Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(4), 213-228
Published Online April 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.144129

Hans汉斯

二维带形区域上Chemotaxis-Navier-Stokes方程的整体适定性

郭　晶，刘晓风

东华大学理学院，上海

收稿日期：2024年3月8日；录用日期：2024年3月28日；发布日期：2024年4月26日

摘　要

本文研究了二维带形区域上带齐次Neumann-Neumann-Dirichlet边界条件的Chemotaxis-Navier-Stokes方程解的适定性问题。当该方程在平衡态$(n_\infty,0,0)(n_\infty\geq 0)$附近满足一定的初始条件和假设条件$\|(\lambda_0,c_0,u_0)\|_{H^1(\Omega)}+\|\nabla(\lambda_0,c_0,u_0)\|_{L^4(\Omega)}\leq\varepsilon_0$时，通过建立能量泛函和利用一些不等式的方法得到该方程解的一致先验估计；最后再结合局部存在性和连续性证明了解的整体存在性。

关键词

Chemotaxis-Navier-Stokes方程，带形区域，先验估计，解的整体存在性

Global Well-Posedness for the Chemotaxis-Navier-Stokes Equations on a 2-D Strip Domain

Jing Guo, Xiaofeng Liu

College of Science, Donghua University, Shanghai

Received: Mar. 8th, 2024; accepted: Mar. 28th, 2024; published: Apr. 26th, 2024

Abstract

In this paper, the solution of the Chemotaxis-Navier-Stokes equation with homogeneous Neumann-Neumann-Dirichlet boundary conditions over a two-dimensional strip domain is studied. When the equation satisfies certain initial conditions and assumptions

文章引用: 郭晶, 刘晓风. 二维带形区域上 Chemotaxis-Navier-Stokes 方程的整体适定性[J]. 理论数学, 2024, 14(4): 213-228. DOI: 10.12677/pm.2024.144129

$\left\|\left(\lambda_0,c_0,u_0\right)\right\|_{H^1(\Omega)}+\left\|\nabla\left(\lambda_0,c_0,u_0\right)\right\|_{L^4(\Omega)}\le\varepsilon_0$ **near the equilibrium state** $\left(n_\infty,0,0\right)\left(n_\infty\ge0\right)$**, the uniform prior estimates of the solution of the equation are obtained by establishing energy functional and using some inequalities. Finally, the global existence of solution is proved by the combination of local existence and continuity.**

Keywords

Chemotaxis-Navier-Stokes Equation, A Strip Domain, Prior Estimate, The Global Existence of the Solution

1. 引言

趋化－流体耦合模型起源于 Tuval 等人[1]对枯草芽孢杆菌这样的趋氧型细菌在水滴中集中悬浮的实验观察，他们首次在 $\Omega\times\mathbb{R}^+$ 上提出如下用来描述氧气驱动的枯草芽孢杆菌在不可压缩流体中游动的趋化－流体耦合模型

$$\begin{cases} n_t+\boldsymbol{u}\cdot\nabla n=D_n\Delta n-\nabla\cdot\left(n\chi\left(c\right)\nabla c\right), \\ c_t+\boldsymbol{u}\cdot\nabla c=D_c\Delta c-nf\left(c\right), \\ \boldsymbol{u}_t+\kappa\left(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}\right)+\nabla P=D_u\Delta\boldsymbol{u}-n\nabla\varphi, \\ \nabla\cdot\boldsymbol{u}=0, \end{cases} \tag{1.1}$$

这里 n、c 和 $\boldsymbol{u}$ 分别表示细菌密度、氧气的浓度和流体速度，标量函数 $P=P\left(x,t\right)$ 表示压力，$\chi\left(c\right)$ 表示氧气浓度变化引起趋化的敏感度函数，φ 是重力势函数，正常数 D_n,D_c 和 D_u 分别表示细菌、氧气和流体的扩散系数，而参数 κ 是非负常数且与非线性对流强度有关，通常用 $\kappa=0$ 表示 Stokes 流，$\kappa=1$ 表示 Navier-Stokes 流。

现回顾模型(1.1)相关的一些研究成果。文献[2]在二维全空间中研究了四元 Chemotaxis-Navier-Stokes 方程的全局经典解，文献[3]在具有单向缓变的大初值条件下研究了三维全空间中该模型解的整体适定性。对于 Ω 为有界区域的情形，当 Ω 的边界光滑时，需要对边界施加一些适当的限制，最常见的一种边界条件是 n,c 和 $\boldsymbol{u}$ 分别满足齐次 Neumann-Neumann-Dirichlet 边界条件，即

$$\frac{\partial n}{\partial\nu}=\frac{\partial c}{\partial\nu}=0,\ \ \boldsymbol{u}=\boldsymbol{0},\ \ x\in\partial\Omega, \tag{1.2}$$

其中 ν 为区域边界处的单位外法向量。在这种条件下，文献[4] [5] [6]在对 f 和 χ 进行一定的结构性假设的情况下证明了模型(1.1)的适定性结果及解的相关性质。文献[7]研究了小初值条件下趋化 Navier-Stokes 方程的全局经典解。随后，文献[8]在没有小初值的条件下研究了二维有界区域上模型(1.1)解的整体存在性和稳定性问题。然而目前关于趋化－流体耦合模型在带状区域上解的适定性及相关性质的研究还很有限。文献[9] [10]在二维矩形区域和三维平行六面体区域的情形下对 Chemotaxis-Navier-Stokes 系统进行了数值模拟实验。文献[11] [12]在三维无界区域中得到了此模型强解的整体存在性理论。但是在二维带形区域上还没有类似的研究结果。因此，与文献[11]不同，本文改进了小初值的条件，在二维带形区域上研究

了模型(1.1)解的整体适定性问题。

本文将在$\Omega\times\mathbb{R}^+$上考虑如下 Chemotaxis-Navier-Stokes 系统：

$$\begin{cases} n_t+\boldsymbol{u}\cdot\nabla n=\Delta n-\nabla\cdot\left(n\chi(c)\nabla c\right), \\ c_t+\boldsymbol{u}\cdot\nabla c=\Delta c-nf(c), \\ \boldsymbol{u}_t+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}+\nabla P=\Delta\boldsymbol{u}-n\nabla\varphi, \\ \nabla\cdot\boldsymbol{u}=0, \end{cases} \tag{1.3}$$

其中$\Omega=\left\{x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\mid x_1\in\mathbb{R},0\le x_2\le 1\right\}$，在区域$\Omega$的上边界$\Gamma_B=\left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\mid x_1\in\mathbb{R},\ x_2=0\right\}$和下边界$\Gamma_T=\left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\mid x_1\in\mathbb{R},\ x_2=1\right\}$上考虑通常的边界条件(1.2)，满足如下假设条件：

$$\begin{cases} \text{初始条件}(n,c,\boldsymbol{u})_{t=0}=\left(n_0(x),c_0(x),\boldsymbol{u}_0(x)\right)\text{满足} \\ \qquad n_0(x)\ge 0,\ c_0(x)\ge 0,\ \nabla\cdot\boldsymbol{u}_0(x)=0\text{对任意的}x\in\Omega\text{成立}, \\ \chi,f\text{和}\varphi\text{都是光滑函数且}f(0)=0,\text{对}\forall s\in\mathbb{R}\text{有}f'(s)\ge 0\text{成立}, \\ \varphi\in W^{1,\infty}(\Omega)\text{且}\|c_0\|_{L^\infty(\Omega)}\text{充分小}. \end{cases} \tag{1.4}$$

本文目标是要证明当初值$\left(n_0(x),c_0(x),\boldsymbol{u}_0(x)\right)$在稳态$\left(n_\infty,0,\boldsymbol{0}\right)\left(n_\infty\ge 0\right)$附近作光滑小扰动时方程组(1.3)解的整体存在性。为了简便，取变量变换，令$n=\lambda+n_\infty$和$\tilde{p}=p+n_\infty\varphi$，系统(1.3)可改写为

$$\begin{cases} \lambda_t+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\lambda=\Delta\lambda-n_\infty\nabla\cdot\left(\chi(c)\nabla c\right)-\nabla\cdot\left(\chi(c)\lambda\nabla c\right), \\ c_t+\boldsymbol{u}\cdot\nabla c=\Delta c-\left(\lambda+n_\infty\right)f(c), \\ \boldsymbol{u}_t+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}+\nabla\tilde{P}=\Delta\boldsymbol{u}-\lambda\nabla\varphi, \\ \nabla\cdot\boldsymbol{u}=0, \end{cases} \tag{1.5}$$

由于在Γ_T上$\nu=(0,1)$，而在Γ_B上$\nu=(0,-1)$，故初边值条件满足

$$\begin{cases} (\lambda,c,\boldsymbol{u})_{t=0}=\left(\lambda_0(x),c_0(x),\boldsymbol{u}_0(x)\right), \quad x\in\Omega \\ \partial_2\lambda=\partial_2 c=0,\ \ \boldsymbol{u}=\boldsymbol{0},\ \ x\in\Gamma_B\cup\Gamma_T,\ \ t>0 \end{cases} \tag{1.6}$$

其中$\lambda_0=n_0-n_\infty$。本文的主要结果如下所述：

定理 1.1 假设条件(1.4)成立，并且存在一个充分小的常数$\varepsilon_0>0$使得当$\left\|(\lambda_0,c_0,\boldsymbol{u}_0)\right\|_{H^1(\Omega)}+\left\|\nabla(\lambda_0,c_0,\boldsymbol{u}_0)\right\|_{L^4(\Omega)}\le\varepsilon_0$时，方程组(1.5)~(1.6)有唯一强解$(\lambda,c,\boldsymbol{u})$满足$n(x,t)\equiv\lambda(x,t)+n_\infty\ge 0$，$c(x,t)\ge 0$，$x\in\Omega$，$t\ge 0$，并且存在一个正常数$C_0$使得

$$\begin{aligned} &\left(\left\|(\lambda,c,\boldsymbol{u})(\cdot,t)\right\|_{H^1(\Omega)}^2+\left\|\nabla(\lambda,c,\boldsymbol{u})\right\|_{L^4(\Omega)}^4\right) \\ &+\int_0^t\left(\left\|(\nabla\lambda,\nabla c,\nabla\boldsymbol{u})(\cdot,s)\right\|_{H^1(\Omega)}^2+\left\|\nabla(\lambda,c,\boldsymbol{u})\cdot\Delta(\lambda,c,\boldsymbol{u})\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)\mathrm{d}s \\ &\le C_0\left(\left\|(\lambda_0,c_0,\boldsymbol{u}_0)\right\|_{H^1(\Omega)}^2+\left\|\nabla(\lambda_0,c_0,\boldsymbol{u}_0)\right\|_{L^4(\Omega)}^4\right). \end{aligned} \tag{1.7}$$

对任意的$t\ge 0$成立。

2. 预备知识

在开始证明之前，我们首先给出本文需要用到的一些重要引理[13] [14]。

引理 2.1 (Poincaré 不等式)设$1\le p<+\infty$且$\Omega\subset\mathbb{R}^N$为有界区域，那么

1) 如果$u\in W_0^{1,p}(\Omega)$，则有$\int_\Omega|u|^p\,\mathrm{d}x\le C\int_\Omega|Du|^p\,\mathrm{d}x$；

2) 如果 $\partial\Omega$ 满足局部 Lipschitz 条件，$u\in W^{1,p}(\Omega)$，则有 $\int_\Omega |u-u_\Omega|^p\,\mathrm{d}x \le C\int_\Omega |Du|^p\,\mathrm{d}x$，其中 C 是依赖于 n,p,Ω 的常数，$u_\Omega=\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(x)\,\mathrm{d}x$，这里的 $|\Omega|$ 表示 Ω 的测度。

注：如果 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 为带形区域，也有类似的结果，具体可参见文献[14]。

引理 2.2 假设条件(1.4)成立，那么初边值问题(1.3)的解 $(n,c,\boldsymbol{u})$ 满足 $n(x,t)\ge 0$，$c(x,t)\ge 0$，$x\in\Omega$，$t>0$，和 $\|n(\cdot,t)\|_{L^1(\Omega)}\equiv\|n_0\|_{L^1(\Omega)}$，$t\ge 0$，并且对任意的 $1\le p\le+\infty$，有 $\sup\limits_{t\ge 0}\|c(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)}\le\|c_0\|_{L^p(\Omega)}$，$t\ge 0$。

证明：详细证明过程可参见文献[11]。

注：在本文中，$c_\infty=\|c_0\|_{L^\infty(\Omega)}$，$\mathcal{M}_f=\max\limits_{0\le s\le c_\infty}|f'(s)|+\max\limits_{0\le s\le c_\infty}|f''(s)|$，$\mathcal{M}_\chi=\max\limits_{0\le s\le c_\infty}|\chi(s)|+\max\limits_{0\le s\le c_\infty}|\chi'(s)|$；除特别说明外，$C_i\,(i=1,2,\cdots)$ 均表示与未知函数和时间无关的一般正常数。

3. 局部存在唯一性

为了证明方程组(1.5)~(1.6)强解的局部存在唯一性，我们首先对其构造一个线性迭代格式如下

$$\begin{cases}\lambda_t^{j+1}-\Delta\lambda^{j+1}=-\boldsymbol{u}^j\cdot\nabla\lambda^{j+1}-n_\infty\nabla\cdot\left(\chi\left(c^j\right)\nabla c^{j+1}\right)-\nabla\cdot\left(\chi\left(c^j\right)\lambda^j\nabla c^{j+1}\right),\\ c_t^{j+1}-\Delta c^{j+1}=-\boldsymbol{u}^j\cdot\nabla c^{j+1}-\left(\lambda^{j+1}+n_\infty\right)f\left(c^j\right),\\ \boldsymbol{u}_t^{j+1}-\Delta\boldsymbol{u}^{j+1}+\nabla\tilde{P}^{j+1}=-\boldsymbol{u}^j\cdot\nabla\boldsymbol{u}^{j+1}-\lambda^j\nabla\varphi,\\ \nabla\cdot\boldsymbol{u}^{j+1}=0,\end{cases}\tag{3.1}$$

以及初边值条件

$$\begin{cases}\left(\lambda^{j+1},c^{j+1},\boldsymbol{u}^{j+1}\right)\big|_{t=0}=\left(\lambda_0(x),c_0(x),\boldsymbol{u}_0(x)\right),\quad x\in\Omega\\ \partial_2\lambda^{j+1}=\partial_2c^{j+1}=0,\ \boldsymbol{u}^{j+1}=\boldsymbol{0},\quad x\in\Gamma_B\cup\Gamma_T,t>0\end{cases}\tag{3.2}$$

其中 $j\ge 0$，$\left(\lambda^0,c^0,\boldsymbol{u}^0\right):=(0,0,\boldsymbol{0})$。为了方便，我们记 $S^j=\left(\lambda^j,c^j,\boldsymbol{u}^j\right)$，$S(0):=\left(\lambda_0,c_0,\boldsymbol{u}_0\right)$，$j\ge 0$.从而，有以下局部存在性定理。

引理 3.1 假设定理 1.1 中的所有条件成立，设 $\|S(0)\|_{H^1(\Omega)\cap W^{1,4}(\Omega)}\le\varepsilon_1$，则存在正常数 T_0,M_0 使得对于任意的 $j\ge 0$，$S(0)\in C\left([0,T_0];H^1(\Omega)\cap W^{1,4}(\Omega)\right)$ 都是适定的，并且满足一致估计

$$\sup_{0\le t\le T_0}\left\|S^j(t)\right\|_{H^1(\Omega)\cap W^{1,4}(\Omega)}\le M_0,\quad j\ge 0\tag{3.3}$$

此外，$\left\{S^j\right\}_{j\ge 0}$ 是 Banach 空间 $C\left([0,T_0];H^1(\Omega)\cap W^{1,4}(\Omega)\right)$ 中的一个 Cauchy 序列，其对应的极限 $S:=(\lambda,c,\boldsymbol{u})\in C\left([0,T_0];H^1(\Omega)\cap W^{1,4}(\Omega)\right)$ 满足

$$\sup_{0\le t\le T_0}\|S(t)\|_{H^1(\Omega)\cap W^{1,4}(\Omega)}\le M_0,\tag{3.4}$$

并且 $S=(\lambda,c,\boldsymbol{u})$ 是系统(1.5)~(1.6)在 $[0,T_0]$ 上的唯一解。

证明：我们将引理 3.1 的证明分为两步。

第一步：$\left\{S^j\right\}_{j\ge 0}$ 在 $[0,T_0]$ 上的一致有界估计。我们将运用数学归纳法来证明。当 $j=0$ 时，根据初始假设条件 $S^0=\left(\lambda^0,c^0,\boldsymbol{u}^0\right)$ 可知不等式(3.3)成立。假设对于每一个 $j\ge 0$，不等式(3.3)成立，其中 $M_0\in(0,1)$ 充分小，然后证明当 $j+1$ 时不等式(3.3)仍然成立。为此，我们需要得到 S^{j+1} 的一些能量估计。

1) (λ^{j+1}，c^{j+1}，$\boldsymbol{u}^{j+1}$)的 L^2 估计

在方程$(3.1)_1$ 的左右两端同时乘以 λ^{j+1} 并在 Ω 上分部积分得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\lambda^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|\nabla\lambda^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2=\int_\Omega\left(n_\infty+\lambda^j\right)\chi\left(c^j\right)\nabla c^{j+1}\cdot\nabla\lambda^{j+1}\mathrm{d}x,$$

根据条件(3.2)，运用 Hölder 不等式、Young 不等式、Gagliardo-Nirenberg 插值不等式和 Sobolev 嵌入定理得

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\left(n_\infty+\lambda^j\right)\chi\left(c^j\right)\nabla c^{j+1}\cdot\nabla\lambda^{j+1}\mathrm{d}x\\&\le n_\infty\mathcal{M}_\chi\left\|\nabla c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|\nabla\lambda^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}+\mathcal{M}_\chi\left\|\lambda^j\right\|_{L^4(\Omega)}\left\|\nabla c^{j+1}\right\|_{L^4(\Omega)}\left\|\nabla\lambda^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}\\&\le C\left(\left\|\nabla c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|\nabla\lambda^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}+\left\|\lambda^j\right\|_{H^1(\Omega)}\left\|\nabla^2c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}\left\|\nabla c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}\left\|\nabla\lambda^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}\right)\\&\le\frac{M_0}{2}\left\|\nabla^2c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{C}{2}\left(\left\|\nabla c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|\nabla\lambda^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right).\end{aligned}$$

从而，有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\lambda^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|\nabla\lambda^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\le\frac{M_0}{2}\left\|\nabla^2c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{C}{2}\left(\left\|\nabla c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|\nabla\lambda^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)\tag{3.5}$$

同样地，运用假设条件 $f(0)=0$，我们可以得到 c^{j+1}，$\boldsymbol{u}^{j+1}$ 的 L^2 模估计

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|\nabla c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\le C\left(\left\|c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|\lambda^{j+1}\right\|_{H^1(\Omega)}^2+1\right).\tag{3.6}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\boldsymbol{u}^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|\nabla\boldsymbol{u}^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\le CM_0\left(\left\|\boldsymbol{u}^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+1\right).\tag{3.7}$$

2) (λ^{j+1}，c^{j+1}，$\boldsymbol{u}^{j+1}$)的 H^1 估计

对于 λ^{j+1} 的 H^1 模估计，我们取方程$(3.1)_1$ 与 $-\Delta\lambda^{j+1}$ 的 L^2 内积，分部积分得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\nabla\lambda^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|\Delta\lambda^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\\&=\int_\Omega\left(\boldsymbol{u}^j\cdot\nabla\lambda^{j+1}\right)\cdot\Delta\lambda^{j+1}\mathrm{d}x+n_\infty\int_\Omega\nabla\left(\chi\left(c^j\right)\nabla c^{j+1}\right)\cdot\Delta\lambda^{j+1}\mathrm{d}x+\int_\Omega\nabla\cdot\left(\chi\left(c^j\right)\lambda^j\nabla c^{j+1}\right)\cdot\Delta\lambda^{j+1}\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{3.8}$$

再次利用 Hölder 不等式、Young 不等式、Gagliardo-Nirenberg 插值不等式和 Poincaré 不等式，可得到(3.8)式右端的积分项估计如下

对于第一项有

$$\begin{aligned}\int_\Omega\left(\boldsymbol{u}^j\cdot\nabla\lambda^{j+1}\right)\cdot\Delta\lambda^{j+1}\mathrm{d}x&\le\left\|\boldsymbol{u}^j\right\|_{L^4(\Omega)}\left\|\nabla\lambda^{j+1}\right\|_{L^4(\Omega)}\left\|\Delta\lambda^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}\\&\le C\left\|\boldsymbol{u}^j\right\|_{H^1(\Omega)}\left\|\nabla^2\lambda^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}\left\|\nabla\lambda^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}\left\|\Delta\lambda^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}\\&\le\frac{CM_0}{2}\left\|\nabla^2\lambda^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|\nabla\lambda^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}+\frac{M_0}{2}\left\|\Delta\lambda^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\\&\le M_0\left\|\nabla^2\lambda^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{C}{4}\left\|\nabla\lambda^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2.\end{aligned}\tag{3.9}$$

对于第二项有

$$\begin{aligned}&n_\infty\int_\Omega\nabla\left(\chi\left(c^j\right)\nabla c^{j+1}\right)\cdot\Delta\lambda^{j+1}\mathrm{d}x\\&\le n_\infty\mathcal{M}_\chi\left\|\nabla c^j\right\|_{L^4(\Omega)}\left\|\nabla c^{j+1}\right\|_{L^4(\Omega)}\left\|\Delta\lambda^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}+n_\infty\mathcal{M}_\chi\left\|\nabla^2c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|\Delta\lambda^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}\\&\le C\left(M_0\left\|\nabla^2c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}\left\|\nabla c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}\left\|\Delta\lambda^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}+\left\|\nabla^2c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|\Delta\lambda^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}\right)\\&\le M_0\left(\left\|\nabla^2c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|\Delta\lambda^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)+\frac{C}{2}\left(\left\|\nabla c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+1\right).\end{aligned}\tag{3.10}$$

对于第三项有

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \nabla\cdot\left(\chi\left(c^j\right)\lambda^j\nabla c^{j+1}\right)\cdot\Delta\lambda^{j+1}\mathrm{d}x\\&=\int_\Omega \chi'\left(c^j\right)\nabla c^j\lambda^j\nabla c^{j+1}\cdot\Delta\lambda^{j+1}\mathrm{d}x+\int_\Omega \chi\left(c^j\right)\nabla\lambda^j\nabla c^{j+1}\cdot\Delta\lambda^{j+1}\mathrm{d}x\\&\quad+\int_\Omega \chi\left(c^j\right)\lambda^j\nabla^2 c^{j+1}\cdot\Delta\lambda^{j+1}\mathrm{d}x:=I_1+I_2+I_3.\end{aligned}\tag{3.11}$$

其中

$$\begin{aligned}I_1&=\mathcal{M}_\chi\left\|\nabla c^j\right\|_{L^4(\Omega)}\left\|\lambda^j\right\|_{L^8(\Omega)}\left\|\nabla c^{j+1}\right\|_{L^8(\Omega)}\left\|\Delta\lambda^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}\\&\le CM_0\left\|\lambda^j\right\|_{H^1(\Omega)}\left\|\nabla^2 c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{3}{4}}\left\|\nabla c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{4}}\left\|\Delta\lambda^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}\\&\le\frac{M_0}{2}\left\|\Delta\lambda^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{CM_0}{2}\left\|\nabla^2 c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{3}{2}}\left\|\nabla c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}\\&\le M_0\left(\left\|\Delta\lambda^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|\nabla^2 c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)+\frac{C}{4}\left\|\nabla c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2.\end{aligned}\tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}I_2&=\mathcal{M}_\chi\left\|\nabla\lambda^j\right\|_{L^4(\Omega)}\left\|\nabla c^{j+1}\right\|_{L^4(\Omega)}\left\|\Delta\lambda^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}\le CM_0\left\|\nabla^2 c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}\left\|\nabla c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}\left\|\Delta\lambda^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}\\&\le\frac{M_0}{2}\left(\left\|\Delta\lambda^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|\nabla^2 c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)+\frac{C}{4}\left\|\nabla c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2.\end{aligned}\tag{3.13}$$

和

$$\begin{aligned}I_3&=\mathcal{M}_\chi\left\|\lambda^j\right\|_{L^4(\Omega)}\left\|\nabla^2 c^{j+1}\right\|_{L^4(\Omega)}\left\|\Delta\lambda^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}\le CM_0\left\|\nabla^3 c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}\left\|\nabla^2 c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}\left\|\Delta\lambda^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}\\&\le\frac{M_0}{2}\left(\left\|\Delta\lambda^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|\nabla^3 c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)+\frac{CM_0}{4}\left\|\nabla^2 c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2.\end{aligned}\tag{3.14}$$

将(3.12)式、(3.13)式和(3.14)代入(3.11)式，从而有

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \nabla\cdot\left(\chi\left(c^j\right)\lambda^j\nabla c^{j+1}\right)\cdot\Delta\lambda^{j+1}\mathrm{d}x\\&\le 2M_0\left(\left\|\Delta\lambda^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|\nabla^3 c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)+\frac{CM_0}{4}\left\|\nabla^2 c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{C}{2}\left\|\nabla c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2.\end{aligned}\tag{3.15}$$

将(3.9)式、(3.10)式和(3.15)式代入(3.8)式，整理系数，对适当小的 M_0 可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\nabla\lambda^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|\Delta\lambda^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\\&\le 4M_0\left(\left\|\Delta\lambda^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|\nabla^3 c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)+\frac{CM_0}{2}\left\|\nabla^2 c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+C\left(\left\|\nabla c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|\nabla\lambda^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+1\right).\end{aligned}\tag{3.16}$$

类似地，得到 c^{j+1}，$\boldsymbol{u}^{j+1}$ 的 H^1 模估计分别为

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\nabla c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|\Delta c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\le M_0\left\|\Delta c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+C\left(\left\|\lambda^{j+1}\right\|_{H^1(\Omega)}^2+1\right).\tag{3.17}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\nabla \boldsymbol{u}^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|\Delta \boldsymbol{u}^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\le 3M_0\left\|\Delta \boldsymbol{u}^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+C\left(\left\|\nabla \boldsymbol{u}^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+1\right).\tag{3.18}$$

3) ($\nabla\lambda^{j+1}$，∇c^{j+1}，$\nabla\boldsymbol{u}^{j+1}$)的 L^4 估计

对于 $\nabla\lambda^{j+1}$ 的 L^4 模估计，我们先对方程$(3.1)_1$ 作用 ∇，再将得到的方程两端同乘以 $4\left|\nabla\lambda^{j+1}\right|^2\nabla\lambda^{j+1}$，然后在在 Ω 上进行积分得

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \left|\nabla\lambda^{j+1}\right|^4 \mathrm{d}x + 4\int_\Omega \left|\nabla\lambda^{j+1}\right|^2 \left|\nabla^2\lambda^{j+1}\right|^2 \mathrm{d}x + 2\int_\Omega \left|\nabla\left(\left|\nabla\lambda^{j+1}\right|^2\right)\right|^2 \mathrm{d}x \\
&= -4\int_\Omega \nabla\cdot\left(\boldsymbol{u}^j\cdot\nabla\lambda^{j+1} + n_\infty\nabla\cdot\left(\chi\left(c^j\right)\nabla c^{j+1}\right) + \nabla\cdot\left(\chi\left(c^j\right)\lambda^j\nabla c^{j+1}\right)\right)\cdot\left|\nabla\lambda^{j+1}\right|^2 \nabla\lambda^{j+1}\mathrm{d}x \\
&= 4\int_\Omega \boldsymbol{u}^j\cdot\nabla\lambda^{j+1}\cdot\left(\left|\nabla\lambda^{j+1}\right|^2\nabla^2\lambda^{j+1} + \nabla\left(\left|\nabla\lambda^{j+1}\right|^2\right)\cdot\nabla\lambda^{j+1}\right)\mathrm{d}x \\
&\quad + 4\int_\Omega n_\infty\nabla\cdot\left(\chi\left(c^j\right)\nabla c^{j+1}\right)\cdot\left(\left|\nabla\lambda^{j+1}\right|^2\nabla^2\lambda^{j+1} + \nabla\left(\left|\nabla\lambda^{j+1}\right|^2\right)\cdot\nabla\lambda^{j+1}\right)\mathrm{d}x \\
&\quad + 4\int_\Omega \nabla\cdot\left(\chi\left(c^j\right)\lambda^j\nabla c^{j+1}\right)\cdot\left(\left|\nabla\lambda^{j+1}\right|^2\nabla^2\lambda^{j+1} + \nabla\left(\left|\nabla\lambda^{j+1}\right|^2\right)\cdot\nabla\lambda^{j+1}\right)\mathrm{d}x \\
&:= J_1 + J_2 + J_3.
\end{aligned}
$$

对上式利用 Hölder 不等式、Gagliardo-Nirenberg 插值不等式和 Sobolev 嵌入定理，得到

$$
\begin{aligned}
J_1 &\le \int_\Omega \left|\nabla\lambda^{j+1}\right|^2\left|\nabla^2\lambda^{j+1}\right|^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\left\|\nabla\left(\left|\nabla\lambda^{j+1}\right|^2\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\int_\Omega \left|\boldsymbol{u}^j\right|^2\cdot\left|\nabla\lambda^{j+1}\right|^4\mathrm{d}x \\
&\le \int_\Omega \left|\nabla\lambda^{j+1}\right|^2\left|\nabla^2\lambda^{j+1}\right|^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\left\|\nabla\left(\left|\nabla\lambda^{j+1}\right|^2\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\left\|\boldsymbol{u}^j\right\|_{L^4(\Omega)}^2\left\|\left|\nabla\lambda^{j+1}\right|^2\right\|_{L^4(\Omega)}^2 \\
&\le \int_\Omega \left|\nabla\lambda^{j+1}\right|^2\left|\nabla^2\lambda^{j+1}\right|^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\left\|\nabla\left(\left|\nabla\lambda^{j+1}\right|^2\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + M_0\left\|\left|\nabla\lambda^{j+1}\right|^2\right\|_{L^4(\Omega)}^4 + CM_0.
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\left\|\left|\nabla\lambda^{j+1}\right|^2\right\|_{L^4(\Omega)}^4 &\le C\left\|\nabla\left(\left|\nabla\lambda^{j+1}\right|^2\right)\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|\left|\nabla\lambda^{j+1}\right|^2\right\|_{L^3(\Omega)}^3 \\
&\le \left\|\nabla\left(\left|\nabla\lambda^{j+1}\right|^2\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{C}{2}\left\|\nabla\lambda^{j+1}\right\|_{L^6(\Omega)}^3 \\
&\le \left\|\nabla\left(\left|\nabla\lambda^{j+1}\right|^2\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{C}{2}\left\|\nabla^2\lambda^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|\nabla\lambda^{j+1}\right\|_{L^4(\Omega)}^2 \\
&\le \left\|\nabla\left(\left|\nabla\lambda^{j+1}\right|^2\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\|\nabla^2\lambda^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\left\|\nabla\lambda^{j+1}\right\|_{L^4(\Omega)}^4
\end{aligned}
$$

因此，$J_1 \le \int_\Omega \left|\nabla\lambda^{j+1}\right|^2\left|\nabla^2\lambda^{j+1}\right|^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\left\|\nabla\left(\left|\nabla\lambda^{j+1}\right|^2\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + M_0\left\|\nabla^2\lambda^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + CM_0\left(\left\|\nabla\lambda^{j+1}\right\|_{L^4(\Omega)}^4 + 1\right)$.

$$
\begin{aligned}
J_2 &\le C\int_\Omega \nabla c^j\nabla c^{j+1}\cdot\left(\left|\nabla\lambda^{j+1}\right|^2\nabla^2\lambda^{j+1} + \nabla\left(\left|\nabla\lambda^{j+1}\right|^2\right)\cdot\nabla\lambda^{j+1}\right)\mathrm{d}x \\
&\quad + C\int_\Omega \nabla^2 c^{j+1}\cdot\left(\left|\nabla\lambda^{j+1}\right|^2\nabla^2\lambda^{j+1} + \nabla\left(\left|\nabla\lambda^{j+1}\right|^2\right)\cdot\nabla\lambda^{j+1}\right)\mathrm{d}x \\
&\le \int_\Omega \left|\nabla\lambda^{j+1}\right|^2\left|\nabla^2\lambda^{j+1}\right|^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\left\|\nabla\left(\left|\nabla\lambda^{j+1}\right|^2\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\int_\Omega \left|\nabla c^j\right|^2\left|\nabla c^{j+1}\right|^2\cdot\left|\nabla\lambda^{j+1}\right|^2\mathrm{d}x \\
&\quad + C\int_\Omega \left|\nabla^2 c^{j+1}\right|^2\cdot\left|\nabla\lambda^{j+1}\right|^2\mathrm{d}x \\
&\le \int_\Omega \left|\nabla\lambda^{j+1}\right|^2\left|\nabla^2\lambda^{j+1}\right|^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\left\|\nabla\left(\left|\nabla\lambda^{j+1}\right|^2\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\left\|\nabla c^j\right\|_{L^4(\Omega)}^2\left\|\nabla c^{j+1}\right\|_{L^8(\Omega)}^2\left\|\left|\nabla\lambda^{j+1}\right|^2\right\|_{L^4(\Omega)} \\
&\quad + C\left\|\nabla^3 c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|\nabla^2 c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|\nabla\lambda^{j+1}\right\|_{L^4(\Omega)}^2
\end{aligned}
$$

$$\le \int_\Omega \left|\nabla \lambda^{j+1}\right|^2 \left|\nabla^2 \lambda^{j+1}\right|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\left\|\nabla\left(\left|\nabla \lambda^{j+1}\right|^2\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + CM_0^2 \left\|\nabla^2 c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)} \left\|\nabla c^{j+1}\right\|_{L^4(\Omega)} \left\|\left|\nabla \lambda^{j+1}\right|^2\right\|_{L^4(\Omega)}$$
$$+ M_0\left(\left\|\nabla^3 c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\|\nabla^2 c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right) + C\left\|\nabla \lambda^{j+1}\right\|_{L^4(\Omega)}^4$$
$$\le \int_\Omega \left|\nabla \lambda^{j+1}\right|^2 \left|\nabla^2 \lambda^{j+1}\right|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\left\|\nabla\left(\left|\nabla \lambda^{j+1}\right|^2\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2M_0\left(\left\|\nabla^3 c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\|\nabla^2 c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\|\nabla^2 \lambda^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)$$
$$+ C\left(\left\|\nabla \lambda^{j+1}\right\|_{L^4(\Omega)}^4 + \left\|\nabla c^{j+1}\right\|_{L^4(\Omega)}^4\right).$$

同理，可得

$$J_3 \le \int_\Omega \left|\nabla \lambda^{j+1}\right|^2 \left|\nabla^2 \lambda^{j+1}\right|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\left\|\nabla\left(\left|\nabla \lambda^{j+1}\right|^2\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}\left\|\nabla\left(\left|\nabla c^{j+1}\right|^2\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + M_0\left\|\nabla^3 c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2$$
$$+ C\left(\left\|\nabla \lambda^{j+1}\right\|_{L^4(\Omega)}^4 + \left\|\nabla c^{j+1}\right\|_{L^4(\Omega)}^4\right).$$

从而有

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \left|\nabla \lambda^{j+1}\right|^4 \mathrm{d}x + \int_\Omega \left|\nabla \lambda^{j+1}\right|^2 \left|\nabla^2 \lambda^{j+1}\right|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega \left|\nabla\left(\left|\nabla \lambda^{j+1}\right|^2\right)\right|^2 \mathrm{d}x \\ &\le \frac{1}{2}\left\|\nabla\left(\left|\nabla c^{j+1}\right|^2\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + 3M_0\left(\left\|\nabla^2 c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\|\nabla^3 c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\|\nabla^2 \lambda^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right) \\ &\quad + C\left(\left\|\nabla \lambda^{j+1}\right\|_{L^4(\Omega)}^4 + \left\|\nabla c^{j+1}\right\|_{L^4(\Omega)}^4 + 1\right).\end{aligned} \tag{3.19}$$

我们采用与(3.19)式相同的方法，得出

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \left|\nabla c^{j+1}\right|^4 \mathrm{d}x + \int_\Omega \left|\nabla c^{j+1}\right|^2 \left|\nabla^2 c^{j+1}\right|^2 \mathrm{d}x + \int_\Omega \left|\nabla\left(\left|\nabla c^{j+1}\right|^2\right)\right|^2 \mathrm{d}x \\ &\le 2M_0\left\|\nabla^2 c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + CM_0\left(\left\|\nabla c^{j+1}\right\|_{L^4(\Omega)}^4 + \left\|\lambda^{j+1}\right\|_{H^1(\Omega)}^2 + 1\right).\end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \left|\nabla \boldsymbol{u}^{j+1}\right|^4 \mathrm{d}x + \int_\Omega \left|\nabla \boldsymbol{u}^{j+1}\right|^2 \left|\nabla^2 \boldsymbol{u}^{j+1}\right|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega \left|\nabla\left(\left|\nabla \boldsymbol{u}^{j+1}\right|^2\right)\right|^2 \mathrm{d}x \le M_0\left\|\nabla^2 \boldsymbol{u}^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\left(\left\|\nabla \boldsymbol{u}^{j+1}\right\|_{L^4(\Omega)}^4 + 1\right). \tag{3.21}$$

4) 封闭性

综合(3.5)式、(3.16)式和(3.19)式，仔细调整不等式的系数，可以找到一个适当的正常数 α_1 使得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left\|\lambda^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\|\nabla \lambda^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\|\nabla \lambda^{j+1}\right\|_{L^4(\Omega)}^4\right) + \alpha_1\left(\left\|\nabla \lambda^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\|\Delta \lambda^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right) \\ &\quad + \alpha_1\int_\Omega \left|\nabla \lambda^{j+1}\right|^2 \left|\nabla^2 \lambda^{j+1}\right|^2 \mathrm{d}x \\ &\le \int_\Omega \left|\nabla c^{j+1}\right|^2 \left|\nabla^2 c^{j+1}\right|^2 \mathrm{d}x + 11M_0\left(\left\|\Delta \lambda^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\|\nabla^3 c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right) + \frac{CM_0}{2}\left\|\nabla^2 c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + C\left(\left\|\nabla \lambda^{j+1}\right\|_{L^4(\Omega)}^4 + \left\|\nabla c^{j+1}\right\|_{L^4(\Omega)}^4 + \left\|\nabla c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\|\nabla \lambda^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + 1\right).\end{aligned} \tag{3.22}$$

综合(3.6)式、(3.17)式和(3.20)式，仔细调整不等式的系数，可以找到一个适当的正常数 α_2 使得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left\|c^{j+1}\right\|_{H^1(\Omega)}^2+\left\|\nabla c^{j+1}\right\|_{L^4(\Omega)}^4\right)+\alpha_2\left(\left\|\nabla c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|\Delta c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)+\alpha_2\int_\Omega\left|\nabla c^{j+1}\right|^2\left|\nabla^2 c^{j+1}\right|^2\mathrm{d}x$$
$$\leq 4M_0\left\|\Delta c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+C\left(\left\|\nabla c^{j+1}\right\|_{L^4(\Omega)}^4+\left\|c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|\lambda^{j+1}\right\|_{H^1(\Omega)}^2+1\right). \tag{3.23}$$

综合(3.7)式、(3.18)式和(3.21)式，仔细调整不等式的系数，可以找到一个适当的正常数 α_3 使得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left\|\nabla \boldsymbol{u}^{j+1}\right\|_{L^4(\Omega)}^4+\left\|\boldsymbol{u}^{j+1}\right\|_{H^1(\Omega)}^2\right)+\alpha_3\left(\left\|\nabla \boldsymbol{u}^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|\Delta \boldsymbol{u}^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)+\alpha_3\int_\Omega\left|\nabla \boldsymbol{u}^{j+1}\right|^2\left|\nabla^2 \boldsymbol{u}^{j+1}\right|^2\mathrm{d}x$$
$$\leq 7M_0\left\|\nabla^2 \boldsymbol{u}^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+C\left(\left\|\nabla \boldsymbol{u}^{j+1}\right\|_{L^4(\Omega)}^4+\left\|\boldsymbol{u}^{j+1}\right\|_{H^1(\Omega)}^2+1\right). \tag{3.24}$$

再结合(3.22)~(3.24)式并调整系数，然后将所得不等式在 0 到 t 上进行积分，可以推导得出

$$\left(\left\|S^{j+1}(t)\right\|_{H^1(\Omega)}^2+\left\|\nabla S^{j+1}(t)\right\|_{L^4(\Omega)}^4\right)+\int_0^t\left\|\nabla S^{j+1}(t)\right\|_{H^1(\Omega)}^2\mathrm{d}s+\int_0^t\left(\left\|\nabla S^{j+1}(t)\cdot\nabla^2 S^{j+1}(t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)\mathrm{d}s$$
$$\leq C\int_0^t\left(\left\|S^{j+1}(t)\right\|_{H^1(\Omega)}^2+\left\|\nabla S^{j+1}(t)\right\|_{L^4(\Omega)}^4\right)\mathrm{d}s+3M_0\int_0^t\left\|\nabla^3 c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\mathrm{d}s$$
$$+C\left(t+\left\|S^{j+1}(0)\right\|_{H^1(\Omega)}^2+\left\|\nabla S^{j+1}(0)\right\|_{L^4(\Omega)}^4\right). \tag{3.25}$$

为了处理(3.25)式右端 $\nabla^3 c^{j+1}$ 的 L^2 范数，我们将方程$(3.1)_2$重写为

$$\Delta c^{j+1}=c_t^{j+1}+\boldsymbol{u}^j\cdot\nabla c^{j+1}+\left(\lambda^{j+1}+n_\infty\right)f\left(c^j\right) \tag{3.26}$$

将 ∇ 作用于方程(3.26)，可以推导得出

$$\left\|\nabla^3 c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}\leq\left\|\partial_t\nabla c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}+M_0\left(\left\|\nabla^2 c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}+\left\|\nabla^2\lambda^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}\right)+CM_0\left(\left\|\nabla c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}+\left\|\nabla\lambda^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}+1\right). \tag{3.27}$$

因此，将(3.27)式代入(3.25)式，可得

$$\left(\left\|S^{j+1}(t)\right\|_{H^1(\Omega)}^2+\left\|\nabla S^{j+1}(t)\right\|_{L^4(\Omega)}^4\right)+\left(1-3M_0^2\right)\int_0^t\left\|\nabla S^{j+1}(t)\right\|_{H^1(\Omega)}^2\mathrm{d}s+\int_0^t\left(\left\|\nabla S^{j+1}(t)\cdot\nabla^2 S^{j+1}(t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)\mathrm{d}s$$
$$\leq C\int_0^t\left(\left\|S^{j+1}(t)\right\|_{H^1(\Omega)}^2+\left\|\nabla S^{j+1}(t)\right\|_{L^4(\Omega)}^4\right)\mathrm{d}s+3M_0\int_0^t\left\|\partial_t\nabla c^{j+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\mathrm{d}s$$
$$+C\left(t+\left\|S^{j+1}(0)\right\|_{H^1(\Omega)}^2+\left\|\nabla S^{j+1}(0)\right\|_{L^4(\Omega)}^4\right). \tag{3.28}$$

运用 $\partial_t c^{j+1}(t)$ 在 $t=0$ 处的连续性，当 M_0 充分小时，由(3.28)式可得

$$\left(\left\|S^{j+1}(t)\right\|_{H^1(\Omega)}^2+\left\|\nabla S^{j+1}(t)\right\|_{L^4(\Omega)}^4\right)+\int_0^t\left\|\nabla S^{j+1}(t)\right\|_{H^1(\Omega)}^2\mathrm{d}s+\int_0^t\left(\left\|\nabla S^{j+1}(t)\cdot\nabla^2 S^{j+1}(t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)\mathrm{d}s$$
$$\leq C\int_0^t\left(\left\|S^{j+1}(t)\right\|_{H^1(\Omega)}^2+\left\|\nabla S^{j+1}(t)\right\|_{L^4(\Omega)}^4\right)\mathrm{d}s+C\left(T_0+\left\|S(0)\right\|_{H^1(\Omega)}^2+\left\|\nabla S(0)\right\|_{L^4(\Omega)}^4\right). \tag{3.29}$$

再对任意的 $t\in[0,T_0]$，根据 Gronwall 不等式我们可以得到

$$\left(\left\|S^{j+1}(t)\right\|_{H^1(\Omega)}^2+\left\|\nabla S^{j+1}(t)\right\|_{L^4(\Omega)}^4\right)\leq C\left(T_0+\left\|S(0)\right\|_{H^1(\Omega)}^2+\left\|\nabla S(0)\right\|_{L^4(\Omega)}^4\right)\left(1+CT_0\mathrm{e}^{CT_0}\right).$$

由上述不等式可知，当 ε_1 和 T_0 充分小时，(3.3)式对 $j+1$ 成立。

第二步：$\left\{S^j\right\}_{j\geq 0}$ 的收敛性。

为了证明序列 $\left\{S^j\right\}_{j\geq 0}$ 的收敛性，我们对方程(3.1)分别取 $j+1$ 和 j，然后对两式作差得

$$
\begin{cases}
\partial_t\left(\lambda^{j+1}-\lambda^j\right)-\Delta\left(\lambda^{j+1}-\lambda^j\right) \\
\qquad =-\boldsymbol{u}^j\cdot\nabla\left(\lambda^{j+1}-\lambda^j\right)-\nabla\lambda^j\cdot\left(\boldsymbol{u}^j-\boldsymbol{u}^{j-1}\right)-n_\infty\nabla\cdot\left(\chi\left(c^j\right)\nabla\left(c^{j+1}-c^j\right)\right) \\
\qquad\quad -n_\infty\nabla\cdot\left(\left(\chi\left(c^j\right)-\chi\left(c^{j-1}\right)\right)\nabla c^j\right)-\nabla\cdot\left(\chi\left(c^j\right)\lambda^j\nabla\left(c^{j+1}-c^j\right)\right) \\
\qquad\quad -\nabla\cdot\left(\left(\chi\left(c^j\right)\lambda^j-\chi\left(c^{j-1}\right)\lambda^{j-1}\right)\nabla c^j\right), & x\in\Omega, t>0, \\
\partial_t\left(c^{j+1}-c^j\right)-\Delta\left(c^{j+1}-c^j\right) \\
\qquad =-\boldsymbol{u}^j\cdot\nabla\left(c^{j+1}-c^j\right)-\nabla c^j\cdot\left(\boldsymbol{u}^j-\boldsymbol{u}^{j-1}\right)-\left(\lambda^{j+1}-\lambda^j\right)f\left(c^j\right) \\
\qquad\quad -\left(f\left(c^j\right)-f\left(c^{j-1}\right)\right)\left(\lambda^j+n_\infty\right), & x\in\Omega, t>0, \\
\partial_t\left(\boldsymbol{u}^{j+1}-\boldsymbol{u}^j\right)-\Delta\left(\boldsymbol{u}^{j+1}-\boldsymbol{u}^j\right)+\nabla\left(\tilde{P}^{j+1}-\tilde{P}^j\right) \\
\qquad =-\boldsymbol{u}^j\cdot\nabla\left(\boldsymbol{u}^{j+1}-\boldsymbol{u}^j\right)-\nabla\boldsymbol{u}^j\cdot\left(\boldsymbol{u}^j-\boldsymbol{u}^{j-1}\right)-\left(\lambda^j-\lambda^{j-1}\right)\nabla\varphi, & x\in\Omega, t>0, \\
\nabla\cdot\left(\boldsymbol{u}^{j+1}-\boldsymbol{u}^j\right)=0, & x\in\Omega, t>0,
\end{cases}
$$

其中初边值条件满足

$$
\begin{cases}
\left(\lambda^{j+1}-\lambda^j, c^{j+1}-c^j, \boldsymbol{u}^{j+1}-\boldsymbol{u}^j\right)_{t=0}=\left(0,0,\boldsymbol{0}\right), \quad x\in\Omega \\
\partial_2\left(\lambda^{j+1}-\lambda^j\right)=\partial_2\left(c^{j+1}-c^j\right)=0, \ \ \boldsymbol{u}^{j+1}-\boldsymbol{u}^j=\boldsymbol{0}, \ \ x\in\Gamma_B\bigcup\Gamma_T,
\end{cases}
$$

类似地，运用与证明(3.29)式相同的方法，经过一系列细致的计算，我们可以找到一个正常数α_4使得

$$
\begin{aligned}
&\sup_{0\le t\le T_0}\left(\left\|S^{j+1}(t)-S^j(t)\right\|_{H^1(\Omega)}^2+\left\|\nabla\left(S^{j+1}(t)-S^j(t)\right)\right\|_{L^4(\Omega)}^4\right)+\alpha_4\int_0^t\left\|\nabla\left(S^{j+1}(t)-S^j(t)\right)\right\|_{H^1(\Omega)}^2\mathrm{d}s \\
&\quad+\alpha_4\int_0^t\left(\left\|\nabla\left(S^{j+1}(t)-S^j(t)\right)\cdot\nabla^2\left(S^{j+1}(t)-S^j(t)\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)\mathrm{d}s \\
&\le C\left(1+M_0\right)T_0\sup_{0\le t\le T_0}\left(\left\|S^j(t)-S^{j-1}(t)\right\|_{H^1(\Omega)}^2+\left\|\nabla\left(S^j(t)-S^{j-1}(t)\right)\right\|_{L^4(\Omega)}^4\right).
\end{aligned}
$$

只需T_0适当小，则存在一个常数$\theta\in(0,1)$，使得对任意的$j\ge1$，有

$$
\begin{aligned}
&\sup_{0\le t\le T_0}\left(\left\|S^{j+1}(t)-S^j(t)\right\|_{H^1(\Omega)}^2+\left\|\nabla\left(S^{j+1}(t)-S^j(t)\right)\right\|_{L^4(\Omega)}^4\right) \\
&\le\theta\sup_{0\le t\le T_0}\left(\left\|S^j(t)-S^{j-1}(t)\right\|_{H^1(\Omega)}^2+\left\|\nabla\left(S^j(t)-S^{j-1}(t)\right)\right\|_{L^4(\Omega)}^4\right).
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

因此，$\left\{S^j\right\}_{j\ge0}$是 Banach 空间$C\left([0,T_0];H^1(\Omega)\cap W^{1,4}(\Omega)\right)$中的一个 Cauchy 序列，且$C\left([0,T_0];H^1(\Omega)\cap W^{1,4}(\Omega)\right)$中存在极限函数

$$
S=S^0+\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\left(S^{j+1}-S^j\right),
$$

满足

$$
\sup_{0\le t\le T_0}\left\|S(t)\right\|_{H^1(\Omega)\cap W^{1,4}(\Omega)}\le\sup_{0\le t\le T_0}\liminf_{j\to\infty}\left\|S^j(t)\right\|_{H^1(\Omega)\cap W^{1,4}(\Omega)}\le M_0.
$$

最后，用与证明收敛性类似的方法来证明系统(1.5)~(1.6)解的唯一性。故引理 3.1 证毕。

4. 整体存在性

4.1. 一致先验估计

为了证明定理 1.1，我们在本小节中将致力于得到系统(1.5)~(1.6)解的一致先验估计。

引理 4.1 假设定理 1.1 中所有的条件都成立。设系统(1.5)~(1.6)的解 $S:=(\lambda,c,\boldsymbol{u})$ 在 $[0,T]$ 上满足

$$\sup_{0\le t\le T}\|S(t)\|_{H^1(\Omega)\cap W^{1,4}(\Omega)}\le\varepsilon,\quad 0<\varepsilon<1 \tag{4.1}$$

那么对任意的 $x\in\Omega, t\in[0,T]$，都有 $n(x,t)\equiv\lambda(x,t)+n_\infty\ge0,\ c(x,t)\ge0,\ x\in\Omega,\ t\ge0$ 成立，并且存在两个正常数 ε_1,C_1 使得对任意的 $0<\varepsilon\le\varepsilon_2$ 和 $t\in[0,T]$ 成立

$$\begin{aligned}&\left(\|(\lambda,c,\boldsymbol{u})(\cdot,t)\|_{H^1(\Omega)}^2+\|\nabla(\lambda,c,\boldsymbol{u})\|_{L^4(\Omega)}^4\right)\\&\quad+\int_0^t\left(\|(\nabla\lambda,\nabla c,\nabla\boldsymbol{u})(\cdot,s)\|_{H^1(\Omega)}^2+\|\nabla(\lambda,c,\boldsymbol{u})\cdot\Delta(\lambda,c,\boldsymbol{u})\|_{L^2(\Omega)}^2\right)\mathrm{d}s\\&\le C_1\left(\|(\lambda_0,c_0,\boldsymbol{u}_0)\|_{H^1(\Omega)}^2+\|\nabla(\lambda_0,c_0,\boldsymbol{u}_0)\|_{L^4(\Omega)}^4\right).\end{aligned}\tag{4.2}$$

证明：由假设条件(1.4)和极大值原理可知，对任意的 $x\in\Omega, t\in[0,T]$，有 $n(x,t)\ge0$ 和 $0\le c(x,t)\le c_\infty$ 成立。为了得到不等式(4.2)的证明，我们将引理 4.1 的证明过程分为五个步骤。

第一步：S 的 L^2 估计。

首先，在方程$(1.5)_1$ 的左右两端同时乘以 λ 并在 Ω 上对 x 进行分部积分得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\lambda\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\nabla\lambda\|_{L^2(\Omega)}^2=\int_\Omega(n_\infty+\lambda)\chi(c)\nabla c\cdot\nabla\lambda\mathrm{d}x\\&\le n_\infty\mathcal{M}_\chi\|\nabla c\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\lambda\|_{L^2(\Omega)}+\mathcal{M}_\chi\|\lambda\|_{L^4(\Omega)}\|\nabla c\|_{L^4(\Omega)}\|\nabla\lambda\|_{L^2(\Omega)}\\&\le n_\infty\mathcal{M}_\chi\|\nabla c\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\lambda\|_{L^2(\Omega)}+C_2\mathcal{M}_\chi\varepsilon\|\nabla^2c\|_{L^2(\Omega)}^{\frac12}\|\nabla c\|_{L^2(\Omega)}^{\frac12}\|\nabla\lambda\|_{L^2(\Omega)}\\&\le\frac12\|\nabla\lambda\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{C_2^2\mathcal{M}_\chi^2\left(n_\infty^2+\varepsilon^2\right)}{2}\left(\|\nabla c\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\nabla^2c\|_{L^2(\Omega)}^2\right).\end{aligned}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\lambda\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\nabla\lambda\|_{L^2(\Omega)}^2\le C_2^2\mathcal{M}_\chi^2\left(n_\infty^2+\varepsilon^2\right)\left(\|\nabla c\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\nabla^2c\|_{L^2(\Omega)}^2\right).\tag{4.3}$$

这里我们运用了条件(1.4)、Hölder 不等式、Young 不等式、Gagliardo-Nirenberg 插值不等式和 Sobolev 嵌入定理。同理，在方程$(1.5)_2$ 的左右两端同时乘以 c 并在 Ω 上进行分部积分得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|c\|_{L^2(\Omega)}^2+2\|\nabla c\|_{L^2(\Omega)}^2+2\int_\Omega f(c)c(n_\infty+\lambda)\mathrm{d}x=0.\tag{4.4}$$

最后，在方程$(1.5)_3$ 的左右两端同时乘以 $\boldsymbol{u}$ 并在 Ω 上进行分部积分，并利用 Sobolev 嵌入定理和 Poincaré 不等式得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)}^2&=\int_\Omega\boldsymbol{u}\cdot\varphi\nabla\lambda\mathrm{d}x\le\|\boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla\lambda\|_{L^2(\Omega)}\\&\le\left(\int_{\mathbb{R}}\int_0^1|\boldsymbol{u}|^2\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1\right)^{\frac12}\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla\lambda\|_{L^2(\Omega)}\\&\le C_3\left(\int_{\mathbb{R}}\int_0^1|\nabla\boldsymbol{u}|^2\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1\right)^{\frac12}\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla\lambda\|_{L^2(\Omega)}\\&\le\frac12\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{\left(C_3\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\right)^2}{2}\|\nabla\lambda\|_{L^2(\Omega)}^2.\end{aligned}$$

整理上式可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)}^2\le\left(C_3\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\right)^2\|\nabla\lambda\|_{L^2(\Omega)}^2. \tag{4.5}$$

选择适当大的正常数 γ_1,γ_2 满足 $\frac{\gamma_1}{2}\ge\left(C_3\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\right)^2$ 和 $\gamma_2\ge\gamma_1C_2^2\mathcal{M}_\chi^2\left(n_\infty^2+\varepsilon^2\right)$，通过适当的调整不等式(4.3)~(4.5)的系数，可以找到一个适当的正常数 α_5 使得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\gamma_1\|\lambda\|_{L^2(\Omega)}^2+\gamma_2\|c\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)}^2\right)+\alpha_5\left(\|\nabla\lambda\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\nabla c\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)}^2\right)\le\gamma_2\|\nabla^2c\|_{L^2(\Omega)}^2. \tag{4.6}$$

第二步：∇S 的 L^2 估计。

首先，推导 $\nabla\lambda$ 的 L^2 估计。取方程$(1.5)_1$与 $-\Delta\lambda$ 的 L^2 内积，分部积分得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla\lambda\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\Delta\lambda\|_{L^2(\Omega)}^2=\int_\Omega(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\lambda)\cdot\Delta\lambda\mathrm{d}x+n_\infty\int_\Omega\nabla\left(\chi(c)\nabla c\right)\cdot\Delta\lambda\mathrm{d}x+\int_\Omega\nabla\cdot\left(\chi(c)\lambda\nabla c\right)\cdot\Delta\lambda\mathrm{d}x. \tag{4.7}$$

接下来，需要对等式(4.7)右端的三项逐一进行估计。与(3.8)式的推导过程类似，可以得出

$$\int_\Omega(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\lambda)\cdot\Delta\lambda\mathrm{d}x\le\frac{1}{4}\|\Delta\lambda\|_{L^2(\Omega)}^2+8C_4^4\varepsilon^4\|\nabla\lambda\|_{L^2(\Omega)}^2. \tag{4.8}$$

$$n_\infty\int_\Omega\nabla\left(\chi(c)\nabla c\right)\cdot\Delta\lambda\mathrm{d}x\le\frac{1}{4}\|\Delta\lambda\|_{L^2(\Omega)}^2+3n_\infty^2\mathcal{M}_\chi^2C_5^2\varepsilon^2\|\Delta c\|_{L^2(\Omega)}^2. \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}\int_\Omega\nabla\cdot\left(\chi(c)\lambda\nabla c\right)\cdot\Delta\lambda\mathrm{d}x\le{}&\frac{1}{4}\|\Delta\lambda\|_{L^2(\Omega)}^2+\varepsilon^2\|\nabla^3c\|_{L^2(\Omega)}^2+C_7^4\mathcal{M}_\chi^2\varepsilon^2\left(1+\varepsilon^2\right)\|\nabla^2c\|_{L^2(\Omega)}^2\\&+C_7^4\mathcal{M}_\chi^2\varepsilon^4\left(\|\nabla c\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\nabla\lambda\|_{L^2(\Omega)}^2\right).\end{aligned} \tag{4.10}$$

将(4.8)~(4.10)代入(4.7)得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla\lambda\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{1}{2}\|\Delta\lambda\|_{L^2(\Omega)}^2\le{}&2\varepsilon^2\|\nabla^3c\|_{L^2(\Omega)}^2+2\mathcal{M}_\chi^2\varepsilon^2\left(3C_5^2n_\infty^2+C_7^4\left(1+\varepsilon^2\right)\right)\|\nabla^2c\|_{L^2(\Omega)}^2\\&+2\mathcal{M}_\chi^2C_7^4\varepsilon^4\|\nabla c\|_{L^2(\Omega)}^2+2\varepsilon^4\left(8C_4^4+C_7^4\mathcal{M}_\chi^2\right)\|\nabla\lambda\|_{L^2(\Omega)}^2.\end{aligned} \tag{4.11}$$

类似地，可以推导出 ∇c 和 $\nabla\boldsymbol{u}$ 的 L^2 估计如下

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla c\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\Delta c\|_{L^2(\Omega)}^2\le5\mathcal{M}_f^2\left(C_8^2\varepsilon^2+n_\infty^2\right)\|\nabla c\|_{L^2(\Omega)}^2+4C_8^2\mathcal{M}_f^2\varepsilon^2\|\nabla\lambda\|_{L^2(\Omega)}^2. \tag{4.12}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\Delta\boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)}^2\le16\varepsilon^4\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)}^2+2\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}^2\|\nabla\lambda\|_{L^2(\Omega)}^2. \tag{4.13}$$

结合(4.11)~(4.13)式，只需取 ε 适当小，使得 $\mathcal{M}_\chi^2\varepsilon^2\left(3C_5^2n_\infty^2+C_7^4\left(1+\varepsilon^2\right)\right)\le\frac{1}{2}$，并且记 $\mathcal{A}_1:=\max\left\{8C_4^4+C_7^4\mathcal{M}_\chi^2+2C_8^2\mathcal{M}_f^2+\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}^2,3\mathcal{M}_f^2\left(C_8^2+n_\infty^2\right)+\mathcal{M}_\chi^2C_7^4\right\}$，利用假设 $\varepsilon<1$，可以得出

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\nabla\lambda\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\nabla c\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)}^2\right)+\frac{1}{4}\left(\|\Delta\lambda\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\Delta c\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\Delta\boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)}^2\right)\\&\le\varepsilon\|\nabla^3c\|_{L^2(\Omega)}^2+\mathcal{A}_1\left(\|\nabla\lambda\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\nabla c\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)}^2\right).\end{aligned} \tag{4.14}$$

第三步：∇S 的 L^4 估计。

首先，先对方程$(1.5)_1$作用 ∇，再将得到的方程两端同乘以 $4|\nabla\lambda|^2\nabla\lambda$，然后在 Ω 上进行积分得

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega|\nabla\lambda|^4\,\mathrm{d}x+4\int_\Omega|\nabla\lambda|^2\left|\nabla^2\lambda\right|^2\mathrm{d}x+2\int_\Omega\left|\nabla\left(|\nabla\lambda|^2\right)\right|^2\mathrm{d}x\\
&=-4\int_\Omega\nabla\cdot\left(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\lambda+n_\infty\nabla\cdot\left(\chi(c)\nabla c\right)+\nabla\cdot\left(\chi(c)\lambda\nabla c\right)\right)\cdot|\nabla\lambda|^2\,\nabla\lambda\mathrm{d}x\\
&=4\int_\Omega\boldsymbol{u}\cdot\nabla\lambda\cdot\left(|\nabla\lambda|^2\,\nabla^2\lambda+\nabla\left(|\nabla\lambda|^2\right)\cdot\nabla\lambda\right)\mathrm{d}x\\
&\quad+4\int_\Omega n_\infty\nabla\cdot\left(\chi(c)\nabla c\right)\cdot\left(|\nabla\lambda|^2\,\nabla^2\lambda+\nabla\left(|\nabla\lambda|^2\right)\cdot\nabla\lambda\right)\mathrm{d}x\\
&\quad+4\int_\Omega\nabla\cdot\left(\chi(c)\lambda\nabla c\right)\cdot\left(|\nabla\lambda|^2\,\nabla^2\lambda+\nabla\left(|\nabla\lambda|^2\right)\cdot\nabla\lambda\right)\mathrm{d}x.
\end{aligned}\tag{4.15}$$

接下来，对(4.15)式右端的三个积分项逐一进行估计。与(3.19)式的推导过程类似，可以得到

$$\begin{aligned}
&4\int_\Omega\boldsymbol{u}\cdot\nabla\lambda\cdot\left(|\nabla\lambda|^2\,\nabla^2\lambda+\nabla\left(|\nabla\lambda|^2\right)\cdot\nabla\lambda\right)\mathrm{d}x\\
&\le\int_\Omega|\nabla\lambda|^2\left|\nabla^2\lambda\right|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\left\|\nabla\left(|\nabla\lambda|^2\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\varepsilon\left\|\nabla^2\lambda\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{\varepsilon}{4}\left(C_9^2\left\|\nabla\lambda\right\|_{L^2(\Omega)}^2+C_{10}^2\left\|\nabla\boldsymbol{u}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right).
\end{aligned}\tag{4.16}$$

$$\begin{aligned}
&4\int_\Omega n_\infty\nabla\cdot\left(\chi(c)\nabla c\right)\cdot\left(|\nabla\lambda|^2\,\nabla^2\lambda+\nabla\left(|\nabla\lambda|^2\right)\cdot\nabla\lambda\right)\mathrm{d}x\\
&\le\int_\Omega|\nabla\lambda|^2\left|\nabla^2\lambda\right|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\left\|\nabla\left(|\nabla\lambda|^2\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\varepsilon\left(\left\|\nabla^3c\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|\nabla^2\lambda\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)\\
&\quad+\frac{n_\infty^2\mathcal{M}_\chi^2\varepsilon}{4}\left(C_{11}^2+C_{12}^2\right)\left\|\nabla^2c\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{C_{13}^2\varepsilon}{4}\left\|\nabla\lambda\right\|_{L^2(\Omega)}^2.
\end{aligned}\tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
&4\int_\Omega\nabla\cdot\left(\chi(c)\lambda\nabla c\right)\cdot\left(|\nabla\lambda|^2\,\nabla^2\lambda+\nabla\left(|\nabla\lambda|^2\right)\cdot\nabla\lambda\right)\mathrm{d}x\\
&\le\int_\Omega|\nabla\lambda|^2\left|\nabla^2\lambda\right|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\left\|\nabla\left(|\nabla\lambda|^2\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{\mathcal{M}_\chi^2C_{14}^2\varepsilon}{4}\left(\left\|\nabla\lambda\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|\nabla c\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)\\
&\quad+\frac{1}{2}\left\|\nabla\left(|\nabla c|^2\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\varepsilon\left(\left\|\nabla^2\lambda\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|\nabla^2c\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|\nabla^3c\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right).
\end{aligned}\tag{4.18}$$

将(4.16)~(4.18)不等式，代入(4.15)式得

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega|\nabla\lambda|^4\,\mathrm{d}x+\int_\Omega|\nabla\lambda|^2\left|\nabla^2\lambda\right|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\Omega\left|\nabla\left(|\nabla\lambda|^2\right)\right|^2\mathrm{d}x\\
&\le\frac{1}{2}\left\|\nabla\left(|\nabla c|^2\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{\varepsilon}{4}\left(\mathcal{M}_\chi^2C_{14}^2+C_9^2+C_{13}^2\right)\left\|\nabla\lambda\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{\mathcal{M}_\chi^2C_{14}^2\varepsilon}{4}\left\|\nabla c\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{\varepsilon C_{10}^2}{4}\left\|\nabla\boldsymbol{u}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\\
&\quad+3\varepsilon\left\|\nabla^2\lambda\right\|_{L^2(\Omega)}^2+2\varepsilon\left\|\nabla^3c\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left[\frac{n_\infty^2\mathcal{M}_\chi^2\varepsilon}{4}\left(C_{11}^2+C_{12}^2\right)+\varepsilon\right]\left\|\nabla^2c\right\|_{L^2(\Omega)}^2.
\end{aligned}\tag{4.19}$$

类似地，可以得到

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega|\nabla c|^4\,\mathrm{d}x+\int_\Omega|\nabla c|^2\left|\nabla^2c\right|^2\mathrm{d}x+\int_\Omega\left|\nabla\left(|\nabla c|^2\right)\right|^2\mathrm{d}x\\
&\le3\varepsilon\left\|\nabla^2c\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{\varepsilon}{4}\left(C_{15}+\mathcal{M}_f^2C_{16}+\mathcal{M}_f^2C_{17}\right)\left\|\nabla c\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{\mathcal{M}_f^2C_{16}\varepsilon}{4}\left\|\nabla\lambda\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{C_{15}\varepsilon}{4}\left\|\nabla\boldsymbol{u}\right\|_{L^2(\Omega)}^2.
\end{aligned}\tag{4.20}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega|\nabla\boldsymbol{u}|^4\,\mathrm{d}x+\int_\Omega|\nabla\boldsymbol{u}|^2\left|\nabla^2\boldsymbol{u}\right|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\Omega\left|\nabla\left(|\nabla\boldsymbol{u}|^2\right)\right|^2\mathrm{d}x\\
&\le2\varepsilon\left\|\nabla^2\boldsymbol{u}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{\varepsilon}{4}\left(C_{18}+C_{19}\right)\left\|\nabla\boldsymbol{u}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{C_{19}\varepsilon}{4}\left\|\nabla\lambda\right\|_{L^2(\Omega)}^2.
\end{aligned}\tag{4.21}$$

因此，结合(4.19)~(4.21)式，取ε适当小，使得

$$\frac{n_\infty^2\mathcal{M}_\chi^2\varepsilon}{4}\left(C_{11}^2+C_{12}^2\right)+4\varepsilon\le\frac{1}{4},$$

并且选择一个适当大的正常数$\mathcal{A}_2$，记

$$\mathcal{A}_2:=4\max\left\{C_9^2+C_{13}^2+C_{15},C_{10}^2+C_{18}+\mathcal{M}_\chi^2C_{14}^2+\mathcal{M}_f^2C_{16},C_{19}+\mathcal{M}_f^2C_{17}\right\}$$

利用假设$\varepsilon<1$，可以得出

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\nabla\lambda\|_{L^4(\Omega)}^4+\|\nabla c\|_{L^4(\Omega)}^4+\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^4(\Omega)}^4\right)+2\left\|\nabla\lambda\nabla^2\lambda\right\|_{L^2(\Omega)}^2+2\left\|\nabla c\nabla^2c\right\|_{L^2(\Omega)}^2+2\left\|\nabla\boldsymbol{u}\nabla^2\boldsymbol{u}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\\&\le2\varepsilon\left\|\nabla^3c\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{1}{4}\left(\left\|\nabla^2\lambda\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|\nabla^2\boldsymbol{u}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|\nabla^2c\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)+\mathcal{A}_2\left(\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\nabla\lambda\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\nabla c\|_{L^2(\Omega)}^2\right).\end{aligned}\tag{4.22}$$

第四步：一致先验估计。

首先，将方程$(1.5)_2$改写为

$$\Delta c=c_t+\boldsymbol{u}\cdot\nabla c+\lambda\left(f(c)-f(0)\right)+n_\infty\left(f(c)-f(0)\right)\tag{4.23}$$

在方程(4.23)两端同时作用∇，利用 Hölder 不等式、Young 不等式和 Sobolev 嵌入定理计算可以得到

$$\begin{aligned}\left\|\nabla^3c\right\|_{L^2(\Omega)}&=\|\nabla\Delta c\|_{L^2(\Omega)}\\&\le\|\partial_t\nabla c\|_{L^2(\Omega)}+\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^4(\Omega)}\|\nabla c\|_{L^4(\Omega)}+\|\boldsymbol{u}\|_{L^\infty(\Omega)}\left\|\nabla^2c\right\|_{L^2(\Omega)}\\&\quad+\mathcal{M}_f\|\nabla c\|_{L^4(\Omega)}\|\lambda\|_{L^4(\Omega)}+n_\infty\mathcal{M}_f\|\nabla c\|_{L^2(\Omega)}+\mathcal{M}_f\|c\|_{L^4(\Omega)}\|\nabla\lambda\|_{L^4(\Omega)}\\&\le\|\partial_t\nabla c\|_{L^2(\Omega)}+\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^4(\Omega)}^2+\left\|\nabla^2c\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\boldsymbol{u}\|_{H^2(\Omega)}^2\\&\quad+C_{20}\mathcal{M}_f\left(\|\nabla\lambda\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\nabla c\|_{L^2(\Omega)}^2\right)+\mathcal{M}_f\left(\|\nabla\lambda\|_{L^4(\Omega)}^2+\|\nabla c\|_{L^4(\Omega)}^2\right)\\&\le\|\partial_t\nabla c\|_{L^2(\Omega)}+\left\|\nabla^2c\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|\nabla^2\boldsymbol{u}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\mathcal{M}_f\varepsilon^2\\&\quad+C_{20}\mathcal{M}_f\left(\|\nabla\lambda\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\nabla c\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)}^2\right).\end{aligned}\tag{4.24}$$

对方程$(1.5)_2$两端先作用∂_t，再与$\partial_t c$作L^2内积，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\partial_tc\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\partial_t\nabla c\|_{L^2(\Omega)}^2\le\mathcal{M}_f\varepsilon\left(\left\|\nabla^2\lambda\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|\nabla^2c\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|\nabla^2\boldsymbol{u}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)\tag{4.25}$$

取ε适当小，使得$C_{20}\mathcal{M}_f\varepsilon\le\frac{1}{32}$，将不等式(4.14)、(4.24)和(4.25)相加得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\nabla\lambda\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\nabla c\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)}^2\right)+\frac{3}{8}\left(\|\Delta\lambda\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\Delta c\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\Delta\boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)}^2\right)\\&\le3\mathcal{A}_1\left(\|\nabla\lambda\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\nabla c\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)}^2\right).\end{aligned}\tag{4.26}$$

将不等式(4.22)、(4.24)和(4.25)相加得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\nabla\lambda\|_{L^4(\Omega)}^4+\|\nabla c\|_{L^4(\Omega)}^4+\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^4(\Omega)}^4\right)+2\left\|\nabla\lambda\nabla^2\lambda\right\|_{L^2(\Omega)}^2+2\left\|\nabla c\nabla^2c\right\|_{L^2(\Omega)}^2+2\left\|\nabla\boldsymbol{u}\nabla^2\boldsymbol{u}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\\&\le\frac{1}{3}\left(\left\|\nabla^2\lambda\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|\nabla^2\boldsymbol{u}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|\nabla^2c\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)+2\mathcal{A}_2\left(\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\nabla\lambda\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\nabla c\|_{L^2(\Omega)}^2\right).\end{aligned}\tag{4.27}$$

其次，在不等式(4.26)两端同乘$\frac{\alpha_5}{288\mathcal{A}_1}$，在不等式(4.27)两端同乘$\frac{\alpha_5}{396\mathcal{A}_2}$，将所得不等式与(4.6)式相加，并取$\gamma_2=\frac{\alpha_5}{2304\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2}$，则存在$\varepsilon_2\in(0,1)$，对$\forall 0<\varepsilon\le\varepsilon_2$有

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\gamma_1\|\lambda\|_{L^2(\Omega)}^2+\gamma_2\|c\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)}^2\right)+\frac{\alpha_5}{96}\left(\|\nabla\lambda\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\nabla c\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)}^2\right)\\&+\frac{\alpha_5}{288\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\nabla\lambda\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\nabla c\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)}^2\right)\\&+\frac{\alpha_5}{38016\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2}\left(\|\Delta\lambda\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\Delta c\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\Delta\boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)}^2\right)\\&+\frac{\alpha_5}{396\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\nabla\lambda\|_{L^4(\Omega)}^4+\|\nabla c\|_{L^4(\Omega)}^4+\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^4(\Omega)}^4\right)\\&+\frac{\alpha_5}{198\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2}\left(\left\|\nabla\lambda\nabla^2\lambda\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|\nabla c\nabla^2 c\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|\nabla\boldsymbol{u}\nabla^2\boldsymbol{u}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)\le 0.\end{aligned}\tag{4.28}$$

最后，将不等式(4.28)从 0 到 t 积分，可知对$\forall t\in[0,T]$有

$$\begin{aligned}&\left(\|(\lambda,c,\boldsymbol{u})(\cdot,t)\|_{H^1(\Omega)}^2+\|\nabla(\lambda,c,\boldsymbol{u})\|_{L^4(\Omega)}^4\right)\\&\quad+\int_0^t\left(\|(\nabla\lambda,\nabla c,\nabla\boldsymbol{u})(\cdot,s)\|_{H^1(\Omega)}^2+\|\nabla(\lambda,c,\boldsymbol{u})\cdot\Delta(\lambda,c,\boldsymbol{u})\|_{L^2(\Omega)}^2\right)\mathrm{d}s\\&\le C_{21}\left(\|(\lambda_0,c_0,\boldsymbol{u}_0)\|_{H^1(\Omega)}^2+\|\nabla(\lambda_0,c_0,\boldsymbol{u}_0)\|_{L^4(\Omega)}^4\right).\end{aligned}\tag{4.29}$$

其中$C_{21}>0$，故引理 4.1 得证。

4.2. 整体存在性

根据引理 4.1 我们可以知道在空间$C\left([0,T];H^1(\Omega)\cap W^{1,4}(\Omega)\right)$上，对于一些$T>0$，方程组(1.5)~(1.6)存在局部唯一解$(\lambda,c,\boldsymbol{u})$。因此还需证明 T 能够拓展到$+\infty$。

首先，取$\varepsilon_0:=\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$，其中$\varepsilon_1$和$\varepsilon_2$都是正数，分别由引理 3.1 和引理 4.1 确定的。

然后，选取适当小的初值$S(0)$满足

$$\|S(0)\|_{H^1(\Omega)\cap W^{1,4}(\Omega)}\le\frac{\varepsilon_0}{2\sqrt{1+C_1}}\le\frac{\varepsilon_0}{2}\le\varepsilon_2,$$

其中$C_1>0$由引理 4.1 给出。记方程组(1.5)-(1.6)解的最大存在时间为

$$T^*:=\sup\left\{t:\sup_{0\le s\le t}\|S(s)\|_{H^1(\Omega)\cap W^{1,4}(\Omega)}\le\varepsilon_0\right\}.$$

再根据引理 3.1 的局部存在性结论和连续性可得$T^*>0$。若T^*为有限时间，那么就有

$$\sup_{0\le s\le T^*}\|S(s)\|_{H^1(\Omega)\cap W^{1,4}(\Omega)}=\varepsilon_0,$$

这与引理 4.1 得到一致先验估计

$$\sup_{0\le s\le T^*}\|S(s)\|_{H^1(\Omega)\cap W^{1,4}(\Omega)}\le\sqrt{C_1}\|S(0)\|_{H^1(\Omega)\cap W^{1,4}(\Omega)}\le\frac{\sqrt{C_1}\varepsilon_0}{2\sqrt{1+C_1}}\le\frac{\varepsilon_0}{2},$$

相矛盾，所以T^*是无限的时间。因此，引理 4.1 中的时间 T 能够拓展到$+\infty$。最后，对于不等式(1.7)的证明，可以由(4.29)式得到，从而完成了定理 1.1 的证明。

参考文献

[1] Tuval, I., Cisneros, L., Dombrowski, C., *et al*. (2005) Bacterial Swimming and Oxygen Transport near Contact Lines. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **102**, 2277-2282. https://doi.org/10.1073/pnas.0406724102

[2] Du, Y. and Zhang, Q. (2021) Global Classical Solutions for the 2D Four-Component Chemotaxis-Navier-Stokes Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **503**, Article ID: 125338. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2021.125338

[3] Chen, Q. and Hao, X. (2021) Large Global Solutions to the Three-Dimensional Chemotaxis-Navier-Stokes Equations Slowly Varying in One Direction. *Applied Mathematics Letters*, **112**, Article ID: 106773. https://doi.org/10.1016/j.aml.2020.106773

[4] Lorz, A. (2010) Coupled Chemotaxis Fluid Model. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **20**, 987-1004. https://doi.org/10.1142/S0218202510004507

[5] Michael, W. (2017) How Far do Chemotaxis-Driven Forces Influence Regularity in the Navier-Stokes System? *Transactions of the American Mathematical Society*, **369**, 3067-3125. https://doi.org/10.1090/tran/6733

[6] Michael, W. (2016) Global Weak Solutions in a Three-Dimensional Chemotaxis-Navier-Stokes System. *Annales de l'-Institut Henri Poincare Analye Non Lineaire*, **33**, 1329-1352. https://doi.org/10.1016/j.anihpc.2015.05.002

[7] Yang, L., Liu, X. and Hou, Z. (2023) Asymptotic Behavior of Small-Data Solutions to a Keller-Segel-Navier-Stokes System with Indirect Signal Production. *Czechoslovak Mathematical Journal*, **73**, 49-70. https://doi.org/10.21136/CMJ.2022.0399-21

[8] Nam, K.M., Li, K.O. and Kim, Y.H. (2023) Boundedness of Solutions to a 2D Chemotaxis-Navier-Stokes System with General Sensitivity and Nonlinear Diffusion. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **73**, Article ID: 103906. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2023.103906

[9] Chertock, A., Fellner, K., Kurganov, A., *et al*. (2012) Sinking, Merging and Stationary Plumes in a Coupled Chemotaxis-Fluid Model: A High-Resolution Numerical Approach. *Journal of Fluid Mechanics*, **694**, 155-190. https://doi.org/10.1017/jfm.2011.534

[10] Lee, H.G. and Kim, J. (2015) Numerical Investigation of Falling Bacterial Plumes Caused by Bioconvection in a Three-Dimensional Chamber. *European Journal of Mechanics. B/Fluids*, **52**, 120-130. https://doi.org/10.1016/j.euromechflu.2015.03.002

[11] Peng, Y. and Xiang, Z. (2018) Global Solutions to the Coupled Chemotaxis-Fluids System in a 3D Unbounded Domain with Boundary. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **28**, 869-920. https://doi.org/10.1142/S0218202518500239

[12] Peng, Y. and Xiang, Z. (2019) Global Existence and Convergence Rates to a Chemotaxis-Fluids System with Mixed Boundary Conditions. *Journal of Differential Equations*, **267**, 1277-1321. https://doi.org/10.1016/j.jde.2019.02.007

[13] Evans, L.C. (2010) Partial Differential Equations. 2nd Edition, Higher Education Press Limited Company, Beijing.

[14] Galdi, G.P. (2011) An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations: Steady-State Problems. Springer, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09620-9