Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(4), 170-175
Published Online April 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.144123

Hans汉斯

关于Lavie导数的一点注记

张　庭，赵　林，王念军

贵州师范大学数学科学学院，贵州　贵阳

收稿日期：2024年3月5日；录用日期：2024年3月25日；发布日期：2024年4月23日

摘　要

阐述了Aharonov不变量、Lavie导数以及Schwarzian导数三者之间的联系，进一步，利用Aharonov不变量给出一个共形映射关于Aharonov不变量的显式表达式，且说明了Lavie导数是属于Banach空间的一个闭子空间。

关键词

单叶函数，Lavie导数，Aharonov不变量，Schwarzian导数

A Note on Lavie Derivative

Ting Zhang, Lin Zhao, Nianjun Wang

School of Mathematical Sciences, Guizhou Normal University, Guiyang Guizhou

Received: Mar. 5th, 2024; accepted: Mar. 25th, 2024; published: Apr. 23rd, 2024

Abstract

The relations among Aharonov invariants, Lavie derivative and Schwarzian derivative are discussed. Furthermore, using Aharonov invariants to give an explicit formula for a conformal mapping with respect to Aharonov invariants, it is further shown that Lavie derivative belongs to a closed subspace of Banach space.

Keywords

Univalent Function, Lavie Derivative, Aharonov Invariants, Schwarzian Derivative

文章引用: 张庭, 赵林, 王念军. 关于 Lavie 导数的一点注记[J]. 理论数学, 2024, 14(4): 170-175.
DOI: 10.12677/pm.2024.144123

1. 引言及主要结果

Aharonov 不变量，是经典的 Schwarzian 导数的推广，并且在亚纯函数的单叶性以及拟共形扩张中都起了至关重要的作用。而由 Lavie 引入的 Lavie 导数在许多拟共形映射的研究中也有许多漂亮的结果。Lavie 导数与 Schwarzian 导数的高阶导数以及 Aharonov 不变量之间都存在着密切的联系。除此之外，在本文中我们还将给出有关 Aharonov 不变量和 Lavie 导数的一个刻画。

为了叙述相关背景和结果，我们先从一些简单的定义和记号开始。我们用 $\mathbb{C}$ 表示复平面，Δ 表示单位圆盘 $\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$，而 $S^1=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$。对于在复平面 $\mathbb{C}$ 内的区域 D 上一个单叶解析函数 f，且在点 z 处导数 $f'(z)\neq 0$，解析函数 f 在 z 点处的 Schwarzian 导数 S_f 定义为

$$S_f=\left(N_f\right)'-\frac{1}{2}\left(N_f\right)^2,\ N_f=\left(\log f'\right)',$$

其中 N_f 称为 f 的 pre-Schwarzian 导数。

Schwarzian 导数具有下列性质：

性质 1 如果 f 是一个分式线性变换，那么

$$S_f=0.$$

性质 2 如果函数 f 在定义域上不为 0，那么

$$S_f=S_{\frac{1}{f}}$$

该性质可用于定义局部单射亚纯函数的 Schwarzian 导数。

性质 3 Schwarzian 导数满足复合公式

$$S_{f\circ g}=\left(S_f\circ g\right)g'^2+S_f$$

特别地，如果 g 是一个 Möbius 变换，那么

$$S_{f\circ g}=\left(S_f\circ g\right)g'^2$$

Schwarzian 导数在单叶函数和 Teichmüller 空间理论中扮演着一个重要的角色，更多研究详见[1]-[8]。

设 $B_n(\Delta)$ 表示 Δ 内所有的全纯函数 φ 所组成的 Banach 空间，具有下列有限范数

$$\|\varphi\|_n=\sup_{z\in\Delta}|\varphi(z)|\left(1-|z|^2\right)^n,\ n=1,2,\cdots$$

设 $B_n(\Delta)$ 的闭子空间 $B_{n,0}(\Delta)$ 是由所有的属于 $B_n(\Delta)$ 的全纯函数 φ 所组成，并且具有下列有限范数

$$\lim_{|z|\to 1}|\varphi(z)|\left(1-|z|^2\right)^n=0,\ n=1,2,\cdots$$

对于在复平面 $\mathbb{C}$ 内的区域 D 上一个单叶函数 f，具有 $z\in D$， $f(z)\neq\infty$， $f'(z)\neq 0$，考虑生成函数

$$F(f;\zeta,z)=\frac{f'(z)}{f(z)-f(\zeta)}-\frac{1}{z-\zeta}.$$

对每一个 $z\in D$， $|\zeta-z|<1-|z|$，展开成幂级数为

$$F(f;\zeta,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n[f](z)(\zeta-z)^{n-1},$$

则这个量 $\psi_n[f](z)$ 称为 Aharonov 不变量(见[3])。

注意

$$\psi_1[f](z)=\frac{1}{2}\frac{f''(z)}{f'(z)},\ \psi_2[f](z)=\frac{1}{6}\left[\frac{f'''(z)}{f'(z)}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2\right].$$

因此，$2!\psi_1[f]$ 和 $3!\psi_2[f](z)$ 是 f 的 pre-Schwarzian 导数 N_f 和 Schwarzian 导数 S_f。由此，$\psi_n[f], n=2,3,\cdots$，可以看作是高阶 Schwarzian 导数。

Aharonov 在[3]中证明了关于 $\psi_n[f](z)$ 这个量的下列性质：

1) 当 $n=3,4,\cdots$ 时，

$$(n+1)\psi_n[f](z)=\psi'_{n-1}[f](z)+\sum_{k=2}^{n-2}\psi_k[f](z)\psi_{n-k}[f](z).$$

2) 对于 $n\geq 2$，有 Möbius 变换 $g=\dfrac{az+b}{cz+d}$，使得

$$\psi_n[g\circ f](z)=\psi_n[f](z).$$

设 f 是 Δ 中的一个共形映射，由 Lavie [9]引入的 Lavie 导数可以定义为

$$\phi_2[f]=\psi_2[f],\ \phi_n[f]=\frac{1}{n+1}\phi'_{n-1}[f],\ n\geq 3.$$

根据 Aharonov 不变量的定义，我们由

$$\psi_3[f]=\phi_3[f]=\frac{1}{4}\psi'_2[f].$$

这表明当 $n=3$ 时，Aharonov 不变量的情况和 Lavie 导数的情况是一致的。

由此当 $n\geq 4$ 时，对于 Lavie 导数，Harmelin [4]有如下结果。

定理 2 [4]设 f 是 Δ 上的一个共形映射，则我们有

$$\phi'_2[f]=4\phi_3[f],$$

当 $n\geq 4$ 时，则有

$$\phi_n[f]=\frac{3!}{(n+1)!}\phi_2^{(n-2)}[f]=\frac{3!}{(n+1)!}\psi_2^{(n-2)}[f].$$

从上述的两个论断中，我们不难发现，Lavie 导数与 Schwarzian 导数的高阶导数以及 Aharonov 不变量之间都存在着密切的联系。除此之外，在本文中我们还将给出有关 Aharonov 不变量和 Lavie 导数的一个刻画。

我们知道

$$(n+1)\psi_n[f](z)=\psi'_{n-1}[f](z)+\sum_{k=2}^{n-2}\psi_k[f](z)\psi_{n-k}[f](z),$$

通过计算

$$\psi_3[f]=\frac{\psi'_2[f]}{4},$$

$$\psi_4[f]=\frac{\psi''_2[f]}{20}+\frac{\psi_2^2[f]}{5},$$

$$\psi_5[f]=\frac{\psi'''_2[f]}{5!}+\frac{3\psi_2[f]\psi'_2[f]}{20}.$$

设 $0<r<1$， $f_r=f(rz)$，则 f_r 是在 $\overline{\Delta}=\Delta\cup S^1$ 的邻域内的共形映射，设

$$B_{n-2}[f]=\sum_{k=4}^{n}\psi_k[f](z)\psi_{n-k}[f](z),\ n\ge 4.$$

根据 Aharonov 不变量的定义，我们可以得到共形映射 f_r 关于 Aharonov 不变量的一个显式表达式。
定理 3 当 $n\ge 5$ 时， f_r 是 $\overline{\Delta}=\Delta\cup S^1$ 的邻域内的共形映射，则有

$$\psi_n[f_r](z)=\frac{3!}{(n+1)!}\psi_2^{(n-2)}[f_r]+\frac{3!}{(n+1)!}\left(\frac{18}{5!}\psi_2[f_r]\psi_2'[f_r]\right)^{(n-5)}+\sum_{i=6}^{n}\frac{i!}{(n+1)!}B_{i-2}^{(n-i)}.$$

我们知道一个单位圆盘 Δ 存在可以拟共形延拓到整个复平面 $\mathbb{C}$ 的共形映射 f，对此，我们有如下结果。
由 Stroethoff [10]给出了 Bloch 函数的一些高阶导数的表征。
引理 1 [10]设 φ 是 Δ 上的一个全纯函数且 $n\ge 1$，则下列表述是等价的：
1) $\varphi\in B_2(\Delta)$ (或 $\varphi\in B_{2,0}(\Delta)$)，
2) $\varphi^{(n)}\in B_{n+2}(\Delta)$ (或 $\varphi^{(n)}\in B_{n+2,0}(\Delta)$)。
对于 Lavie 导数我们得到如下结果。
定理 4 设 $n\ge 2$，f 是 Δ 上的一个有界共形函数，如果 $\phi_2\in B_{2,0}(\Delta)$，则 $\phi_n[f]\in B_{n,0}(\Delta)$。

2. 主要结果的证明

本节对本文的主要结果进行刻画，即开始定理 3、定理 4 的证明。
接下来开始定理 3 的证明。
根据式子

$$(n+1)\psi_n[f](z)=\psi_{n-1}'[f](z)+\sum_{k=2}^{n-2}\psi_k[f](z)\psi_{n-k}[f](z),$$

又

$$B_{n-2}[f]=\sum_{k=4}^{n}\psi_k[f](z)\psi_{n-k}[f](z),\ n\ge 4.$$

我们有

$$\psi_n[f_r]=\frac{1}{n+1}\left(\psi_n'[f_r]+B_{n-2}[f_r]\right),$$

重复利用上式递推可得

$$\begin{aligned}\psi_n[f_r]&=\frac{1}{(n+1)n}\psi_{n-2}''[f_r]+\frac{1}{(n+1)n}B_{n-3}'[f_r]+\frac{1}{n+1}B_{n-2}[f_r]\\&=\frac{1}{(n+1)n}\left(\frac{1}{n-1}\psi_{n-2}'''[f_r]+\frac{1}{n-1}B_{n-4}'[f_r]\right)\\&\quad+\frac{1}{(n+1)n}B_{n-3}'[f_r]+\frac{1}{n+1}B_{n-2}[f_r]\\&=\frac{1}{(n+1)n\cdots 7}\psi_5^{(n-5)}[f_r]+\frac{1}{(n+1)n\cdots 7}B_4^{(n-6)}[f_r]+\cdots\\&\quad+\frac{1}{(n+1)n}B_{n-3}'[f_r]+\frac{1}{(n+1)}B_{n-2}[f_r].\end{aligned}$$

因为

$$\psi_5[f]=\frac{\psi_2''[f]}{5!}+\frac{3\psi_2[f]\psi_2'[f]}{20},$$

所以代入可得

$$\begin{aligned}\psi_n[f_r]&=\frac{1}{(n+1)n\cdots7\cdot5!}\psi_2^{(n-2)}[f_r]+\frac{1}{(n+1)n\cdots7}\left(\frac{3\psi_2\psi_2'}{20}\right)^{(n-5)}\\&\quad+\frac{1}{(n+1)n\cdots7}B_4^{(n-6)}[f_r]+\cdots+\frac{1}{(n+1)n}B_{n-3}'[f_r]+\frac{1}{(n+1)}B_{n-2}[f_r]\\&=\frac{1}{(n+1)n\cdots7\cdot5!}\psi_2^{(n-2)}[f_r]+\frac{1}{(n+1)n\cdots7}\left(\frac{18}{5!}\psi_2\psi_2'\right)^{(n-5)}\\&\quad+\frac{1}{(n+1)n\cdots7}B_4^{(n-6)}[f_r]+\cdots+\frac{1}{(n+1)n}B_{n-3}'[f_r]+\frac{1}{(n+1)}B_{n-2}[f_r]\\&=\frac{3!}{(n+1)!}\psi_2^{(n-2)}[f_r]+\frac{3!}{(n+1)!}\left(\frac{18}{5!}\psi_2[f_r]\psi_2'[f_r]\right)^{(n-5)}+\sum_{i=6}^{n}\frac{i!}{(n+1)!}B_{i-2}^{(n-i)}.\end{aligned}$$

即定理 3 得证。

接下来对定理 4 进行证明。

由引理 1，我们可以有关系 $\psi_2[f]\in B_{2,0}(\Delta)$，其等价于

$$\lim_{|z|\to1}\left|\psi_2^{(n)}[f](z)\right|\left(1-|z|^2\right)^{n+2}=0,\ \ n=1,2,\cdots.$$

则由 Aharonov 不变量与 Lavie 导数之间的关系，即

当 $n=2$ 时有

$$\psi_2[f]=\phi_2[f]$$

故有

$$\lim_{|z|\to1}\left|\phi_2^{(n)}[f](z)\right|\left(1-|z|^2\right)^{n+2}=0,\ \ n=1,2,\cdots.$$

通过定理 2 可知

$$\phi_n[f]=\frac{3!}{(n+1)!}\psi_2^{(n-2)}[f],\ \ n\ge3.$$

故

$$\psi_2^{(n-2)}[f]=\frac{(n+1)!}{3!}\phi_n[f],\ \ n\ge3.$$

由此可以推导出

$$\lim_{|z|\to1}\left|\phi_n[f](z)\right|\left(1-|z|^2\right)^{n}=0,\ \ n=3,4,5,\cdots.$$

这表明 $\phi_n[f]\in B_{n,0}(\Delta)$，证毕。

参考文献

[1] Nehari, Z. (1949) The Schwarzian Derivatives and Schlicht Functions. *Bulletin of the American Mathematical Society*,

55, 545-551. https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1949-09241-8

[2] Lehto, O. (2012) Univalent Functions and Teichmüller Spaces. Springer Science & Business Media, Berlin.

[3] Aharonov, D. (1969) A Necessary and Sufficient Condition for Univalence of a Meromorphic Function. *Duke Mathematical Journal*, **36**, 599-604. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-69-03671-0

[4] Harmelin, R. (1982) Invariant Operators and Univalent Functions. *Transactions of the American Mathematical Society*, **272**, 721-731. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1982-0662063-1

[5] Liu, X. and Shen, Y. (2022) Integrable Teichmüller Space. *Mathematische Zeitschrift*, **302**, 2233-2251. https://doi.org/10.1007/s00209-022-03141-1

[6] Shen, Y. (2022) VMO-Teichmüller Space on the Real Line. *Annales Fennici Mathematici*, **47**, 57-82. https://doi.org/10.54330/afm.112456

[7] Li, Q. and Shen, Y. (2023) Some Notes on Integrable Teichmüller Space on the Real Line. *Filomat*, **37**, 2633-2645. https://doi.org/10.2298/FIL2308633L

[8] Krushkal, S.L. (2021) Teichmüller Space Theory and Classical Problems of Geometric Function Theory. *Journal of Mathematical Sciences*, **258**, 276-289. https://doi.org/10.1007/s10958-021-05546-5

[9] Lavie, M. (1969) The Schwarzian Derivative and Disconjugacy of *n*-th Order Liner Differential Equations. *Canadian Journal of Mathematics*, **21**, 235-249. https://doi.org/10.4153/CJM-1969-023-9

[10] Stroethoff, K. (1989) Besov-Type Characterizations for Bloch Space. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **39**, 405-420. https://doi.org/10.1017/S0004972700003324