**Pure Mathematics** 理论数学, 2024, 14(4), 262-267
Published Online April 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.144133

# 涉及微分多项式和分担值的亚纯函数的正规定则

**杨喜龙**[*]**，龚翌晖，杨　祺**[#]

新疆师范大学数学科学学院，新疆 乌鲁木齐

收稿日期：2024年3月6日；录用日期：2024年3月29日；发布日期：2024年4月26日

## 摘　要

研究了涉及分担值的亚纯函数的正规定则，利用Zalcman引理，推广了前人的一个结果，得到了一个涉及微分多项式和分担值的亚纯函数正规定则。文章在亚纯函数理论方面做了深入的研究，扩展了已有的结果，对于理解亚纯函数的性质和正规性具有一定的理论意义和研究价值。设$k,q(\geq 2)$是正整数，$F$为$D$内的一族亚纯函数，如果对任一的函数$f\in F$，$f$的零点重数$\geq k+1$。$H\left(f,f',\cdots,f^{(k)}\right)$为$f$的微分多项式且$\Gamma/\gamma|_H<k+1$。若对任意一组函数$f,g\in F$，$\left(L(f)\right)^q+H\left(f,f',\cdots,f^{(k)}\right)$与$\left(L(g)\right)^q+H\left(g,g',\cdots,g^{(k)}\right)$在$D$内分担1，则亚纯函数$F$在区域$D$内是正规的。

## 关键词

亚纯函数，微分多项式，正规定则，分担值

# The Normality Criteria of Meromorphic Functions Concerning Shared Value and Differential Polynomials

**Xilong Yang**[*]**, Yihui Gong, Qi Yang**[#]

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: Mar. 6th, 2024; accepted: Mar. 29th, 2024; published: Apr. 26th, 2024

[*]第一作者。
[#]通讯作者。

文章引用：杨喜龙，龚翌晖，杨祺．涉及微分多项式和分担值的亚纯函数的正规定则[J]．理论数学，2024，14(4): 262-267. DOI: 10.12677/pm.2024.144133

## Abstract

**In this paper, we study the normal families of meromorphic functions concerning shared values. By using Zalcman Lemma, we improve and promote one of the results of its predecessors, obtain a normal criterion of meromorphic functions concerning shared value and differential polynomials. In this paper, the meromorphic function theory has been studied in depth, which expands the existing results and has certain theoretical significance and research value for understanding the properties and normality of meromorphic functions. Let $k,q(\geq 2)$ be two positive integers, $F$ be a normal of meromorphic functions on domain $D$. If for each function $f\in F$, all of whose zeros multiplicity at least $k+1$, and $H\left(f,f',\cdots,f^{(k)}\right)$ be a differential polynomial of $f$ and $\Gamma/\gamma|_H<k+1$. If each pair function $f,g\in F$, $\left(L(f)\right)^q+H\left(f,f',\cdots,f^{(k)}\right)$ and $\left(L(g)\right)^q+H\left(g,g',\cdots,g^{(k)}\right)$ share 1 in $D$, then $F$ is normal in $D$.**



## Keywords

**Meromorphic Function, Differential Polynomial, Normal Criterion, Share Value**




## 1. 引言

设 $f$ 和 $g$ 是区域 $D$ 内的两个亚纯函数，$a$ 是任意一个复数。若当 $f(z)-a=0$ 时，有 $g(z)-a=0$，我们记为

$$f(z)=a\Rightarrow g(z)=a,$$

如果 $f(z)=a\Rightarrow g(z)=a$ 且 $g(z)=a\Rightarrow f(z)=a$，我们记为 $f(z)=a\Leftrightarrow g(z)=a$，并且称 $f$ 与 $g$ 在 $D$ 内分担 $a$，或称 $f$ 与 $g$ 在 $D$ 内 $IM$ 分担 $a$ (不计重数) [1]。

设 $a_1(z),a_2(z),\cdots,a_n(z)$ 为区域 $D$ 内的解析函数，$n_0,n_1,\cdots,n_k$ 是非负整数。

$$M\left(f,f',\cdots,f^{(k)}\right)=f^{n_0}\left(f'\right)^{n_1}\cdots\left(f^{(k)}\right)^{n_k},$$

$$\Gamma_M=n_0+2n_1+3n_2+\cdots+(k+1)n_k,$$

$$\gamma_M=n_0+n_1+n_2+\cdots+n_k,$$

我们称 $M\left(f,f',\cdots,f^{(k)}\right)$ 为 $f$ 的微分单项式，称 $\Gamma_M$ 为 $M\left(f,f',\cdots,f^{(k)}\right)$ 的权，并且 $\gamma_M$ 为 $M\left(f,f',\cdots,f^{(k)}\right)$ 的次数。

$M_1\left(f,f',\cdots,f^{(k)}\right),M_2\left(f,f',\cdots,f^{(k)}\right),\cdots,M_n\left(f,f',\cdots,f^{(k)}\right)$ 为 $f$ 的微分单项式，

$H\left(f,f',\cdots,f^{(k)}\right)=a_1(z)M_1\left(f,f',\cdots,f^{(k)}\right)+a_2(z)M_2\left(f,f',\cdots,f^{(k)}\right)+\cdots+a_n(z)M_n\left(f,f',\cdots,f^{(k)}\right)$ 为 $f$ 的微分多项式，

$$\Gamma_H = \max\left\{\Gamma_{M_1}, \Gamma_{M_2}, \cdots, \Gamma_{M_n}\right\}, \quad \gamma_H = \max\left\{\gamma_{M_1}, \gamma_{M_2}, \cdots, \gamma_{M_n}\right\}$$

分别为 $H\left(f, f', \cdots, f^{(k)}\right)$ 的权和次数，并且 $\left.\frac{\Gamma}{\gamma}\right|_H = \max\left\{\frac{\Gamma_{M_1}}{\gamma_{M_1}}, \frac{\Gamma_{M_2}}{\gamma_{M_2}}, \cdots, \frac{\Gamma_{M_n}}{\gamma_{M_n}}\right\}$。

1959 年，W. K. Hayman [2]证明了以下结果。

**定理 A** 设 $k$ 为正整数，$f$ 为复平面 $C$ 上的非常数亚纯函数。则 $f$ 或 $f^{(k)}-1$ 至少有一个零点。如果 $f$ 是超越的，则 $f$ 或 $f^{(k)}-1$ 有无穷多个零点。

1979 年，顾永兴[3]证明了 W. K. Hayman 提出的与定理 A 相关的正规猜想。

**定理 B** 设 $k$ 为正整数，$F$ 为复平面 $D$ 内的亚纯函数族。若对于定义在 $D$ 内的任意 $f \in F$，有 $f \neq 0$ 和 $f^{(k)} \neq 1$，则 $F$ 在 $D$ 上正规。

2000 年，方明亮与洪伟[4]推广定理 B，证明了下述结果。

**定理 C** 设 $k, q \geq 2$ 为正整数，$H\left(f, f', \cdots, f^{(k)}\right)$ 是满足 $\Gamma/\gamma|_H < k+1$ 的一个微分多式，$F$ 为区域 $D$ 内的亚纯函数。如果对于任一的在 $D$ 内的 $f \in F$，$f$ 的零点重级至少为 $k+1$，且

$$\left(f^{(k)}\right)^q + H\left(f, f', \cdots, f^{(k)}\right) \neq 1,$$

则 $F$ 在 $D$ 上正规。

2012 年，孙承雄[1]从分担值的角度改进了定理 C，证明了如下正规定则。

**定理 D** 设 $k$，$q$ 至少为 2 且为正整数，$F$ 为区域 $D$ 内的一族亚纯函数，如果对任一的函数 $f \in F$，$f$ 的零点重级至少为 $k+1$，$H\left(f, f', \cdots, f^{(k)}\right)$ 为 $f$ 的微分多项式，并且 $\Gamma/\gamma|_H < k+1$，若对任意一组函数 $f, g \in F$，$\left(f^{(k)}\right)^n + H\left(f, f', \cdots, f^{(k)}\right)$ 与 $\left(g^{(k)}\right)^n + H\left(g, g', \cdots, g^{(k)}\right)$ 在 $D$ 内分担 1，则 $F$ 在 $D$ 内正规。

一个很自然的问题，定理 D 中的 $f^{(k)}(z)$ 能否替换为一般的微分多项式 $L(f)$？本文利用 Pang-Zalcman 引理进行讨论，证明了下述定理。

**定理 1.1** 设 $k, q(\geq 2)$ 是正整数，$F$ 为 $D$ 内的一族亚纯函数，如果对任一的函数 $f \in F$，$f$ 的零点重数 $\geq k+1$。$H\left(f, f', \cdots, f^{(k)}\right)$ 为 $f$ 的微分多项式且 $\Gamma/\gamma|_H < k+1$。若对任意一组函数 $f$，$g \in F$，$\left(L(f)\right)^q + H\left(f, f', \cdots, f^{(k)}\right)$ 与 $\left(L(g)\right)^q + H\left(g, g', \cdots, g^{(k)}\right)$ 在 $D$ 内分担 1，则亚纯函数 $F$ 在区域 $D$ 内是正规的。

## 2. 引理

**引理 2.1** [5] (Zalcman 引理)设 $k \in N_+$，$F$ 是单位圆盘 $\Delta$ 上的一簇亚纯函数，对任一的函数 $f \in F$，$f$ 的所有零点重数大于等于 $k$;如果有 $A \geq 1$，当 $f(z)=0$ 时，$\left|f^{(k)}(z)\right| \leq A$，则 $F$ 在 $z_0 \in \Delta$ 的任意邻域内不正规的充分且必要条件为有点列 $z_n(\in D) \to z_0$，函数列 $f_n \in F$，正数列 $\rho_n \to 0^+$，使得

$$g_n(\xi) = \rho_n^{-k} f_n(z_n + \rho_n \xi)$$

在复平面 $C$ 上按球面距离内闭一致收敛至一个非常数的亚纯函数 $g(\xi)$，并且 $g$ 的级小于等于 2，并且 $g^{\#}(\xi) \leq g^{\#}(0) = kA+1$，其中 $g^{\#}(\xi) = \left|g'(\xi)\right| \Big/ \left(1+\left|g(\xi)\right|^2\right)$。

**引理 2.2** [1]设 $f$ 为一个有穷级的亚纯函数，$k$，$q$ 大于等于 2 并且是正整数。若 $f$ 的零点重数大于等于 $k+1$，且 $\left(f^{(k)}\right)^q \neq 1$，则 $f$ 恒是常数。

**引理 2.3** [1]如果 $f$ 为一个非常数有穷级的超越亚纯函数，$k, q \geq 2$ 并且是正整数。若 $f$ 的零点重级大于等于 $k+1$，则 $\left(f^{(k)}(\xi)\right)^q - 1$ 至少存在 2 个不相同的零点。

## 3. 定理的证明

**定理 1.1 的证明** 设 $D$ 为单位圆盘 $\Delta$，假设亚纯函数 $F$ 在区域 $D$ 内不正规。为了一般性，设 $F$ 在 $z_0=0$ 这一点处不正规。根据引理 1 可得，有函数列 $f_n\in F$，点列 $z_n(\in D)\to z_0$，正数列 $\rho_n\to 0^+$，使得 $h_n(\xi)=\rho_n^{-k}f_n(z_n+\rho_n\xi)$ 在复平面 $C$ 上按球面距离内闭一致收敛至一个非常数的亚纯函数 $h(\xi)$，并且 $h$ 级小于等于 2，$h(\xi)$ 的零点重级大于等于 $k+1$。

根据引理 2.2，存在 $\xi_0$，使得 $\left(f^{(k)}(\xi_0)\right)^q-1=0$，显然 $f^{(k)}(\xi_0)\neq\infty$，则存在 $\xi>0$，使得 $h(\xi)$ 在 $D_{2\delta}=\{\xi:|\xi-\xi_0|<2\delta\}$ 内是一个全纯函数。因而对于充分大的 $n$，$h_n^{(i)}(\xi)(i=0,1,\cdots,k)$ 在 $D_\delta=\{\xi:|\xi-\xi_0|<\delta\}$ 内全纯，且 $h_n^{(i)}(\xi)(i=0,1,\cdots,k)$ 在 $\bar{D}_\delta=\{\xi:|\xi-\xi_0|<\delta\}$ 上一致收敛于 $h^{(i)}(\xi)(i=0,1,\cdots,k)$。

为书写简单，记 $\hat{\xi}_n=z_n+\rho_n\xi$，则 $f_n^{(i)}(\hat{\xi})=\rho_n^{k-i}h^{(i)}(\xi)$。所以

$$\begin{aligned}\left(L(f_n)(\hat{\xi}_n)\right)^q&=\left(f_n^{(k)}(\hat{\xi}_n)+a_{k-1}(\hat{\xi}_n)f_n^{(k-1)}(\hat{\xi}_n)+\cdots+a_1(\hat{\xi}_n)f_n'(\hat{\xi}_n)+a_0(\hat{\xi}_n)f_n(\hat{\xi}_n)\right)^q\\&=\left(h_n^{(k)}(\xi)+\rho_n a_{k-1}(\hat{\xi}_n)h_n^{(k-1)}(\xi)+\cdots+\rho_n^{k-1}a_1(\hat{\xi}_n)h_n'(\xi)+\rho_n^k a_0(\hat{\xi}_n)h_n(\xi)\right)^q.\end{aligned}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\left(L(f_n)(\hat{\xi}_n)\right)^q=\left(h^{(k)}(\xi)\right)^q.$$

又

$$\begin{aligned}H\left(f_n(\hat{\xi}_n),\cdots,f_n^{(k)}(\hat{\xi}_n)\right)&=\sum_{i=1}^m a_i(\hat{\xi}_n)M_i\left(f_n(\hat{\xi}_n),\cdots,f_n^{(k)}(\hat{\xi}_n)\right)\\&=\sum_{i=1}^m a_i(\hat{\xi}_n)\rho_n^{(k+1)\gamma_{M_i}-\Gamma_{M_i}}M_i\left(h_n(\xi),\cdots,h_n^{(k)}(\xi)\right),\end{aligned}$$

考虑到 $a_i(z)(i=1,2,\cdots,m)$ 在 $D$ 内解析，则对于充分大的 $n$，我们可以得到

$$\left|a_i(\hat{\xi}_n)\right|\le M\left(\frac{1+r}{2},a_i(z)\right)<\infty,(i=1,2,\cdots,m).$$

由于 $\left.\frac{\Gamma}{\gamma}\right|_H<k+1$，我们得出

$$\sum_{i=1}^m a_i(\hat{\xi}_n)\rho_n^{(k+1)\gamma_{M_i}-\Gamma_{M_i}}M_i\left(h_n(\xi),\cdots,h_n^{(k)}(\xi)\right)$$

在 $D_{\frac{1}{2}\delta}=\left\{\xi:|\xi-\xi_0|<\frac{1}{2}\delta\right\}$ 上一致收敛于 0，

故 $\lim\limits_{n\to\infty}H\left(f_n(\hat{\xi}_n),\cdots,f_n^{(k)}(\hat{\xi}_n)\right)=0$。

因此我们得到

$$\left(L(f_n)(\hat{\xi}_n)\right)^q+H_i\left(f_n(\hat{\xi}_n),\cdots,f_n^{(k)}(\hat{\xi}_n)\right)-1\to\left(h^{(k)}(\xi)\right)^q-1$$

在 $D_{\frac{1}{2}\delta}=\left\{\xi:|\xi-\xi_0|<\frac{1}{2}\delta\right\}$ 上内闭一致收敛。

若 $\left(h^{(k)}(\xi)\right)^q-1\equiv 0$，则 $h(\xi)$ 是常数，因此矛盾；如果 $\left(h^{(k)}(\xi)\right)^q-1\neq 0$，则根据引理 2.2 可得，$h(\xi)$ 是常数，因此矛盾。故可得 $\left(h^{(k)}(\xi)\right)^q-1$ 至少仅存在一个零点。

然后证明 $\left(h^{(k)}(\xi)\right)^q-1$ 只存在一个零点。若 $\xi_0$ 与 $\xi_0^*$ 是 $\left(h^{(k)}(\xi)\right)^q-1$ 的两个不同的零点，则取充分小的 $\delta(>0)$，使得 $D_1\cap D_2\neq\phi$，且 $\left(h^{(k)}(\xi)\right)^q-1$ 在 $D_1\cap D_2$ 中除 $\xi_0$ 与 $\xi_0^*$ 外没有其他零点，其中 $D_1(\xi_0,\delta)=\left\{\xi:|\xi-\xi_0|<\delta\right\}$，$D_2(\xi_0^*,\delta)=\left\{\xi:|\xi-\xi_0^*|<\delta\right\}$，于是由 Hurwitz 定理得，对于充分大的 $j$，存在点列 $\xi_j\in D_1(\xi_0,\delta)$，$\xi_j^*\in D_2(\xi_0^*,\delta)$，使得

$$L\left(f_n\left(\hat{\xi}_n\right)\right)+H\left(f_n\left(\hat{\xi}_n\right),\cdots,f_n^{(k)}\left(\hat{\xi}_n\right)\right)-1=0,$$

$$L\left(f_n\left(\hat{\xi}_n^*\right)\right)+H\left(f_n\left(\hat{\xi}_n^*\right),\cdots,f_n^{(k)}\left(\hat{\xi}_n^*\right)\right)-1=0。$$

因为对任意 $f,g\in F$，$\left(L(f)\right)^q+H\left(f,f',\cdots,f^{(k)}\right)$ 与 $\left(L(g)\right)^q+H\left(g,g',\cdots,g^{(k)}\right)$ 在 $D$ 内分担 1，则对任意的 $m\in N_+$，有

$$L\left(f_m\left(\hat{\xi}_n\right)\right)+H\left(f_m\left(\hat{\xi}_n\right),\cdots,f_m^{(k)}\left(\hat{\xi}_n\right)\right)-1=0,$$

$$L\left(f_m\left(\hat{\xi}_n^*\right)\right)+H\left(f_m\left(\hat{\xi}_n^*\right),\cdots,f_m^{(k)}\left(\hat{\xi}_n^*\right)\right)-1=0。$$

固定 $m$，令 $n\to\infty$，有 $z_n+\rho_n\xi_n\to 0$，$z_n+\rho_n\xi_n^*\to 0$，则

$$\left(L(f_m)(0)\right)^q+H\left(f_m(0),\cdots,f_m^{(k)}(0)\right)-1=0。$$

因为 $\left(L(f_m)(0)\right)^q+H\left(f_m(0),\cdots,f_m^{(k)}(0)\right)-1$ 的零点没有聚点，所以对充分大的 $n$ 有

$$z_n+\rho_n\xi_n=0,\quad z_n+\rho_n\xi_n^*=0。$$

即 $\xi_n=\xi_n^*=-\dfrac{z_n}{\rho_n}$。但这与 $\xi_n\in D_1$，$\xi_n^*\in D_2$，且 $D_1\cap D_2=\phi$，矛盾。所以 $\left(h^{(k)}(\xi)\right)^q-1$ 只有一个零点，与引理 2.3 矛盾。因此，$F$ 在 $D$ 内正规。定理 1.1 得证。

## 4. 结论

本文证明了定理 1.1，设 $k,q(\geq 2)$ 是正整数，$F$ 为 $D$ 内的一族亚纯函数，如果对任一的函数 $f\in F$，$f$ 的零点重数 $\geq k+1$。$H\left(f,f',\cdots,f^{(k)}\right)$ 为 $f$ 的微分多项式且 $\Gamma/\gamma|_H<k+1$。若对任意一组函数 $f,g\in F$，$\left(L(f)\right)^q+H\left(f,f',\cdots,f^{(k)}\right)$ 与 $\left(L(g)\right)^q+H\left(g,g',\cdots,g^{(k)}\right)$ 在 $D$ 内分担 1，则亚纯函数 $F$ 在区域 $D$ 内是正规的。主要是将定理 D 中的 $f^{(k)}(z)$ 替换为一般的微分多项式 $L(f)$。以此基础进行了该定理的证明。

## 基金项目

国家自然科学基金资助(11961068)项目名称：亚纯函数的正规族及其应用。

## 参考文献

[1] 孙承雄. 关于亚纯函数正规族的正规定则[J]. 西安工程大学学报, 2012, 26(2): 262-265.

[2] Hayman, W.K. (1959) Picard Values of Meromorphic Functions and Their Derivatives. *Annals of Mathematics*, **70**,

9-42. https://doi.org/10.2307/1969890

[3] Gu, Y.X. (1979) A Normal Criterion of Meromorphic Families, Scientia Sinica. *Mathematical Issue*, No. 1, 267-274.

[4] Fang, M.L. and Hong, W. (2000) Some Results on Normal Family of Meromorphic Function. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*: *Second Series*, **23**, 143-151.

[5] Pang, X.C. and Zalcman, L. (2000) Normal Families and Shared Values. *Bulletin of the London Mathematical Society*, **32**, 325-331.https://doi.org/10.1112/S002460939900644X