Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(4), 176-183
Published Online April 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.144124

高等数学中积分上限函数的性质与应用

马纪英*，赵春艳

上海理工大学理学院 上海

收稿日期：2024年2月29日；录用日期：2024年3月20日；发布日期：2024年4月24日

摘 要

积分上限函数是高等数学课程中非常重要的一类函数，由此可以证明微积分基本定理。积分上限函数在各类数学竞赛和考研试题中扮演着重要角色，是常考常新的重要知识点。由于积分上限函数的定义方式不同于普通函数，学生不太容易掌握，是课程学习的一个难点。本文在高等数学教材的基础上，总结归纳了积分上限函数推广的求导公式，并且进一步讨论了周期性和奇偶性。接着本文探讨了积分上限函数的应用，包括证明柯西－施瓦茨不等式，中值问题，以及与微分方程相结合的问题等。

关键词

积分上限函数，可导性，奇偶性，中值问题

The Properties and Applications of Integral Upper Limit Functions in Advanced Mathematics

Jiying Ma*, Chunyan Zhao

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Feb. 29th, 2024; accepted: Mar. 20th, 2024; published: Apr. 24th, 2024

Abstract

The upper limit function of integration is a very important type of function in advanced mathematics, which can prove the basic theorem of calculus. The upper limit function of integration plays an important role in various mathematics competitions and postgraduate entrance exams, and it is often tested and updated. Due to the different definition of integral upper limit functions from common functions, it is not easy for students to master, which is a difficult point in course

*通讯作者。

文章引用: 马纪英, 赵春艳. 高等数学中积分上限函数的性质与应用[J]. 理论数学, 2024, 14(4): 176-183.
DOI: 10.12677/pm.2024.144124

learning. On the basis of advanced mathematics, this article summarizes the derivation formula of integral upper limit functions, and discusses its periodicity and odevity. Next, this article explores the applications of integral upper limit functions, including proving the Cauchy-Schwartz inequality, mean value problems, and applications related to differential equations.

Keywords

Integral Upper Limit Function, Differentiability, Odevity, Mean Value Problems

1. 引言

高等数学是绝大多数理工科专业的学科基础课，其主要内容是微积分，是最为重要的公共基础课之一。高等数学的课程内容繁多，定理和公式互相关联，考试内容多变，学习难度较大。微积分基本定理揭示了积分学两类基本问题——不定积分与定积分两者之间的内在联系，在整个课程体系中占据着关键和核心地位[1]。

在高等数学的教材中，积分通常分为不定积分和定积分两部分。从微积分创立和发展的角度看，定积分是莱布尼兹的着眼点，而不定积分则是牛顿的着眼点[2]。牛顿的巨著《自然哲学的数学原理》中，第一篇第一章的引理 2~4 都是讨论可变上限的定积分的[3]，即我们现在所称的积分上限函数。牛顿是把积分看成一个流动的量(即具有可变上限的定积分)着眼的。

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，则定义积分上限函数为 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，这里 x 为积分上限，也是函数的变量，而 t 为积分变量。如果上限 x 在区间 $[a,b]$ 上任意变动，那么对于每一个取定的 x 值，定积分有一个对应值，所以它在 $[a,b]$ 上确实定义了一个函数。积分上限函数的定义与普通函数不一样，其函数值是一个定积分。

关于该积分上限函数的可导性，有下述重要性质。

定理 1 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，那么积分上限函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上可导，并且其导数为 $F'(x)=f(x)$。

该定理表明，积分上限函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数。由此我们可以证明微积分基本定理，它给出利用原函数计算定积分的公式。

定理 2 (微积分基本定理)如果函数 $\Phi(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个原函数，那么 $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\Phi(b)-\Phi(a)$。

这两个定理的证明可参考常用的高等数学教材[1]。微积分基本定理中的公式叫做牛顿－莱布尼兹公式，也称为微积分基本公式。该公式为定积分的计算提供了一个普遍、有效而又简便的方法，使得定积分的计算大为简化[4]。

通常的高等数学教材中，主要关注积分上限函数的可导性，但较少讨论积分上限函数的周期性及奇偶性等性质[5]。本文在此基础上，进一步总结归纳变限积分函数的求导公式，探讨积分上限函数的性质及其应用，包括证明柯西－施瓦茨不等式，某些中值问题，与微分方程结合的题目，以及积分上限函数在实际问题中的应用等。

2. 积分上限函数的常用性质

普通函数所涉及的问题，比如复合函数，求极限，中值问题，奇偶性与周期性等问题，积分上限函数都有相应的结论[6]。我们首先讨论积分上限复合函数的求导公式。

性质 1 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，$\varphi(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可导，则积分上限复合函数 $\int_a^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t$ 可导，并且 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t = f(\varphi(x))\varphi'(x)$。

证 令 $u=\varphi(x)$，则 $F(u)=\int_a^u f(t)\mathrm{d}t$ 可导，根据定理 1 和复合函数的求导公式，可得 $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f(u)\varphi'(x)=f(\varphi(x))\varphi'(x)$。

性质 2 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，$\psi(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可导，则积分下限复合函数 $\int_{\psi(x)}^{b} f(t)\mathrm{d}t$ 可导，并且 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\psi(x)}^{b} f(t)\mathrm{d}t = -f(\psi(x))\psi'(x)$。

该性质可由性质 1 简单推导可得。将两个性质结合起来，就得到下面更一般形式的求导公式[7]。

性质 3 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，$\varphi(x),\psi(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可导，则积分变限函数 $\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t$ 可导，并且 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t = f(\varphi(x))\varphi'(x)-f(\psi(x))\psi'(x)$。

性质 4 如果函数 $f(x)$ 连续，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的任一原函数，则

1) 若 $F(x)$ 是周期为 T 的周期函数，则 $f(x)$ 是周期为 T 的周期函数；

2) 若 $f(x)$ 是周期为 T 的周期函数，则 $\int_x^{x+T} f(t)\mathrm{d}t=\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$；

3) 若 $f(x)$ 是奇函数，则 $F(x)$ 是偶函数；

4) 若 $f(x)$ 是偶函数，则 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是奇函数。

证 1) 若 $F(x)$ 是周期为 T 的周期函数，则 $F(x+T)=F(x)$，两边同时求导，得 $F'(x+T)=F'(x)$，即 $f(x+T)=f(x)$。

2) 若 $f(x)$ 是周期为 T 的周期函数，则 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^{x+T} f(t)\mathrm{d}t=f(x+T)-f(x)=0$，即变限函数 $\int_x^{x+T} f(t)\mathrm{d}t$ 与起点 x 无关，因此 $\int_x^{x+T} f(t)\mathrm{d}t=\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$。

3) 若 $f(x)$ 是奇函数，记 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，作变量代换，令 $u=-t$，则 $\Phi(-x)=\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x -f(-u)\mathrm{d}u=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=\Phi(x)$，即 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是偶函数。又 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的任一原函数，则 $F(x)=\Phi(x)+C$，故 $F(x)$ 是偶函数。

4) 若 $f(x)$ 是偶函数，记 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，作变量代换，令 $u=-t$，则 $\Phi(-x)=\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x -f(-u)\mathrm{d}u=\int_0^x -f(u)\mathrm{d}u=-\Phi(x)$，即 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是奇函数。

下述例题展示了积分上限函数奇偶性的判断，并且综合讨论最值问题。

例 1 设 $F(x)=\int_0^x (t-t^3)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$，1) 证明：$F(x)$ 为偶函数；

2) 求 $F(x)$ 在 $[-2,2]$ 上的最大值、最小值。

解 1) $F(-x)=\int_0^{-x}(t-t^3)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \overset{u=-t}{=} \int_0^x -(-u+u^3)\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u=\int_0^x (u-u^3)\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u=F(x)$，

故 $F(x)$ 为偶函数。

2) 令 $F'(x)=(x-x^3)\mathrm{e}^{-x^2}=0$，得驻点：$x=0$，$x=\pm1$。

因为 $F(x)$ 为偶函数，故 $F(-2)=F(2)=\int_0^2 (t-t^3)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\dfrac{2}{\mathrm{e}^4}$，且

$$F(-1)=F(1)=\int_0^1 (t-t^3)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\mathrm{e}}，\quad F(0)=0。$$

所以 $F(x)$ 在 $[-2,2]$ 上的最大值为 $F(-1)=F(1)=\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$，最小值 $F(0)=0$。

3. 柯西－施瓦茨不等式的证明

柯西－施瓦茨不等式在高等数学中应用广泛，既有有限项相加的形式，也有积分表述的形式。积分形式的不等式证明方法多样，其中构造积分上限函数是常用的证明方法。

定理 3 设 $f(x)$，$g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上均连续，则有如下的柯西－施瓦茨不等式

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2 \le \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x。$$

证 将不等式中积分上限的常量变为变量，定义如下函数

$$F(x)=\int_a^x f^2(t)\mathrm{d}t\int_a^x g^2(t)\mathrm{d}t-\left[\int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t\right]^2，$$

显然 $F(a)=0$。并且

$$\begin{aligned}F'(x)&=f^2(x)\int_a^x g^2(t)\mathrm{d}t+g^2(x)\int_a^x f^2(t)\mathrm{d}t-2f(x)g(x)\int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t\\&=\int_a^x\left[f^2(x)g^2(t)-2f(x)g(x)f(t)g(t)+g^2(x)f^2(t)\right]\mathrm{d}t\\&=\int_a^x\left[f(x)g(t)-g(x)f(t)\right]^2\mathrm{d}t\ge 0\end{aligned}$$

故 $F(x)$ 在 $x\ge a$ 上单增，因此 $F(x)\ge F(a)=0$，于是 $F(b)\ge F(a)=0$，即 $\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2 \le \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$，不等式得证。

4. 中值问题

例 2 设 $g(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数，$f(x)=\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$，试证：在区间 (a,b) 内，方程 $g(x)-\dfrac{f(b)}{b-a}=0$ 至少有一个实根。

证 作函数 $F(x)=\int_a^x g(t)\mathrm{d}t-\dfrac{f(b)}{b-a}(x-a)$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$F(a)=F(b)=0$，由罗尔中值定理，$\exists\xi\in(a,b)$，使

$$F'(\xi)=g(\xi)-\frac{f(b)}{b-a}=0，$$

即方程 $g(x)-\dfrac{f(b)}{b-a}=0$ 在区间 (a,b) 内至少有一个实根。

例 3 设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且 $\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x=\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x=0$，求证：至少存在两点 $\alpha,\beta\in(0,\pi)$，使 $f(\alpha)=f(\beta)=0$.

证 设 $F(x)=\int_0^x f(t)\sin t\mathrm{d}t$，则 $F(0)=F(\pi)=0$，由罗尔中值定理 $\exists\alpha\in(0,\pi)$，使 $F'(\alpha)=f(\alpha)\sin\alpha=0$，因为 $\sin\alpha\ne 0$，所以 $f(\alpha)=0$。

假设仅存在一个 $\alpha\in(0,\pi)$ 使 $f(\alpha)=0$，则 $f(x)$ 在区间 $(0,\alpha)$ 与 (α,π) 内一定异号(否则不可能有 $\int_0^{\pi} f(x)\sin x\mathrm{d}x=0$)，因为函数 $\sin(x-\alpha)$ 也在区间 $(0,\alpha)$ 与 (α,π) 内异号，从而 $f(x)\sin(x-\alpha)$ 在区间 $(0,\alpha)$ 与 (α,π) 内同号，所以

$$\int_0^{\pi} f(x)\sin(x-\alpha)\mathrm{d}x\neq 0 。$$

但由已知条件可得

$$\int_0^{\pi} f(x)\sin(x-\alpha)\mathrm{d}x=\cos\alpha\int_0^{\pi} f(x)\sin x\mathrm{d}x-\sin\alpha\int_0^{\pi} f(x)\cos x\mathrm{d}x=0,$$

矛盾，所以至少存在两点 $\alpha,\beta\in(0,\pi)$，使 $f(\alpha)=f(\beta)=0$。

例 4 设函数 $f(x)\in[a,b]$，且满足 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=0$。证 $f(x)$ 在 (a,b) 内至少存在两个零点。

证 令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $F'(x)=f(x)$，且由已知条件得，$F(a)=F(b)=0$。另一方面，由分部积分法可知，

$$\int_a^b f(x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int_a^b \mathrm{e}^x\mathrm{d}F(x)=\left[\mathrm{e}^xF(x)\right]_a^b-\int_a^b F(x)\mathrm{d}\mathrm{e}^x=-\int_a^b F(x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=0 。$$

故由积分中值定理，$c\in(a,b)$，使得 $F(c)\mathrm{e}^c=0$。又 $\mathrm{e}^c>0$，故 $F(c)=0$。由罗尔定理，$\exists\xi_1\in(a,c)$，$\xi_2\in(c,b)$ 使得 $F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$。即证得 $f(\xi_1)=0=f(\xi_2)$，结论得证。

与积分上限函数有关的题目比较灵活，有时候需要作辅助函数，并且与微分中值定理结合去证明结论。

5. 与周期性有关的问题

下面两个例题为全国硕士研究生入学统一考试的题目，均与积分上限函数的周期性有关。

例 5 (2004.II) 设 $f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\mathrm{d}t$，1) 证明 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数；2) 求 $f(x)$ 的值域。

解 1) $f(x+\pi)=\int_{x+\pi}^{x+\frac{3\pi}{2}}|\sin t|\mathrm{d}t$，设 $t=u+\pi$，则有

$$f(x+\pi)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin(u+\pi)|\mathrm{d}u=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin u|\mathrm{d}u=f(x),$$

故 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数。

2) 因为 $|\sin x|$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，注意到 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数，故只需在 $[0,\pi]$ 上讨论其值域。因为

$f'(x)=\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|-|\sin x|=|\cos x|-|\sin x|$，令 $f'(x)=0$，解得 $x_1=\frac{\pi}{4}$，$x_2=\frac{3\pi}{4}$，且

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}|\sin t|\mathrm{d}t=\sqrt{2}$，又

$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}|\sin t|\mathrm{d}t=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\sin t\mathrm{d}t-\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}}\sin t\mathrm{d}t=2-\sqrt{2}$。而两个区间端点

$$f(0)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin t|\mathrm{d}t=1,\quad f(\pi)=\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}(-\sin t)\mathrm{d}t=1,$$

因而 $f(x)$ 的最小值是 $2-\sqrt{2}$，最大值是 $\sqrt{2}$，故 $f(x)$ 的值域是 $\left[2-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$。

例 6 (2008.I) 设 $f(x)$ 是连续函数，(1)利用定义证明函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 可导，且 $F'(x)=f(x)$；(2)

当 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数时，证明函数 $G(x)=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-x\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t$ 也是以 2 为周期的周期函数。

证 1) 由导数的定义，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_0^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_x^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}f(\xi)=f(x)$$

因此 $F(x)$ 可导，且 $F'(x)=f(x)$。

2) $G(x+2)-G(x)=2\left(\int_0^{x+2}f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)-2\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t=2\int_x^{x+2}f(t)\mathrm{d}t-2\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t$，

由于 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数，故必有 $\int_x^{x+2}f(t)\mathrm{d}t=\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t$，因此 $G(x+2)-G(x)=0$，即 $G(x)$ 以 2 为周期的周期函数。

6. 与微分方程结合的问题

例 7 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续，$f(1)=\frac{5}{2}$，且对所有 x，$t\in(0,+\infty)$，满足条件 $\int_1^{xt}f(u)\mathrm{d}u=t\int_1^x f(u)\mathrm{d}u+x\int_1^t f(u)\mathrm{d}u$，求 $f(x)$。

解 在已知条件等式的两端对 x 求导，得

$$tf(xt)=tf(x)+\int_1^t f(u)\mathrm{d}u,$$

在上式中令 $x=1$，且由 $f(1)=\frac{5}{2}$，可得

$$tf(t)=\frac{5}{2}t+\int_1^t f(u)\mathrm{d}u \tag{1}$$

由于 $f(t)=\frac{5}{2}+\frac{1}{t}\int_1^t f(u)\mathrm{d}u$ 可导，于是在等式(1) 两端对 t 求导，得

$$f(t)+tf'(t)=\frac{5}{2}+f(t),$$

即 $f'(t)=\frac{5}{2t}$，积分得 $f(t)=\frac{5}{2}\ln t+C$。由 $f(1)=\frac{5}{2}$，得 $C=\frac{5}{2}$。故

$$f(x)=\frac{5}{2}(\ln x+1)。$$

例 8 在连接 $A(0,1)$ 和 $B(1,0)$ 两点的一条向上凸的曲线上任取一点 $P(x,y)$，已知曲线与弦 AP 间的面积为 x^3，求该曲线方程。

解：设曲线方程为 $y=f(x)$，则曲线 AP 段对应的曲边梯形面积为 $A_1=\int_0^x f(x)\mathrm{d}x$，直线 AP 与 x 轴构成的梯形面积为 $A_2=\frac{1+y}{2}\cdot x=\frac{x(1+f(x))}{2}$。所以曲线与弦 AP 之间的面积为

$$x^3=A_1-A_2=\int_0^x f(x)\mathrm{d}x-\frac{x(1+f(x))}{2}。$$

上式两边求导，得

$$f(x)-\frac{1+f(x)}{2}-\frac{xf'(x)}{2}=3x^2\text{。}$$

这是关于未知函数的微分方程，方便起见，记 $y=f(x)$，则上式变为

$$y-\frac{1+y}{2}-\frac{xy'}{2}=3x^2\text{。}$$

整理得，$y'-\frac{1}{x}y=-6x-\frac{1}{x}$。该方程为一阶线性微分方程，由求解公式得

$$\begin{aligned} y&=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int\left(-6x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{\int-\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]\\ &=x\left[\int\left(-6x-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}\mathrm{d}x+C\right]\\ &=x\left(-6x+\frac{1}{x}+C\right)=-6x^2+Cx+1 \end{aligned}$$

又因曲线过点 $(1,0)$，所以 $C=5$。进而得到所求曲线方程为 $y=-6x^2+5x+1$。

7. 在实际问题中的应用

积分上限函数及其导数在实际问题中也有广泛的应用。例如，微积分在经济学中有重要应用，函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 称为边际函数，在西方经济学中，有边际成本、边际收入、边际利润等[8]。如果已知边际成本，则其积分上限函数即为总成本，进一步可以计算利润最大化等实际生产问题。

此外，我们考虑物理中变速直线运动中位置函数、速度函数与加速度函数之间的联系。设有一物体在直线上运动，在该直线上取定原点、正方向及单位长度，即成为一数轴。设时刻 t 时，物体所在的位置为 $s(t)$，速度为 $v(t)$，加速度为 $a(t)$。进一步，设初始时刻为 t_0，则物体在时刻 t 的速度为 $v(t)=v(t_0)+\int_{t_0}^{t}a(t)\mathrm{d}t$，在时间间隔 $[t_0,t]$ 内经过的路程为 $\int_{t_0}^{t}v(t)\mathrm{d}t$。关于变速直线运动的问题，我们讨论下述列车制动问题。

例 9 列车沿直线以 20 m/s (相当于 72 km/h)的速度行驶，当制动时列车获得加速度−0.4 m/s^2。问开始制动后多少时间列车才能停住，以及列车在这段时间里行驶了多少路程？

解 设列车在开始制动后 t 秒时行驶了 s 米。根据题意，制动后列车的位置函数 $s=s(t)$ 满足关系式

$$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=-0.4\,. \tag{2}$$

此外，未知函数 $s(t)$满足下列初始条件：

$$t=0\text{ 时，}\quad s=0\text{，}\quad v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=20\,.$$

将(2)式两端从 0 到 t 积分，得

$$v(t)-v(0)=\int_0^t(-0.4)\mathrm{d}t=-0.4t\,.$$

于是，

$$v(t)=-0.4t+v(0)=-0.4t+20\,. \tag{3}$$

(3)式两端从 0 到 t 积分一次，得

$$s(t)=s(0)+\int_0^t v(t)\mathrm{d}t=0+\int_0^t(-0.4t+20)\mathrm{d}t=-0.2t^2+20t\ .$$

为了求列车从开始制动到完全停住所需的时间，在(3)式中令 $v=0$，得

$$t=\frac{20}{0.4}=50(\mathrm{s}).$$

再将 $t=50$ 代入函数 $s(t)$，得到列车在制动阶段行驶的路程 $s=500$ (m)。

8. 结语

积分上限函数及其导数是高等数学课程中一个重要知识点和考点，其本质是为了证明任何连续函数一定存在原函数。通常的高等数学教材中，主要给出积分上限函数的求导公式，并且由此证明微积分基本定理，从而将微分与积分紧密结合起来。但是关于积分上限函数的周期性和奇偶性以及一般形式的变限积分函数的求导公式，在多数高等数学教材中都没有详细讨论。

本文总结了变限积分函数的求导公式，这些公式由易到难，有助于学生在解题时灵活运用。此外，如果被积函数中也含有参变量 x，则可以通过变量代换把参量 x 换到积分上下限的位置，然后再用求导公式。接着本文讨论了积分上限函数的周期性和奇偶性，通过丰富的例题展示了这些性质的应用。最后本文探讨了积分上限函数在实际教学与考研题目中的常见应用，包括证明柯西－施瓦茨不等式，中值问题，周期性问题，与微分方程结合的问题，以及在实际问题中的应用等。

基金项目

上海理工大学教师发展研究项目(CFTD2024ZD08)。

参考文献

[1] 同济大学数学系. 高等数学(上册) [M]. 第 7 版. 北京: 高等教育出版社, 2014.

[2] 莫里斯·克莱因. 古今数学思想[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 2013.

[3] 齐民友. 遥望星空(二)——牛顿·微积分·万有引力定律的发现[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008.

[4] 李庆娟. 探讨积分上限函数的应用[J]. 高等数学研究, 2015, 18(6): 21-22+38.

[5] 贾瑞玲, 文生兰, 孙铭娟. 探究几类与定积分等式相关的证明问题[J]. 理论数学, 2023, 13(9): 2648-2657.

[6] 陆全, 林伟. 考研竞赛试题中的积分上限函数相关问题[J]. 高等数学研究, 2016, 19(6): 9-11+16.

[7] 王瑞星, 徐清华, 刘烁, 吴克坚. 广义的变限积分函数求导公式证明及其应用[J]. 河南教育学院学报(自然科学版), 2022, 31(2): 60-66.

[8] 李萍. “微积分”在经济中的一些应用举例[J]. 数学学习与研究, 2016(17): 13-14.