Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(4), 190-196
Published Online April 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.144126

Bergman空间中函数与满足某种特定增长条件的解析函数的等价性的证明补充及推广

杨纪龙，孙铭浩，邴　迪

辽宁师范大学数学学院，辽宁　大连

收稿日期：2024年3月10日；录用日期：2024年3月31日；发布日期：2024年4月25日

摘　要

本文分两个部分对属于某个Bergman空间 A^p 的解析函数类与满足某种特定增长条件的解析函数的等价性的证明进行补充。首先通过两个引理以及Hölder不等式来证明对于 $a>0$，有 $M_\infty(r,f)=O\left((1-r)^{-a}\right)$，此时只要求函数 $f(z)$ 解析即可，而文献中却要求 $f\in A^p$，因此是文献中叙述的进一步推广。其次，利用贝塔函数的积分形式，便能够得到若 $M_\infty(r,f)=O\left((1-r)^{-a}\right)$ 时，$f\in A^p$ 以及 $M_p(r,f)=O\left((1-r)^{-a}\right)$ 时，同样有 $f\in A^p$。

关键词

Bergman空间，解析函数类，增长条件

Supplement and Generalization of the Proof of the Equivalence of Functions in Bergman Spaces with Analytic Functions Satisfying Certain Growth Conditions

Jilong Yang, Minghao Sun, Di Bing

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Mar. 10th, 2024; accepted: Mar. 31st, 2024; published: Apr. 25th, 2024

文章引用: 杨纪龙, 孙铭浩, 邴迪. Bergman 空间中函数与满足某种特定增长条件的解析函数的等价性的证明补充及推广[J]. 理论数学, 2024, 14(4): 190-196. DOI: 10.12677/pm.2024.144126

Abstract

This paper is divided into two parts to supplement the proof of equivalence between the class of analytic functions belonging to a certain Bergman space A^p and the analytic functions satisfying certain growth conditions. First of all, two lemmas and the Hölder inequality are used to prove that for $a>0$, there is $M_\infty(r,f)=O\left((1-r)^{-a}\right)$. At this time, only the function $f(z)$ is required to be analyzed, while $f\in A^p$ is required in literature, so it is a further generalization of what is described in literature. Secondly, using the integral form of the beta function, we can find that if $M_\infty(r,f)=O\left((1-r)^{-a}\right)$, $f\in A^p$, and $M_p(r,f)=O\left((1-r)^{-a}\right)$, also $f\in A^p$.

Keywords

Bergman Space, Analytic Function Class, Growth Condition

1. 引言

复分析学中的许多问题都集中在边界附近具有有限增长的解析函数上，Duren 在[1]中指出对于圆盘 $\mathbb{D}$ 中的解析函数，积分 $M_p(r,f)$ 和 $M_\infty(r,f)$

$$M_p(r,f)=\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|\mathrm{d}\theta\right)^{\frac{1}{p}},\quad 0<p<+\infty;$$

$$M_\infty(r,f)=\max_{0\le\theta\le2\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|$$

提供了增长速度的一种度量，并引发了一个特别丰富的理论，具有广泛的应用。例如对于 $\mathbb{D}$ 内解析函数 $f(z)$，如果 $M_p(r,f)$ 当 $r\to1^-$ 时依然是有界的，那么 $f\in H^p(0<p\le\infty)$。

记 $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ 表示复平面上的开单位圆盘，$\mathbb{T}$ 是单位圆周，用 $\mathrm{d}A$ 代表 $\mathbb{D}$ 上的概率测度，

$$\mathrm{d}A(z)=\frac{1}{\pi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{\pi}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta,\quad z=x+iy=re^{i\theta}$$

Bergman 空间是 $\mathbb{D}$ 上关于面积测度的 $p(0<p<+\infty)$ 次方可积空间 $L^p(\mathbb{D},\mathrm{d}A)$ 的解析闭子空间，

$$A^p(\mathbb{D})=\left\{f:\int_{\mathbb{D}}|f(z)|^p\mathrm{d}A(z)<+\infty,\ f\text{ 在 }\mathbb{D}\text{ 上解析}\right\}$$

显然 $A^p(\mathbb{D})$ 是 $L^p(\mathbb{D},\mathrm{d}A)$ 的闭子空间。

Rubén 和 Rosenthal 在[2]中给出了 Hardy 空间 H^p 是满足如下条件的 $\mathbb{D}$ 上的解析函数全体

$$\|f\|_{H^p}^p=\sup_{0<r<1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^p\mathrm{d}\theta<\infty$$

显然 H^p 是 $L^p(T)$ 的闭子空间。

Duren 在[3]中给出属于某个 Bergman 空间 A^p 的解析函数类与满足 $M_\infty(r,f)=O\left((1-r)^{-a}\right)$ 增长条件的解析函数是等价类，其中 $a>0$。即如果 $f\in A^p$ 时，则有 $M_\infty(r,f)=O\left((1-r)^{-a}\right)$ 或者当 $M_\infty(r,f)=O\left((1-r)^{-a}\right)$ 时,则有 $f\in A^p$。但是并未给出详细的证明过程,故本文对其进行补充并进行推广。

在此基础推广后，若只要求 $f(z)$ 在 $\mathbb{D}$ 内解析，同样有 $M_\infty(r,f)=O\left((1-r)^{-a}\right)$ 其中 $a>0$ 以及当 $M_p(r,f)=O\left((1-r)^{-a}\right)$ 时，可以得到 $f\in A^p$。

2. 某种特定解析函数类的增长速度

引理 1：[1]如果 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 上解析，则我们有

$$M_p(r,f)=O(1-r)^{\beta},\ 0<p<\infty,\beta\ge 0$$

引理 2：如果 $a>1$，$\rho=\frac{1}{2}(1+r)$，那么

$$\int_0^{2\pi}\left|\rho e^{it}-r\right|^{-a}\mathrm{d}t=O\left((1-r)^{1-a}\right),r\to 1.$$

证明：

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\left|\rho e^{it}-r\right|^{-a}\mathrm{d}t&=\int_0^{2\pi}\left|\rho(\cos t+i\sin t)-r\right|^{-a}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{2\pi}\left[(\rho\cos t-r)^2+(\rho\sin t)^2\right]^{-\frac{a}{2}}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{2\pi}\left(\rho^2\cos^2 t+r^2-2\rho r\cos t+p\sin^2 t\right)^{-\frac{a}{2}}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{2\pi}\left(\rho^2-2\rho r\cos t+r^2\right)^{-\frac{a}{2}}\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{2.1}$$

接下来对 $\rho^2-2\rho\cos t+r^2$ 进行估计，首先有

$$\sin x>\frac{2}{\pi}x,\text{当}\,0<x<\frac{\pi}{2}\,\text{且}\,\sin x>-\frac{2}{\pi}x+2,\text{当}\,\frac{\pi}{2}<x<\pi.$$

又因为

$$\rho^2-2\rho r\cos t+r^2=\rho^2-2\rho r\left(1-2\sin^2\frac{t}{2}\right)+r^2=(\rho-r)^2+4\rho r\sin^2\frac{t}{2}$$

所以有

当 $0<\frac{t}{2}<\frac{\pi}{2}$ 时，有 $\rho^2-2\rho r\cos t+r^2>(\rho-r)^2+4\rho r\frac{t^2}{\pi^2}$；

当 $\frac{\pi}{2}<\frac{t}{2}<\pi$ 时，有 $\rho^2-2\rho r\cos t+r^2>(\rho-r)^2+4\rho r\left(\frac{t}{\pi}-2\right)^2$。

接下来将式(2.1)积分拆分成(a)，(b)两部分考虑，

(a)

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\frac{1}{\left[(\rho-r)^2+4\rho r\sin^2\frac{t}{2}\right]^{\frac{a}{2}}}\mathrm{d}t&\le\int_0^{\pi}\frac{1}{\left[(\rho-r)^2+4\rho r\frac{t^2}{\pi^2}\right]^{\frac{a}{2}}}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{(\rho-r)^a}\int_0^{\pi}\frac{1}{\left[1+\frac{4\rho rt^2}{\pi^2(\rho-r)^2}\right]^{\frac{a}{2}}}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

做变量替换 $\frac{r\rho t^2}{(\rho-r)^2}=\theta^2$，则有 $\theta=\frac{\sqrt{\rho r}t}{|\rho-r|}$， $\mathrm{d}t=\frac{|\rho-r|}{\sqrt{\rho r}}\mathrm{d}\theta$， $\theta\in(-\infty,+\infty)$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{(\rho-r)^a}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\left[1+\frac{4\theta^2}{\pi^2}\right]^{\frac{a}{2}}}\frac{|\rho-r|}{\sqrt{\rho r}}\mathrm{d}\theta \\
&=\frac{|\rho-r|}{\sqrt{\rho r}(\rho-r)^a}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\left[1+\frac{4\theta^2}{\pi^2}\right]^{\frac{a}{2}}}\mathrm{d}\theta \\
&\le C\frac{|\rho-r|}{(\rho-r)^a} \\
&\le C(1-r)^{1-a}=O\left((1-r)^{1-a}\right), \rho=\frac{1}{2}(1+r)\to 1, r\to 1
\end{aligned}
$$

因为 $a>1$，所以无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\left[1+\frac{2\theta^2}{\pi^2}\right]^{\frac{a}{2}}}\mathrm{d}\theta$ 收敛。

(b)

$$
\begin{aligned}
\int_{\pi}^{2\pi}\frac{1}{\left[(\rho-r)^2+4\rho r\sin^2\frac{t}{2}\right]^{\frac{a}{2}}}\mathrm{d}t &\le \int_{\pi}^{2\pi}\frac{1}{\left[(\rho-r)^2+4\rho r\left(\frac{t}{\pi}-2\right)^2\right]^{\frac{a}{2}}}\mathrm{d}t \\
&=\frac{1}{(\rho-r)^a}\int_{\pi}^{2\pi}\frac{1}{\left[1+\frac{4\rho r\left(\frac{t}{\pi}-2\right)^2}{(\rho-r)^2}\right]^{\frac{a}{2}}}\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

做变量替换 $\frac{\rho r\left(\frac{t}{\pi}-2\right)^2}{(\rho-r)^2}=\theta^2$，则有 $\theta=\frac{\sqrt{\rho r}\left(2-\frac{t}{\pi}\right)}{|\rho-r|}\mathrm{d}t$，所以 $\mathrm{d}t=\frac{\pi|\rho-r|}{\sqrt{\rho r}}\mathrm{d}\theta$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{(\rho-r)^a}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\left[1+4\theta^2\right]^{\frac{a}{2}}}\frac{\pi|\rho-r|}{\sqrt{\rho r}}\mathrm{d}\theta \\
&=\frac{\pi|\rho-r|}{\sqrt{\rho r}(\rho-r)^a}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\left[1+4\theta^2\right]^{\frac{a}{2}}}\mathrm{d}\theta \\
&\le C\frac{|\rho-r|}{(\rho-r)^a} \\
&\le C(1-r)^{1-a}=O\left((1-r)^{1-a}\right), \rho=\frac{1}{2}(1-r)\to 1, r\to 1
\end{aligned}
$$

综上，我们有 $\int_0^{2\pi}\left|\rho e^{it}-r\right|^{-a}\mathrm{d}t=O\left((1-r)^{1-a}\right), r\to 1$。

□

定理 1： 若 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 中解析，则对于 $a>0$，有 $M_\infty(r,f)=O\left((1-r)^{-a}\right)$。

证明： 由柯西积分公式，$f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{D}}\dfrac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi$，可以得到在圆环 $\rho=\dfrac{r+1}{2},(r<1)$ 上的柯西积分公式，

$$f(z)=f\left(re^{i\theta}\right)=\frac{\rho}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f\left(e^{it}\right)}{\rho e^{it}-z}e^{it}\mathrm{d}t$$

因此由 Hölder 不等式，**引理 1**，以及变量替换有

$$\begin{aligned}
\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| &\le \frac{\rho}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left|f\left(\rho e^{it}\right)\right|}{\left|\rho e^{it}-z\right|}\left|e^{it}\right|\mathrm{d}t\\
&\le \frac{\rho}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left|f\left(\rho e^{it}\right)\right|}{\left|\rho e^{it}-z\right|}\mathrm{d}t\\
&\le C\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(\rho e^{it}\right)\right|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{2\pi}\frac{1}{\left|\rho e^{it}-z\right|^q}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\le CM_p(\rho,f)\left(\int_0^{2\pi}\frac{1}{\left|\rho e^{it}-z\right|^q}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\le \frac{C}{(1-\rho)^\beta}\left(\int_0^{2\pi}\frac{1}{\left|\rho e^{it}-z\right|^q}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\le \frac{C}{(1-\rho)^\beta}\left(\int_0^{2\pi}\frac{1}{\left|\rho e^{it}-r\right|^q}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

再由**引理 2**，并由 $\rho=\dfrac{r+1}{2}$ 可以得到

$$\begin{aligned}
&\le \frac{C}{2^\beta(1-r)^\beta}\left(O(1-r)^{1-q}\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\le \frac{C'}{(1-r)^\beta}O\left((1-r)^{\frac{1-q}{q}}\right)\\
&\le \frac{C'}{(1-r)^\beta}O\left((1-r)^{-\frac{1}{p}}\right)\\
&\le C'\cdot O\left((1-r)^{-\frac{1}{p}-\beta}\right)
\end{aligned}$$

不妨令 $a=\dfrac{1}{p}+\beta>0$，则有

$$\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|\le C\cdot O\left((1-r)^{-a}\right)$$

对上述不等式两边同时关于 θ 取最大值，得到

$$M_\infty(r,f)=\max_{0<\theta<2\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|\le C\cdot O\left((1-r)^{-a}\right)$$

定理得证。

□

3. Bergman 空间中函数与满足某种增长条件的解析函数的等价性

定理 2：若 $M_\infty(r,f)=O\left((1-r)^{-a}\right)$，对于 $p>0$，当 $a<\dfrac{1}{p}$ 时，$f\in A^p$。

证明：如果 $f\in A^p$，则有

$$\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^p r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\right)^{\frac{1}{p}}<+\infty$$

所以，不妨考虑上述积分形式并且由 $M_\infty(r,f)=\max\limits_{0<\theta<2\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|$，可以得到

$$\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^p r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 M_\infty^p(r,f)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\right)^{\frac{1}{p}}$$

由于 $M_\infty(r,f)=O\left((1-r)^{-a}\right)$，得到

$$\le\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1\frac{Cr}{(1-r)^{ap}}\mathrm{d}r\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le\left(2C\int_0^1 r(1-r)^{-ap}\mathrm{d}r\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le\left(2C\int_0^1 r^{2-1}(1-r)^{1-ap-1}\mathrm{d}r\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le\left(2CB(2,1-ap)\right)^{\frac{1}{p}}$$

由于 $a<\dfrac{1}{p}$，则 $1-ap>0$，则有

$$\left(2CB(2,1-ap)\right)^{\frac{1}{p}}<+\infty$$

故 $f\in A^p$，得证。

□

定理 3：若 $M_p(r,f)=O\left((1-r)^{-a}\right)$，对于 $p>0$，当 $a<\dfrac{1}{p}$ 时，$f\in A^p$。

证明：同理我们考虑如下积分形式

$$\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^p r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\right)^{\frac{1}{p}}$$

经过简单变换，我们得到

$$=\left(2\int_0^1 r\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^p\mathrm{d}\theta\right]\mathrm{d}r\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left(2\int_0^1 rM_p^p(r,f)\mathrm{d}r\right)^{\frac{1}{p}}$$

因为$M_p(r,f)=O\left((1-r)^{-a}\right)$，则有

$$\le\left(2C\int_0^1\frac{r}{(1-r)^{ap}}\mathrm{d}r\right)^{\frac{1}{p}}$$

剩余计算过程需同**定理 2**，则我们得到$f\in A^p$，得证。

□

参考文献

[1] Duren, P.L. (1970) Theory of H^p Spaces. Academic Press, New York.

[2] Martínez-Avendao, R.A. and Rosenthal, P. (2007) An Introduction to Operators on the Hardy-Hilbert Space. Springer New York. https://doi.org/10.1007/978-0-387-48578-2

[3] Duren, P. and Schuster, A. (2004) Bergman Spaces. *American Mathematical Society*, **100**, 93-96. https://doi.org/10.1090/surv/100