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\left|u(x)-u(y)\right|^2}{\left|x-y\right|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)(-\Delta)^s u=\lambda f(x)u^{-\gamma}+g(x)u^{2_s^*-1},$$

其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 是一个有界开集，$\gamma\in(0,1)$，$f\in L^{\frac{2_s^*}{2_s^*+\gamma-1}}(\Omega)$。类似的分数阶 Kirchhoff 问题和分数阶 p-Kirchhoff 问题还有很多，例如[18] [19] [20]等。

受[13] [15] [16] [17] [20]等文献的启发，本文研究问题(1.1)解的存在性，更加深入地了解用 Nehari 方法和变分法证明解的存在性，为该领域的进一步研究提供了新的思路和方法。首先给出如下假设：

(H_1) $g(x)$ 在 Ω 上处处为正，且对于 $1<d<q<p$，

$$g\in L^{\frac{d}{d+\gamma-1}}(\Omega);$$

(H_2) $F:\bar{\Omega}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续函数，并且对于任意的 $t>0$，我们有

$$F(x,tu)=t^rF(x,u),$$

其中 $F(x,u)=\int_0^u f(x,s)\mathrm{d}s$，$1<p<pk<r<p_s^*$。

注记 1.1 由(H_2)，不难看出对于任意的 $(x,u)\in\bar{\Omega}\times\mathbb{R}$ 和常数 $C>0$，我们有

$$uf(x,u)=rF(x,u)$$

和

$$\left|F(x,u)\right|\le C|u|^r$$

成立。

本文的主要结果如下：

定理 1.1 假设条件(H_1)~(H_3)成立，那么存在 $(\lambda^*,\mu^*)\in(0,\infty)\times(0,\infty)$，使得对任意的 $\lambda\in(0,\lambda^*)$，$\mu\in(0,\mu^*)$，问题(1.1)至少有两个非平凡解。

本文的结构安排如下：第二部分，介绍一些勒贝格空间和分数阶索伯列夫空间的一些基础知识；第三部分，给出一些主要引理及其证明；第四部分是定理 1.1 的证明。

2. 符号说明和基础知识

在本节中，回忆一些关于勒贝格空间和分数阶索伯列夫空间的一些必要的基础知识，对于更多细节的地方，可以参考[21] [22] [23]。$L^p(\mathbb{R}^N)$ 表示值域为 $\mathbb{R}$ 的 $\mathbb{R}^N$ 上的函数空间

$$L^p(\mathbb{R}^N)=\left\{u:(\mathbb{R}^N)\to\mathbb{R},\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p\,\mathrm{d}x<\infty\right\},$$

记 $\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}=\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$，令 $s\in(0,1)$，$N>ps$，$p\in(1,\infty)$，考虑空间

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^N)=\left\{u\in L^p(\mathbb{R}^N):[u]<\infty\right\},$$

记

$$\|u\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)}=\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}+[u],$$

其中

$$[u]=\left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

称为 Gagliardo 半范数。

现在定义空间

$$X_0(\Omega)=\left\{u\in W^{s,p}(\mathbb{R}^N):u=0\text{ 在 }\mathcal{C}\Omega\text{ 中}\right\},$$

在这里，$\mathcal{C}\Omega=\mathbb{R}^N\setminus\Omega$ 表示 Ω 在 $\mathbb{R}^N$ 中的补集，定义 $X_0(\Omega)$ 上的范数为

$$\|u\|=\left(\iint_{Q}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}},$$

其中 $Q=\mathbb{R}^{2N}\setminus(\mathcal{C}\Omega\times\mathcal{C}\Omega)$。

定理 2.1 ([23]，定理 6.7)令 $s\in(0,1)$，$p\in[1,+\infty)$，$\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 是一个有界区域，那么存在一个正的常数 $C(N,p,s,\Omega)$，使得对于任意的 $f\in X_0(\Omega)$，有

$$\|f\|_{L^q(\Omega)}\le C(N,p,s,\Omega)\|f\|$$

成立，其中 $q\in[1,p_s^*]$，$p_s^*=\dfrac{Np}{N-ps}$ 称为分数阶索伯列夫临界指数。

定义 2.1 我们说 $u\in X_0$ 是问题(1.1)的弱解，如果对于任意的 $v\in X_0$，都有

$$\left(a+b\|u\|^{p(k-1)}\right)\langle u,v\rangle+\mu\int_\Omega|u|^{q-1}uv\mathrm{d}x=\lambda\int_\Omega g(x)|u|^{-\gamma}v\mathrm{d}x+\int_\Omega f(x,u)v\mathrm{d}x$$

成立，其中

$$\langle u,v\rangle=\iint_Q\frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+ps}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x。$$

3. 主要引理的证明

为了证明本文的主要结果，首先证明一些基本的引理。与问题(1.1)相关的能量泛函 $J:X_0\to\mathbb{R}$，如下所示：

$$J(u)=\frac{a}{p}\|u\|^p+\frac{b}{pk}\|u\|^{pk}+\frac{\mu}{q}\int_\Omega|u|^q\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{1-\gamma}\int_\Omega g(x)|u|^{1-\gamma}\mathrm{d}x-\int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x。$$

注意到由于奇异项的存在，$J(u)$ 并不是可微的，因此考虑一类纤维映射 φ_u，其在[24]中被 Drabek P. 和 Pohozaev S. I.介绍。定义纤维映射 φ_u 如下：

$$\begin{aligned}\varphi_u(t)=J(tu)=&\frac{at^p}{p}\|u\|^p+\frac{bt^{pk}}{pk}\|u\|^{pk}+\mu\frac{t^q}{q}\int_\Omega|u|^q\mathrm{d}x\\&-\frac{\lambda t^{1-\gamma}}{1-\gamma}\int_\Omega g(x)|u|^{1-\gamma}\mathrm{d}x-t^r\int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由(H_2)和注记 1.1，可以得到

$$\varphi_u'(t)=at^{p-1}\|u\|^p+bt^{pk-1}\|u\|^{pk}+\mu t^{q-1}\int_\Omega|u|^q\mathrm{d}x-\lambda t^{-\gamma}\int_\Omega g(x)|u|^{1-\gamma}\mathrm{d}x-t^{r-1}\int_\Omega f(x,u)u\mathrm{d}x,$$

$$\varphi_u''(t)=a(p-1)t^{p-2}\|u\|^p+b(pk-1)t^{pk-2}\|u\|^{pk}+\mu(q-1)t^{q-2}\int_\Omega|u|^q\,\mathrm{d}x$$
$$+\lambda\gamma t^{-\gamma-1}\int_\Omega g(x)|u|^{1-\gamma}\,\mathrm{d}x-(r-1)t^{r-2}\int_\Omega f(x,u)u\mathrm{d}x.$$

J 在 X_0 上并不是下有界的，但是在 X_0 的子集上是有界的，称为 Nehari 流形：

$$N_\lambda=\left\{u\in X_0\setminus\{0\}:\varphi_u'(1)=0\right\}。$$

现在，将 N_λ 分为以下三个部分：

$$N_\lambda^+=\left\{u\in N_\lambda:\varphi_u''(1)>0\right\},$$
$$N_\lambda^-=\left\{u\in N_\lambda:\varphi_u''(1)<0\right\},$$
$$N_\lambda^0=\left\{u\in N_\lambda:\varphi_u''(1)=0\right\}。$$

对于 $u\in N_\lambda$，我们有

$$\varphi_u'(1)=a\|u\|^p+b\|u\|^{pk}+\mu\int_\Omega|u|^q\,\mathrm{d}x-\lambda\int_\Omega g(x)|u|^{1-\gamma}\,\mathrm{d}x-\int_\Omega f(x,u)u\mathrm{d}x=0,$$
$$\varphi_u''(1)=ap\|u\|^p+bpk\|u\|^{pk}+\mu q\int_\Omega|u|^q\,\mathrm{d}x-\lambda(1-\gamma)\int_\Omega g(x)|u|^{1-\gamma}\,\mathrm{d}x-r\int_\Omega f(x,u)u\mathrm{d}x。$$

接下来，令

$$P(u)=a\|u\|^p,\ K(u)=b\|u\|^{pk},\ Q(u)=\mu\int_\Omega|u|^q\,\mathrm{d}x,$$
$$R(u)=\lambda\int_\Omega g(x)|u|^{1-\gamma}\,\mathrm{d}x,\ S(u)=\int_\Omega f(x,u)u\mathrm{d}x.$$

容易看出，

$$u\in N_\lambda\Leftrightarrow P(u)+K(u)+Q(u)-R(u)-S(u)=0。\tag{3.1}$$

引理 3.1 令 $u\in X_0$，那么我们有

(1) 存在一个常数 $C_1>0$，使得

$$R(u)\le C_1\lambda\|u\|^{1-\gamma},$$

(2) 存在一个常数 $C_2>a$，使得

$$S(u)\le C_2\|u\|^r。$$

证明：(1) 由(H_1)和定理 2.1 我们有

$$\begin{aligned}R(u)&=\lambda\int_\Omega g(x)|u|^{1-\gamma}\,\mathrm{d}x\\&\le\lambda\|g(x)\|_{L^{\frac{d}{d+\gamma-1}}(\Omega)}\left\||u|^{1-\gamma}\right\|_{L^{\frac{d}{1-\gamma}}(\Omega)}\\&\le\lambda\|g(x)\|_{L^{\frac{d}{d+\gamma-1}}(\Omega)}C(N,p,s,\Omega)^{1-\gamma}\|u\|^{1-\gamma}\\&\le\lambda C_1\|u\|^{1-\gamma},\end{aligned}$$

其中 $C_1=C_1(N,p,s,\gamma,\Omega)$，是一个正数。

(2) 由(H_2)、注记 1.1 和定理 2.1，我们有

$$\begin{aligned}S(u)&=\int_\Omega f(x,u)u\mathrm{d}x=r\int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x\\&\le r\int_\Omega|F(x,u)|\mathrm{d}x\le Cr\int_\Omega|u|^r\,\mathrm{d}x\\&\le K\|u\|^r\le C_2\|u\|^r,\end{aligned}$$

其中 $C_2 = K + a$， $K = CC(N, p, s, \Omega) r$。证毕。

引理 3.2 $\lambda > 0$，J 在 N_λ 上是强制的和下有界的。

证明：令 $u \in N_\lambda$ 且 $\|u\| > 1$。那么由(3.1)、注记 1.1 和引理 3.1，我们有

$$
\begin{aligned}
J(u) &= \frac{a}{p}\|u\|^p + \frac{b}{pk}\|u\|^{pk} + \frac{\mu}{q}\int_\Omega |u|^q \, dx - \frac{\lambda}{1-\gamma}\int_\Omega g(x)|u|^{1-\gamma} \, dx - \frac{1}{r}\int_\Omega rF(x,u) \, dx \\
&= \frac{1}{p}P(u) + \frac{1}{pk}K(u) + \frac{1}{q}Q(u) - \frac{1}{1-\gamma}R(u) - \frac{1}{r}S(u) \\
&= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}\right)P(u) + \left(\frac{1}{pk} - \frac{1}{r}\right)K(u) + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right)Q(u) - \left(\frac{1}{1-\gamma} - \frac{1}{r}\right)R(u) \\
&\ge \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}\right)a\|u\|^p - \lambda C_1\left(\frac{1}{1-\gamma} - \frac{1}{r}\right)\|u\|^{1-\gamma}.
\end{aligned}
$$

因为 $0 < 1-\gamma < 1 < p < pk < r < p_s^*$，所以如果 $\|u\| \to \infty$， $J(u) \to \infty$ 成立。证毕。

我们令

$$
\delta = \frac{a(r-p)}{C_1\left[r-(1-\gamma)\right]}\left(\frac{a(p-1+\gamma)}{C_2\left[r-(1-\gamma)\right]}\right)^{\frac{pk-(1-\gamma)}{r-p}},
$$

其中 C_1 和 C_2 在引理 3.1 中已被给出。

引理 3.3 如果 $0 < \lambda < \delta$，那么 $N_\lambda^0 = \varnothing$。

证明：用反证法来证明本引理。假设存在 $0 < \lambda < \delta$ 使得 $u \in N_\lambda^0$。

如果 $\|u\| < 1$，那么由(3.1)和引理 3.1，得到

$$
\begin{aligned}
0 = \varphi_u''(1) &= pP(u) + pkK(u) + qQ(u) - (1-\gamma)R(u) - rS(u) \\
&= (p-r)P(u) + (pk-r)K(u) + (q-r)Q(u) + \left[r-(1-\gamma)\right]R(u) \\
&\le a(p-r)\|u\|^p + b(pk-r)\|u\|^p + \mu C_0(q-r)\|u\|^p + \lambda C_1\left[r-(1-\gamma)\right]\|u\|^{1-\gamma},
\end{aligned}
$$

那么

$$
\|u\|^{p-(1-\gamma)} \le \frac{\lambda C_1\left[r-(1-\gamma)\right]}{a(r-p)+b(pk-r)+\mu C_0(r-q)} \le \frac{\lambda C_1\left[r-(1-\gamma)\right]}{a(r-p)}。
$$

因此

$$
\lambda \ge \frac{a(r-p)}{C_1\left[r-(1-\gamma)\right]}\|u\|^{p-(1-\gamma)}。 \tag{3.2}
$$

再次利用(3.1)和引理 3.1，得到

$$
\begin{aligned}
0 = \varphi_u''(1) &= pP(u) + pkK(u) + qQ(x) - (1-\gamma)R(u) - rS(u) \\
&= (p-1+\gamma)P(u) + (pk-1+\gamma)K(u) + (q-1+\gamma)Q(x) - \left[r-(1-\gamma)\right]S(u) \\
&\ge a(p-1+\gamma)\|u\|^p - C_2\left[r-(1-\gamma)\right]\|u\|^r.
\end{aligned}
$$

因此

$$
\|u\| \ge \left(\frac{a(p-1+\gamma)}{C_2\left[r-(1-\gamma)\right]}\right)^{\frac{1}{r-p}}。 \tag{3.3}
$$

结合(3.2)和(3.3)，可以得到

$$\lambda \ge \frac{a(r-p)}{C_1\left[r-(1-\gamma)\right]}\left(\frac{a(p-1+\gamma)}{C_2\left[r-(1-\gamma)\right]}\right)^{\frac{p-(1-\gamma)}{r-p}}。$$

又因为$0<1-\gamma<1<p<pk<r<p_s^*$，$C_2>a$，那么

$$0<\frac{a(p-1+\gamma)}{C_2\left[r-(1-\gamma)\right]}<1,$$

$$\frac{p-(1-\gamma)}{r-p}<\frac{pk-(1-\gamma)}{r-p}。$$

所以

$$\begin{aligned}\lambda &\ge \frac{a(r-p)}{C_1\left[r-(1-\gamma)\right]}\left(\frac{a(p-1+\gamma)}{C_2\left[r-(1-\gamma)\right]}\right)^{\frac{p-(1-\gamma)}{r-p}}\\ &\ge \frac{a(r-p)}{C_1\left[r-(1-\gamma)\right]}\left(\frac{a(p-1+\gamma)}{C_2\left[r-(1-\gamma)\right]}\right)^{\frac{pk-(1-\gamma)}{r-p}}=\delta.\end{aligned}$$

显然，这是矛盾的。

如果$\|u\|\ge 1$，那么由(3.1)和引理3.1，我们得到

$$0=\varphi_u''(1)\le\left[a(p-r)+b(pk-r)+\mu C_0(q-r)\right]\|u\|^{pk}+\lambda C_1\left[r-(1-\gamma)\right]\|u\|^{1-\gamma},$$

那么

$$\|u\|^{pk-(1-\gamma)}\le\frac{\lambda C_1\left[r-(1-\gamma)\right]}{a(r-p)+b(r-pk)+\mu C_0(r-q)}\le\frac{\lambda C_1\left[r-(1-\gamma)\right]}{a(r-p)}。$$

因此

$$\lambda\ge\frac{a(r-p)}{C_1\left[r-(1-\gamma)\right]}\|u\|^{pk-(1-\gamma)}。\tag{3.4}$$

另一方面，再次利用(3.1)和引理3.1，我们仍然得到

$$\|u\|\ge\left(\frac{a(p-1+\gamma)}{C_2\left[r-(1-\gamma)\right]}\right)^{\frac{1}{r-p}}。$$

结合以上两式，我们得到

$$\lambda \ge \frac{a(r-p)}{C_1\left[r-(1-\gamma)\right]}\left(\frac{a(p-1+\gamma)}{C_2\left[r-(1-\gamma)\right]}\right)^{\frac{pk-(1-\gamma)}{r-p}}=\delta。\tag{3.5}$$

这显然是矛盾的。证毕。

注记 3.1 从引理3.2和引理3.3，可以总结出

对于$0<\lambda<\delta$，$N_\lambda=N_\lambda^+\cup N_\lambda^-$；

J在N_λ^+和N_λ^-上都是强制的和下有界的。

定义，

$$\theta=\inf_{u\in N_\lambda}\left(J(u)\right)；\quad \theta^+=\inf_{u\in N_\lambda^+}\left(J(u)\right) 和 \theta^-=\inf_{u\in N_\lambda^-}\left(J(u)\right)。$$

引理 3.4 如果 $0<\lambda<\delta$，那么 $\theta<\theta^+<0$。

证明： 取 $u\in N_\lambda^+$，由(3.1)，我们得到

$$\begin{aligned}0<\varphi_u''(1)&=pP(u)+pkK(u)+qQ(u)-(1-\gamma)R(u)-rS(u)\\&=(p-1+\gamma)P(u)+(pk-1+\gamma)K(u)+(q-1+\gamma)Q(u)-\left[r-(1-\gamma)\right]S(u).\end{aligned}$$

所以，

$$S(u)<\frac{(p-1+\gamma)P(u)+(pk-1+\gamma)K(u)+(q-1+\gamma)Q(u)}{r-(1-\gamma)}。\tag{3.6}$$

另一方面，由(3.1)，我们得到

$$\begin{aligned}J(u)&=\frac{1}{p}P(u)+\frac{1}{pk}K(u)+\frac{1}{q}Q(u)-\frac{1}{1-\gamma}R(u)-\frac{1}{r}S(u)\\&=\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{1-\gamma}\right)P(u)+\left(\frac{1}{pk}-\frac{1}{1-\gamma}\right)K(u)+\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{1-\gamma}\right)Q(u)+\left(\frac{1}{1-\gamma}-\frac{1}{r}\right)S(u).\end{aligned}$$

再次利用(3.6)，所以

$$\begin{aligned}J(u)<&\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{1-\lambda}\right)P(u)+\left(\frac{1}{pk}-\frac{1}{1-\gamma}\right)K(u)+\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{1-\gamma}\right)Q(u)\\&+\left(\frac{1}{1-\gamma}-\frac{1}{r}\right)\frac{(p-1+\gamma)P(u)+(pk-1+\gamma)K(u)+(q-1+\gamma)Q(u)}{r-(1-\gamma)}.\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}J(u)<&\frac{r(1-\gamma)-pr+\left[pr-p(1-\gamma)\right]\frac{p-1+\gamma}{r-(1-\gamma)}}{pr(1-\gamma)}P(u)\\&+\frac{r(1-\gamma)-pkr+\left[pkr-pk(1-\gamma)\right]\frac{pk-1+\gamma}{r-(1-\gamma)}}{pkr(1-\gamma)}K(u)\\&+\frac{r(1-\gamma)-qr+\left[qr-q(1-\gamma)\right]\frac{q-1+\gamma}{r-(1-\gamma)}}{qr(1-\gamma)}Q(u).\end{aligned}\tag{3.7}$$

不难得到

$$r(1-\gamma)-pr+\left[pr-p(1-\gamma)\right]\frac{p-1+\gamma}{r-(1-\gamma)}<0，$$

$$r(1-\gamma)-pkr+\left[pkr-pk(1-\gamma)\right]\frac{pk-1+\gamma}{r-(1-\gamma)}<0，$$

$$r(1-\gamma)-qr+\left[qr-q(1-\gamma)\right]\frac{q-1+\gamma}{r-(1-\gamma)}<0。$$

所以，可以得出，对于任意的$u\in N_\lambda^+$，都有$J(u)<0$。于是，$\theta\le\theta^+<0$。证毕。

引理 3.5 如果$0<\lambda<\frac{1-\gamma}{p}\delta$，那么存在$K>0$使得

$$\theta^-\ge K>0\text{。}$$

证明：取$u\in N_\lambda^-$，那么$\theta^-\ge K>0$。由引理 3.3 的证明，我们得知

$$\|u\|\ge\left(\frac{a(p-1+\gamma)}{C_2\left[r-(1-\gamma)\right]}\right)^{\frac{1}{r-p}}\text{。}$$

如果$\|u\|<1$，由(3.1)和引理 3.1，我们有

$$\begin{aligned}J(u)&=\frac{1}{p}P(u)+\frac{1}{pk}K(u)+\frac{1}{q}Q(u)-\frac{1}{1-\gamma}R(u)-\frac{1}{r}S(u)\\&=\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)P(u)+\left(\frac{1}{pk}-\frac{1}{r}\right)K(u)+\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right)Q(u)-\left(\frac{1}{1-\gamma}-\frac{1}{r}\right)R(u)\\&\ge a\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)\|u\|^{pk}-\lambda C_1\left(\frac{1}{1-\gamma}-\frac{1}{r}\right)\|u\|^{1-\gamma}\\&=\|u\|^{1-\gamma}\left[a\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)\|u\|^{pk-1+\gamma}-\lambda C_1\left(\frac{1}{1-\gamma}-\frac{1}{r}\right)\right].\end{aligned}$$

于是，

$$J(u)\ge\left(\frac{a(p-1+\gamma)}{C_2\left[r-(1-\gamma)\right]}\right)^{\frac{1-\gamma}{r-p}}\left[a\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{a(p-1+\gamma)}{C_2\left[r-(1-\gamma)\right]}\right)^{\frac{pk-1+\gamma}{r-p}}-\lambda C_1\left(\frac{1}{1-\gamma}-\frac{1}{r}\right)\right]=d_1\text{。}$$

因此，如果

$$\lambda<a\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{a(p-1+\gamma)}{C_2\left[r-(1-\gamma)\right]}\right)^{\frac{pk-1+\gamma}{r-p}}\frac{1}{C_1\left(\frac{1}{1-\gamma}-\frac{1}{r}\right)}=\frac{1-\gamma}{p}\delta\text{，}$$

那么，$J(u)\ge d_1>0$。

如果$\|u\|\ge1$，再次由(3.1)和引理 3.1，我们有

$$\begin{aligned}J(u)&=\frac{1}{p}P(u)+\frac{1}{pk}K(u)+\frac{1}{q}Q(u)-\frac{1}{1-\gamma}R(u)-\frac{1}{r}S(u)\\&=\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)P(u)+\left(\frac{1}{pk}-\frac{1}{r}\right)K(u)+\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right)Q(u)-\left(\frac{1}{1-\gamma}-\frac{1}{r}\right)R(u)\\&\ge a\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)\|u\|^{p}-\lambda C_1\left(\frac{1}{1-\gamma}-\frac{1}{r}\right)\|u\|^{1-\gamma}\\&=\|u\|^{1-\gamma}\left[a\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)\|u\|^{p-1+\gamma}-\lambda C_1\left(\frac{1}{1-\gamma}-\frac{1}{r}\right)\right].\end{aligned}$$

于是，

$$J(u)\ge\left(\frac{a(p-1+\gamma)}{C_2[r-(1-\gamma)]}\right)^{\frac{1-\gamma}{r-p}}\left[a\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{a(p-1+\gamma)}{C_2[r-(1-\gamma)]}\right)^{\frac{p-1+\gamma}{r-p}}-\lambda C_1\left(\frac{1}{1-\gamma}-\frac{1}{r}\right)\right]=d_2。$$

因为$\frac{a(p-1+\gamma)}{C_2[r-(1-\gamma)]}<1$，所以，如果$\lambda<\frac{1-\gamma}{p}\delta$，一定有

$$\lambda<\frac{1-\gamma}{p}\delta<a\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{a(p-1+\gamma)}{C_2[r-(1-\gamma)]}\right)^{\frac{p-1+\gamma}{r-p}}\frac{1}{C_1\left(\frac{1}{1-\gamma}-\frac{1}{r}\right)}。$$

于是，$J(u)\ge d_2>0$。最后，令$K=\min(d_1,d_2)$，可以得到，如果$0<\lambda<\frac{1-\gamma}{p}\delta$，对任意的$u\in N_\lambda^-$都有$J(u)\ge K$成立。于是，$\theta^-\ge K>0$。证毕。

引理 3.6 对于$u\in X_0\setminus\{0\}$，存在$\delta'>0$使得，当$0<\lambda<\delta'$时，存在唯一的正数$t^+<t^-$，使得$t^+u\in N_\lambda^+$，$t^-u\in N_\lambda^-$，且

$$J(t^+u)=\inf_{0\le t\le t^*}J(tu)，\quad J(t^-u)=\sup_{t\ge 0}J(tu)。$$

证明：令

$$L_1(t)=at^{p-1}\|u\|^p+bt^{pk-1}\|u\|^{pk}，$$

$$L_2(t)=\lambda t^{-\gamma}\int_\Omega g(x)|u|^{1-\gamma}\mathrm{d}x-\mu t^{q-1}\int_\Omega|u|^{q-1}\mathrm{d}x，$$

$$L_3(t)=t^{r-1}\int_\Omega f(x,u)u\mathrm{d}x。$$

那么，$\varphi_u'(t)=L_1(t)-L_2(t)-L_3(t)$。容易看出：

1) $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{L_3(t)}{L_1(t)}=0$；

2) $\lim\limits_{t\to 0^+}L_2(t)=\infty$；

3) $L_1(t)-L_3(t)$有唯一的一个极大值点$t_{\max}$，且$\lim\limits_{t\to\infty}(L_1(t)-L_3(t))=-\infty$；

4) $L_2(t)$在R^+上严格递减，存在$\overline{t}\in(0,t_{\max})$使得$\frac{L_1(t)-L_3(t)}{L_2(t)}$在$(0,\overline{t})$上严格递增的。

由 1)，对于$t>0$足够小，有$L_1(t)-L_3(t)>0$成立。因此，由 2)，存在$t_1\in(0,t_{\max})$使得$L_2(t_1)>L_1(t_1)-L_3(t_1)$；另一方面，对于$\lambda>0$足够小，存在$t_2\in(0,t_{\max})$使得$L_2(t_1)<L_1(t_1)-L_3(t_1)$。由介值性定理，存在$t^+=t^+(\lambda)\in(0,t_{\max})$，使得

$$L_2(t^+)=L_1(t^+)-L_3(t^+)。\tag{3.8}$$

因为$\varphi_u'(t)=L_1(t)-L_2(t)-L_3(t)$在$(0,t_{\max})$上是严格单调增的，所以$t^+\in(0,t_{\max})$是唯一的。结合 4)和(3.8)，我们得到

$$1=\frac{L_1(t^+)-L_3(t^+)}{L_2(t^+)}<\frac{L_1(t)-L_3(t)}{L_2(t)},t\in(t^+,\overline{t})。$$

也就是说，对于所有的 $L_2(t)<L_1(t)-L_3(t)$，我们有

$$L_2(t)<L_1(t)-L_3(t)\text{。}$$

此外，固定 λ_1，使得对所有 $\lambda\in(0,\lambda_1)$，我们都有

$$L_2(t)<L_1(t)-L_3(t),t\in(t^+,t_{\max})\text{。} \tag{3.9}$$

另外，由 3)，我们得到存在 $t''>t_{\max}$，使得

$$L_1(t'')-L_3(t'')<L_2(t'')\text{。} \tag{3.10}$$

由(3.9)和(3.10)，我们得到对于 $\lambda\in(0,\lambda_1)$，存在 $t^->t_{\max}$ 使得

$$L_2(t^-)=L_1(t^-)-L_3(t^-)\text{。} \tag{3.11}$$

由于 $L_1(t)-L_3(t)$ 在 $(t_{\max},\infty)$ 上是严格递减的，我们可以固定 λ_2 和 μ^*，使得对于 $\lambda\in(0,\lambda_2)$ 和 $\mu\in(0,\mu^*)$ 有 $\varphi_u'(t)=L_1(t)-L_2(t)-L_3(t)$ 在 $(t_{\max},\infty)$ 上是严格递减的，因此，$t^-\in(t_{\max},\infty)$ 是唯一的。通过(3.8)和(3.11)，很容易推断出 t^+ 和 t^- 是 $\varphi_u(t)$ 的两个临界点。选择 $\delta'=\min(\lambda_1,\lambda_2,\delta)$ 足够小，那么 $\varphi_u(0)=0$，$\varphi_u(t)<0$ 对于 t 足够小。另外，对于 $t\in(0,t^+)$ 时，$\varphi_u'(t)<0$；对于 $t\in(t^+,t_{\max})$ 时，$\varphi_u'(t)>0$；$\varphi_u'(t^+)=0$。所以 $\varphi_u(t)$ 在 t^+ 处达到局部最小值，且 $\varphi_u''(t^+)>0$。所以，$t^+u\in N_\lambda^+$。同理可得，所以 $\varphi_u(t)$ 在 t^- 处达到局部最大值，且 $\varphi_u''(t^+)<0$。所以，$t^-u\in N_\lambda^-$。由引理 3.4 和引理 3.5，我们有，$\varphi_u(t^+)<0$，$\varphi_u(t^-)>0$。所以，存在唯一的一个 $t^*\in(t^+,t^-)$，使得 $\varphi_u(t^*)=0$。

因此，我们得到 $J(t^+u)=\varphi_u(t^+)=\inf\limits_{0\le t\le t^*}J(tu)$ 和 $J(t^-u)=\varphi_u(t^-)=\sup\limits_{t>t^*}J(tu)$。证毕。

4. 主要结果的证明

现在，我们将给出主要结果的证明。令 $\lambda^*=\min\left(\delta',\frac{1-\gamma}{p}\delta\right)$，其中 δ 和 δ' 分别在引理 3.3 和引理 3.6 中给出。为了证明定理 1.1，我们首先需要下面两个命题。

命题 4.1 如果 $\lambda\in(0,\lambda^*)$，那么泛函 J 有一个极小值点 $u_*\in N_\lambda^+$，满足

$$J(u_*)=\theta^+<0\text{。}$$

证明：因为 J 在 N_λ^+ 上是下有界的，所以存在一个极小化序列 $\{u_n\}\in N_\lambda^+$ 使得

$$J(u_n)\to\theta^+\text{。}$$

由引理 3.3 的证明过程，$\{u_n\}$ 在 X_0 上是有界的。因为 X_0 是一个自反的巴拿赫空间，所以存在 $u_*\in X_0$

$u_n\rightharpoonup u_*$，在 X_0 中，

$u_n\to u_*$，在 $L^m(\Omega)$ 中，$1\le m<p_s^*$，

$u_n\to u_*$，在 Ω 中几乎处处成立，

由控制收敛定理，我们得到

$$Q(u_*)=\lim_{n\to\infty}Q(u_n)，\quad R(u_*)=\lim_{n\to\infty}R(u_n)，\quad S(u_*)=\lim_{n\to\infty}S(u_n)\text{。} \tag{4.1}$$

另外，$u_*\neq0$ 且 $R(u_*)>0$。事实上，如果不是这样的话，考虑 $\{u_n\}\in N_\lambda^+$，利用(3.1)，有

$$J(u_n)=\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)P(u_n)+\left(\frac{1}{pk}-\frac{1}{r}\right)K(u_n)+\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right)Q(u_n)-\left(\frac{1}{1-\gamma}-\frac{1}{r}\right)R(u_n)，$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}J(u_n)>0$。然而，由引理 3.4，$\lim\limits_{n\to\infty}J(u_n)<0$，显然这是矛盾的。因此

$$u_* \in X_0 \setminus \{0\} \text{ 且 } R(u_*) > 0 \text{。} \tag{4.2}$$

接下来，我们将证明在 X_0 中，$u_n \to u_*$ 成立。假设结论不成立，由 Brezis-Lieb 引理[25]，我们有

$$\iint_Q \frac{|u_*(x)-u_*(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x \le \liminf_{n\to\infty} \iint_Q \frac{|u_n(x)-u_n(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x \text{。} \tag{4.3}$$

结合(4.1)，(4.2)，(4.3)，我们得到

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} J(u_n) &= \liminf_{n\to\infty}\left[\frac{a}{p}\iint_Q \frac{|u_n(x)-u_n(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \frac{b}{pk}\left(\iint_Q \frac{|u_n(x)-u_n(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right)^k\right.\\
&\quad \left. + \frac{\mu}{q}\int_\Omega |u_n|^q \mathrm{d}x - \frac{\lambda}{1-\gamma}\int_\Omega g(x)|u_n|^{1-\gamma}\,\mathrm{d}x - \int_\Omega F(x,u_n)\mathrm{d}x\right]\\
&\ge \liminf_{n\to\infty}\left[\frac{a}{p}\iint_Q \frac{|u_n(x)-u_n(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \frac{b}{pk}\left(\iint_Q \frac{|u_n(x)-u_n(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right)^k\right]\\
&\quad + \lim_{n\to\infty}\frac{\mu}{q}\int_\Omega |u_n|^q \mathrm{d}x - \lim_{n\to\infty}\frac{\lambda}{1-\gamma}\int_\Omega g(x)|u_n|^{1-\gamma}\,\mathrm{d}x - \lim_{n\to\infty}\int_\Omega F(x,u_n)\mathrm{d}x\\
&> J(u_*)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

由引理 3.6，存在正数 t^+ 使得 $t^+u_* \in N_\lambda^+$，进一步我们得到

$$\iint_Q \frac{|t^+u_*(x)-t^+u_*(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x \le \liminf_{n\to\infty} \iint_Q \frac{|t^+u_n(x)-t^+u_n(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x \text{。} \tag{4.5}$$

由控制收敛定理，我们得到

$$Q(t^+u_*) = \lim_{n\to\infty} Q(t^+u_n),\quad R(t^+u_*) = \lim_{n\to\infty} R(t^+u_n),\quad S(t^+u_*) = \lim_{n\to\infty} S(t^+u_n) \text{。} \tag{4.6}$$

因此，

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\varphi'_{u_n}(t^+) &= \liminf_{n\to\infty}\left[a(t^+)^{p-1}\iint_Q \frac{|u_n(x)-u_n(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x + b(t^+)^{pk-1}\left(\iint_Q \frac{|u_n(x)-u_n(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right)^k\right.\\
&\quad \left. + \mu(t^+)^{q-1}\int_\Omega |u_n|^q\,\mathrm{d}x - \lambda(t^+)^{-\gamma}\int_\Omega g(x)|u_n|^{1-\gamma}\,\mathrm{d}x - (t^+)^{r-1} r\int_\Omega F(x,u_n)\mathrm{d}x\right]\\
&> \frac{1}{t^+}\left[a\iint_Q \frac{|t^+u_*(x)-t^+u_*(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x + b\left(\iint_Q \frac{|t^+u_*(x)-t^+u_*(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right)^k\right.\\
&\quad \left. + \mu(t^+)^q\int_\Omega |u_*|^q\,\mathrm{d}x - \lambda\int_\Omega g(x)|t^+u_*|^{1-\gamma}\mathrm{d}x - r\int_\Omega f(x,t^+u_n)t^+u_n\mathrm{d}x\right]\\
&= \varphi'_{u_*}(t^+) = 0.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

另一方面，因为 $u_n \in N_\lambda^+$，所以 $\varphi'_{u_n}(1) = 0$ 且 $\varphi''_{u_n}(1) > 0$。由定理 3.6，对于所有的 $t \in (0,1)$，我们有 $\varphi'_{u_n}(t) < 0$。因此从(4.7)式，很容易得到 $t^+ > 1$。又因为 $t^+u_* \in N_\lambda^+$，由引理 3.6，我们得到 $\varphi_{u_*}(t)$ 在 $(0,t^+)$ 上

是递减的，所以，通过(4.4)，我们总结出

$$J\left(t^{+}u_{*}\right)\le J\left(u_{*}\right)<\lim_{n\to\infty}J\left(u_{n}\right)=\inf_{u\in N_{\lambda}^{+}}J\left(u\right)。$$

显然，这和 $t^{+}u_{*}\in N_{\lambda}^{+}$ 是矛盾的。因此，当 $n\to\infty$ 时，在 X_0 中有 $u_n\to u_*$ 且 $u_*\in N_{\lambda}^{+}$。证毕。

命题 4.2 如果 $\lambda\in\left(0,\lambda^{*}\right)$，那么泛函 J 有一个极小值点 $u_{\#}\in N_{\lambda}^{-}$，满足

$$J\left(u_{\#}\right)=\theta^{-}>0。$$

证明： 令 $\{u_n\}$ 是 N_{λ}^{-} 上的极小化序列使得

$$J\left(u_n\right)\to\theta^{-}。$$

由引理 3.3 的证明过程，我们得知 $\{u_n\}$ 在 X_0 上是有界的，因为 X_0 是一个自反的巴拿赫空间，所以存在 $u_{\#}\in X_0$ 使得

$u_n\rightharpoonup u_{\#}$，在 X_0 中，

$u_n\to u_{\#}$，在 $L^{\beta}(\Omega)$ 中，$1\le\beta<p_s^{*}$，

$u_n\to u_{\#}$，在 Ω 中几乎处处成立。

类似于命题 4.1 的证明，很容易得到

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}f\left(x,u_n\right)u_n\mathrm{d}x=\int_{\Omega}f\left(x,u_{\#}\right)u_{\#}\mathrm{d}x,\tag{4.8}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}g\left(x\right)\left|u_n\right|^{1-\gamma}\mathrm{d}x=\int_{\Omega}g\left(x\right)\left|u_{\#}\right|^{1-\gamma}\mathrm{d}x。\tag{4.9}$$

我们说 $u_{\#}\ne0$，事实上，如果 $u_{\#}=0$，由(4.8)，我们得到当 $n\to\infty$ 时，

$$S\left(u_n\right)\to0。\tag{4.10}$$

因为 $u_n\in N_{\lambda}^{-}$，利用(3.1)和引理 3.5，我们得到

$$0<K<J\left(u_n\right)=\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{1-\lambda}\right)P\left(u\right)+\left(\frac{1}{pk}-\frac{1}{1-\lambda}\right)P\left(u\right)+\left(\frac{1}{1-\lambda}-\frac{1}{r}\right)S\left(u\right)。$$

于是我们得到 $0<K<J\left(u_n\right)<0$，显然是矛盾的。因此，存在一个正实数 t^{-}，使得 $t^{-}u_{\#}\in N_{\lambda}^{-}$。类似于命题 4.1 的证明，容易得到当 $n\to\infty$ 时，在 X_0 中有 $u_n\to u_{\#}$ 且 $u_{\#}\in N_{\lambda}^{-}$。证毕。

类似于[26]中引理 3.7 的证明，我们可以得到如下引理。

引理 4.1 假设(H_1)~(H_3)成立，$u_*\in N_{\lambda}^{\pm}$，那么存在 $\varepsilon>0$ 和一个连续函数

$$\beta:B_{\varepsilon}\left(0\right)\to\left(0,\infty\right)$$

使得

$$\beta\left(0\right)=1,\beta\left(w\right)\left(u+w\right)\in N_{\lambda}^{\pm},\forall w\in B_{\varepsilon}\left(0\right),$$

其中 $B_{\varepsilon}\left(0\right)=\left\{w\in X_0:\|w\|<\varepsilon\right\}$。

定理 1.1 的证明： 通过引理 4.1，我们可以找到 $\vartheta(t)>0$，$t\in\left[0,t_0\right]$ 使得

$$\vartheta(t)\left(u_*+th\right)\in N_{\lambda}^{+}$$

和

$$\vartheta(t)\to1，当 t\to0^{+}$$

成立。因此，由命题 4.1，我们有，对于任意的 $t\in\left[0,t_0\right]$，

$$m = J(u_*) \le J\left(\vartheta(t)(u_* + th)\right)。$$

因此对于所有的$t \in [0, t_1]$，$0 < t_1 \le t_0$，我们有

$$m \le J(u_*) \le J(u_* + th)。$$

因此

$$0 \le J(u_* + th) - J(u_*)。$$

在上式两边同时除以 t，且令$t \to 0^+$，通过简单的计算，可以得到

$$\begin{aligned} &a\iint_Q \frac{|u_*(x)-u_*(y)|^{p-2}(u_*(x)-u_*(y))(h(x)-h(y))}{|x-y|^{N+ps}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &+b\iint_Q \frac{|u_*(x)-u_*(y)|^{pk-2}(u_*(x)-u_*(y))(h(x)-h(y))}{|x-y|^{N+spk}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &-\lambda\int_\Omega g(x)u_*^{-\gamma}(x)h(x)\mathrm{d}x - \int_\Omega f(x,u_*)h(x)\mathrm{d}x \ge 0. \end{aligned}$$

在上式中，用$-h$ 代替 h，很容易得到$u_* \in N_\lambda^+$是问题(1.1)的一个非平凡解。同样的道理，可以得到$u_\# \in N_\lambda^-$也是问题(1.1)的一个非平凡解。因为N_λ^+和N_λ^-是不相交的。所以，问题(1.1)有两个非平凡解。证毕。

参考文献

[1] Cabré, X. and TanJ. G. (2010) Positive Solutions of Nonlinear Problem Involving the Square Root of the Laplacian. *Advances in Mathematics*, **224**, 2052-2093. https://doi.org/10.1016/j.aim.2010.01.025

[2] Servadei, R. and Valdinoci, E. (2012) Mountain Pass Solutions for Non-Local Elliptic Operators. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **389**, 887-898. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.12.032

[3] Servadei, R. and Valdinoci, E. (2013) Variational Methods for Non-Local Operators of Elliptic Type. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **33**, 2105-2137. https://doi.org/10.3934/dcds.2013.33.2105

[4] Daoues, A. and Hammami, A. (2021) Multiplicity Results of a Nonlocal Problem Involving Concave-Convex Nonlinearities. *Mathematical Notes*, **109**, 192-207. https://doi.org/10.1134/S0001434621010235

[5] Barrios, B., Coloradoc, E., Servadei, R. and Soriaa, F. (2015) A Critical Fractional Equation with Concave-Convex Power Nonlinearities. *Annales de I'Institut Henri Poincare*, **32**, 875-900. https://doi.org/10.1016/j.anihpc.2014.04.003

[6] Alsulami, H., Kirane, M., Alhodily, S., Saeed, T. and Nyamoradi, N. (2020) Existence and Multiplicity of Solutions to Fractional P-Laplacian Systems with Concave-Convex Nonlinearities. *Bulletin of Mathematical Sciences*, **10**, Article ID: 2050007. https://doi.org/10.1142/S1664360720500071

[7] Molica Bisci, G. and Servadei, R. (2015) Lower Semicontinuity of Functionals of Fractional Type and Applications to Nonlocal Equations with Critical Sobolev Exponent. *Advance in Differential Equations*, **20**, 635-660. https://doi.org/10.57262/ade/1431115711

[8] Franzina, G. and Palatucc, G. (2014) Fractional P-Eigenvalues. *Rivista di Matematica della Università di Parma*, **5**, 373-386.

[9] Lindgren, E. and Lindqvist, P. (2013) Fractional Eigenvalues. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **49**, 795-826. https://doi.org/10.1007/s00526-013-0600-1

[10] Razani, A. and Behboudi, F. (2023) Solutions of A (P, Q)-Laplacian Equation Involving a Super-Linear and a Singular Terms. *Ricerche di Matematica*, **72**, 379-397. https://doi.org/10.1007/s11587-022-00732-2

[11] Crandall, M.G., Rabinowitz, P.H. and Tartar, L. (1977) On a Dirichlet Problem with a Singular Nonlinearity. *Communication in Partial Differential Equations*, **2**, 193-222. https://doi.org/10.1080/03605307708820029

[12] Afrouzi, G.A., Mahdavi, S. and Neghizadeh, Z. (2017) The Nehari Manifold for P-Laplacian Equation with Dirichlet Boundary Condition. *Nonlinear Analysis*, **12**, 143-155. https://doi.org/10.15388/NA.2007.12.2.14705

[13] Ben Ali, K., Ghanmi, A. and Kefi, K. (2017) Minimax Method Involving Singular P(X)-Kirchhoff Equation. *Journal of Mathematical Physics*, **58**, Article ID: 111505. https://doi.org/10.1063/1.5010798

[14] Biswas, R. and Tiwari, S. (2020) Nehari Manifold for Fractional P(.)-Laplacian System Involving Concavconvex Nonlinearities. *Electronic Journal of Differential Equations*, No. 98, 1-29. https://doi.org/10.58997/ejde.2020.98

[15] Ghanmi, A. and Saoudi, K. (2016) The Nehari Manifold for a Singular Elliptic Equation Involving the Fractional Laplace Operator. *Fractional Differential Calculus*, **6**, 201-217. https://doi.org/10.7153/fdc-06-13

[16] Yang, D.D. and Bai, C.Z. (2020) Multiplicity of Weak Positive Solutions for Fractional p & q Laplacian Problem with Singular Nonlinearity. *Journal of Function Spaces*, **2020**, Article ID: 7424763. https://doi.org/10.1155/2020/7424763

[17] Fiscella, A. and Kumar Mishra, P. (2018) The Nehari Manifold for Fractional Kirchhoff Problems Involving Singular and Critical Terms. *Nonlinear Analysis*, **186**, 6-32. https://doi.org/10.1016/j.na.2018.09.006

[18] Fiscella, A. (2019) A Fractional Kirchhoff Problem Involving a Singular Term and a Critical Nonlinearity. *Advances in Nonlinear Analysis*, **8**, 645-660. https://doi.org/10.1515/anona-2017-0075

[19] Caponi, M. and Pucci, P. (2016) Existence Theorems for Entire Solutions of Stationary Kirchhoff Fractional p-Laplacian Equations. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, **195**, 2099-2129. https://doi.org/10.1007/s10231-016-0555-x

[20] Zu, S.C. and Suo, H.M. (2022) Multiple Solutions for a Fractional p-Kirchhoff Equation with Critical Growth and Low Order Perturbations. *AIMS Mathematics*, **7**, 12897-12912. https://doi.org/10.3934/math.2022714

[21] Brezis, H. and Mironescu, P. (2001) Composition in Fractional Sobolev Spaces. *Discrete & Continuous Dynamical Systems*, **7**, 241-246. https://doi.org/10.3934/dcds.2001.7.241

[22] Demengel, F. and Demengel, G. (2012) Functional Spaces for the Theory of Elliptic Partial Differential Equations. Springer, London. https://doi.org/10.1007/978-1-4471-2807-6

[23] DiNezza, E., Palatucci, G. and Valdinoci, E. (2012) Hitchhiker's Guide to the Fractional Sobolev Spaces. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, **136**, 521-573. https://doi.org/10.1016/j.bulsci.2011.12.004

[24] Drabek, P. BS Pohozaev, S.I. (1997) Positive Solutions for the p-Laplacian: Application of the Fibering Method. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Section A*: *Mathematics*, **127**, 703-726. https://doi.org/10.1017/S0308210500023787

[25] Brezis, H. and Liebesgue, E. (1983) A Relation between Pointwise Convergence of Function and Convergence of Functionals. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **88**, 486-490. https://doi.org/10.2307/2044999

[26] Wang, X. and Zhang, L. (2019) Existence and Multiplicity of Weak Positive Solutions to a Class of Fractional Laplacian with a Singular Nonlinearity. *Results in Mathematics*, **74**, Article No. 81. https://doi.org/10.1007/s00025-019-1004-0