Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(4), 73-79
Published Online April 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.144112

函数型弹性外边界条件下偏微分方程定解问题的解的相似构造

曾　峥，董晓旭[*]，彭　钰，梁　滢，王　玉

西华大学理学院，四川 成都

收稿日期：2024年2月29日；录用日期：2024年3月22日；发布日期：2024年4月17日

摘　要

本文主要研究了指数函数型弹性外边界条件下偏微分方程的定解问题。首先，介绍了弹性外边界条件下偏微分方程的定解问题。其次，给出了定解问题解的相关定理以及相似结构解的构造步骤，为后续求解奠定了理论基础。最后，通过运用Laplace变换法和Gaver-Stehfest数值反演法，成功解决了相关微分方程的定解问题，并得出了结论。引入函数型弹性外边界条件的研究不仅拓宽了偏微分方程定解的研究范围，同时也使得弹性外边界条件更贴合实际问题，具有更高的实用性和应用价值。本研究在理论和方法上都取得了一定的突破，为类似问题的研究提供了新的思路和方法，具有一定的学术价值和实用意义。

关键词

定解问题，弹性外边界条件，相似结构解，Laplace变换，Gaver-Stehfest数值反演法

Similar Construction of Solutions to Definite Solution Problem for Partial Differential Equation with Functional Elastic External Boundary Condition

Zheng Zeng, Xiaoxu Dong[*], Yu Peng, Ying Liang, Yu Wang

School of Science, Xihua University, Chengdu Sichuan

Received: Feb. 29th, 2024; accepted: Mar. 22nd, 2024; published: Apr. 17th, 2024

Abstract

In this paper, we mainly study the definite solution of partial differential equations under expo-

[*]通讯作者。

文章引用: 曾峥, 董晓旭, 彭钰, 梁滢, 王玉. 函数型弹性外边界条件下偏微分方程定解问题的解的相似构造[J]. 理论数学, 2024, 14(4): 73-79. DOI: 10.12677/pm.2024.144112

nential function type elastic outer boundary conditions. Firstly, the definite solution of partial differential equations under elastic external boundary conditions is introduced, and its application in practical problems is discussed. Then, the related theorems of the solution of the definite solution problem are given, and the construction steps of the similar structure solution are introduced, which lays a theoretical foundation for the subsequent solution. Finally, by using Laplace transform method and Gaver-Stehfest numerical inversion method, the definite solution problem of related differential equations is successfully solved, and the conclusion is drawn. The research on the introduction of functional elastic external boundary conditions not only broadens the research scope of the definite solution of partial differential equations, but also makes the elastic external boundary conditions more suitable for practical problems, which has higher practicability and application value. This study has made some breakthroughs in theory and method, and provides new ideas and methods for the study of similar problems, which has certain academic value and practical significance.

Keywords

Definite Solutions Problem, Elastic Outer Boundary Conditions, Similar Structure Solution, Laplace Transform, Gaver-Stehfest Numerical Inversion Method

1. 引言

偏微分方程及其系统作为描述真实世界现象的数学模型，在物理科学和工程等领域中广泛应用。在实际应用中，满足一些附加条件的偏微分方程的解，如初始条件边界条件，是一个常见的问题。因此，研究偏微分方程定解问题的解在物理现象的研究中具有重要的作用。国内外的学者都在这一领域做了大量的研究。目前，为了更有效地解决实际问题，研究者逐渐将由弹性概念推导出的弹性外边界条件引入到偏微分方程的定解中。

弹性反映了一个变量的变化对另一个变量的变化的敏感性。1920 年，Marshall [1]首次提出了需求弹性的概念。然后，Woods 和 Sauro [2]给出了弹性和弹性系数的公式。Madenci 和 Dorduncu 等人[3]利用微分算子得到了线性和非线性偏微分方程的数值解。他们所研究的模型的边界条件是狄利克雷特征和诺伊曼特征的边界条件。Yang 和 Goodyer 等人[4]介绍了一种新的软件工具，用于求解抛物线性和非线性偏微分方程的有效解。它适用于两个不同的样本问题，说明了该工具的灵活性和稳定性。Abraham-Shrauner [5]利用幂指数法识别了非线性偏微分方程的双曲函数的两个特征中的任意一个或雅可比椭圆函数的三个特征中的任意一个在自变量平移下不变的可能的精确解析非线性解。Benamou 和 Froese 等人[6]将经典的涉及偏微分方程 Lie 对称的“直接”技术应用于粘度系数广义伯格斯方程的边值问题，并求解了特定的子情况。然而，这种方法也有其局限性。Polyanin and Zhurov [7]导出了具有有限松弛率的粘性不可压缩流体的非线性微分－差分运动方程，并给出了相应的精确解。所得结果可用于解决粘性流体微分－差分模型的一些水动力学问题。Lee 和 Manteuffel [8]提出了一个结合非线性偏微分方程的牛顿线性化和 FOSLL 离散化方法的自然框架。Yang 和 Deng 等人[9]提出了 Riccati-Bernoulli 子 ODE 方法来构造非线性偏微分方程的精确行波解、孤立波解和尖波解，并给出了 Riccati-Bernoulli 方程的 Backlund 变换。该方法为求解数学物理学中的一些非线性偏微分方程提供了一个强大而简单的数学工具。Quarteroni 等人[10]总结了

域分解方法的基本思想。该方法是一种求解线性或非线性系统的迭代方法。Grande 等人[11]介绍并分析了一种新的平稳光滑曲面上椭圆型偏微分方程的高阶有限元方法。数值实验结果表明，该方法具有高阶收敛性。

以上研究中的弹性系数被视为常数来处理，而实际情况中，弹性系数往往与时间相关，因此，基于以上研究，本文研究了指数函数型弹性外边界条件下线性偏微分方程的定解问题，旨在更加贴合实际外边界条件。本文的研究拓宽了偏微分方程定解问题的研究范围，利于简化此类定解问题的求解过程，方便相关研究的计算。这对于实际问题的解决具有重要的意义，也为相关领域的进一步研究提供了一定的参考和借鉴，有望在物理现象的研究和工程应用中发挥重要作用。

2. 函数型弹性外边界条件下偏微分方程的定解问题

定理 1：在本节中，我们提出以下线性偏微分方程的定解问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}+p(x)\dfrac{\partial y}{\partial x}+q(x)y(x,t)=r(x)\dfrac{\partial y}{\partial t} \quad (a\le x\le b,t>0) \\ y(x,0)=0 \\ \left[Ey(x,t)+F\dfrac{\partial y}{\partial x}\right]_{x=a}=g(t) \\ \left[\varepsilon(x,t)y(x,t)+N\dfrac{\partial y}{\partial x}\right]_{x=b}=0 \end{cases} \tag{1}$$

这里 D, E, F, N, a, b 是常数，$E^2+F^2\neq 0$，$p(x)\in C^1[a,b]$，$q(x),r(x)\in C^2[a,b]$，$g(t)\in C^1[0,\infty]$，$\varepsilon(x,t)$ 为弹性系数。

接下来，我们研究如下函数型弹性外边界条件下偏微分方程的定解问题：

函数型弹性系数：

$$\varepsilon(x,t)=\mathrm{e}^{h(x)t+f(x)}$$

对上述偏微分方程的定解问题(1)进行关于 t 的拉普拉斯变换[12]，

$$\bar{y}(x,z)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-zt}y(x,t)\mathrm{d}t\text{，}\quad \bar{g}(z)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-zt}g(t)\mathrm{d}t$$

然后将定解问题转化为以下边值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2\bar{y}}{\mathrm{d}x^2}+p(x)\dfrac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}x}+\left[q(x)-r(x)z\right]\bar{y}(x,z)=0 \quad (a\le x\le b) \\ \left[E\bar{y}(x,z)+F\dfrac{\mathrm{d}\bar{y}(x,z)}{\mathrm{d}x}\right]_{x=a}=\bar{g}(z) \\ \left[\mathrm{e}^{f(x)}\bar{y}\left(x,z-h(x)\right)+N\dfrac{\mathrm{d}\bar{y}(x,z)}{\mathrm{d}x}\right]_{x=b}=0 \end{cases} \tag{2}$$

其中 z 为拉普拉斯空间变量。

在边值问题(2)解存在唯一性的前提下，函数型弹性外边界条件下偏微分方程定解问题(1)的拉普拉斯空间解为：

$$\bar{y}(x,z)=\bar{g}(z)\cdot\frac{G(x,z)}{EG(a,z)+F} \tag{3}$$

其中：

$$G\left(x,z\right)=\frac{\mathrm{e}^{f(b)}\Psi_{0,0}\left(x,b,z,h\left(b\right)\right)+N\Psi_{0,1}\left(x,b,z,0\right)}{\mathrm{e}^{f(b)}\Psi_{1,0}\left(a,b,z,h\left(b\right)\right)+N\Psi_{1,1}\left(a,b,z,0\right)} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\Psi_{m,n}\left(x,\xi,\eta\left(z\right),\tau\right)=&\frac{\mathrm{d}^m y_1\left(x,\eta\left(z\right)\right)}{\mathrm{d}x^m}\frac{\mathrm{d}^n y_2\left(\xi,\eta\left(z-\tau\right)\right)}{\mathrm{d}\xi^n}\\&-\frac{\mathrm{d}^n y_1\left(\xi,\eta\left(z-\tau\right)\right)}{\mathrm{d}\xi^n}\frac{\mathrm{d}^m y_2\left(x,\eta\left(z\right)\right)}{\mathrm{d}x^m}\ \left(m,n\in Z^+\right)\end{aligned} \tag{5}$$

其中 $y_1\left(x,z\right)$ 和 $y_2\left(x,z\right)$ 是定解方程 $\frac{\mathrm{d}^2\bar{y}}{\mathrm{d}x^2}+p\left(x\right)\frac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}x}+\left[q\left(x\right)-r\left(x\right)z\right]\bar{y}\left(x,z\right)=0$ 的两个线性无关解。

最后，利用 Gaver-Stehfest 数值反演方法[13]得到了方程(3)在指数函数型弹性外边界条件下定解问题的实空间解：

$$\begin{aligned}y\left(x,t\right)&=\frac{\ln 2}{t}\sum_{j=1}^{N}V_j\bar{y}\left(x,\frac{j\ln 2}{t}\right)\\&=\frac{\ln 2}{t}\sum_{j=1}^{N}V_j\left\{\bar{g}\left(\frac{j\ln 2}{t}\right)\frac{G\left(x,\frac{j\ln 2}{t}\right)}{EG\left(a,\frac{j\ln 2}{t}\right)+F}\right\}\end{aligned} \tag{6}$$

这里：

$$V_j=\left(-1\right)^{\frac{N}{2}+j}\sum_{k=\left[\frac{j+1}{2}\right]}^{\min\left(j,\frac{N}{2}\right)}\frac{k^{\frac{N}{2}}\left(2k+1\right)!}{\left(\frac{N}{2}-k+1\right)!k!\left(k+1\right)!\left(j-k+1\right)!\left(2k-j+1\right)!} \tag{7}$$

3. 定解问题的解的相似构造求解步骤

在求解定解问题(1)的过程中，根据第 2 节定理 1 和定解问题的求解过程，针对指数函数型弹性外边界条件，易于构造定解问题(1)的解。具体步骤如下：

步骤 1：拉普拉斯变换

对偏微分方程弹性边界条件下定解问题(1)进行拉普拉斯变换将其转化为边值问题(2)。

步骤 2：求解定解方程

通过求解边值问题(2)的定解方程，得到了定解方程的两个线性独立解 $y_1\left(x,z\right)$ 和 $y_2\left(x,z\right)$。

步骤 3：构造引解函数

对于指数函数型弹性外边界条件下的边值问题，利用两个线性独立解 $y_1\left(x,z\right)$ 和 $y_2\left(x,z\right)$ 构造引解函数 $\Psi_{m,n}\left(x,\xi,\eta\left(z\right),\tau\right)$，如式(5)所示。

步骤 4：构造相似核函数

对于边值问题(2)，利用引解函数 $\Psi_{m,n}\left(x,\xi,\eta\left(z\right),\tau\right)$ 和弹性边界条件的系数 $\mathrm{e}^{f(b)}$，H 构造相似核函数 $G\left(x,z\right)$，如式(4)所示。

步骤 5：求出边值问题的解

通过组合相似核函数 $G\left(x,z\right)$ 和非齐次内边界条件下的系数 $\bar{g}\left(z\right)$，E，F，得到边值问题(2)的解，如式(3)所示。

步骤 6：求出定解问题的解

利用 Gaver-Stehfest 数值反演法[13]得到了指数函数型弹性外边界条件下的定解问题的解，如式(6)所示。

4. 实例计算

基于以上定解问题的求解步骤，接下来举如下例子加以验证。

例：求解如下指数函数型弹性外边界条件下的定解问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial y}{\partial x} = \dfrac{\partial y}{\partial t} \quad (1 \le x \le 2, t > 0) \\ y(x,0) = 0 \\ \left[2y(x,t) + 3\dfrac{\partial y}{\partial x}\right]_{x=1} = D \\ \left[\mathrm{e}^{(2x+1)t+3x-2} y(x,t) + 2\dfrac{\partial y}{\partial x}\right]_{x=2} = 0 \end{cases} \tag{8}$$

对上述偏微分方程的定解问题(8)进行关于 t 的拉普拉斯变换：

$$\bar{y}(x,z) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-zt} y(x,t)\mathrm{d}t$$

然后将定解问题(8)转化为如下边值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \bar{y}}{\partial x^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial \bar{y}}{\partial x} - z\bar{y} = 0 \quad (1 \le x \le 2) \\ \left[2\bar{y}(x,z) + 3\dfrac{\mathrm{d}\bar{y}(x,z)}{\mathrm{d}x}\right]_{x=1} = \dfrac{1}{z} \\ \left[\mathrm{e}^{3x-2}\bar{y}(x,z-2x-1) + 2\dfrac{\mathrm{d}\bar{y}(x,z)}{\mathrm{d}x}\right]_{x=2} = 0 \end{cases} \tag{9}$$

$I_0\left(\sqrt{z}x\right)$ 和 $K_0\left(\sqrt{z}x\right)$ 是方程 $\dfrac{\partial^2 \bar{y}}{\partial x^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial \bar{y}}{\partial x} - z\bar{y} = 0$ 的两个线性无关解[14]。这里 $I_0(\bullet)$ 和 $K_0(\bullet)$ 分别是第一类和第二类变型 Bessel 函数。

根据定理 1，边值问题(9)的解为：

$$\bar{y}(x,z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{G_1(x,z)}{2G_1(1,z)+3} \tag{10}$$

其中

$$G_1(x,z) = \frac{\mathrm{e}^4 \Psi_{0,0}\left(x,2,\sqrt{z},5\right) + 2\Psi_{0,1}\left(x,2,\sqrt{z},0\right)}{\mathrm{e}^4 \Psi_{1,0}\left(1,2,\sqrt{z},5\right) + 2\Psi_{1,1}\left(1,2,\sqrt{z},0\right)}$$

$$\Psi_{0,0}\left(x,\xi,\sqrt{z},5\right) = \psi_{0,0}\left(x,\xi,\sqrt{z},5\right)$$

$$\Psi_{0,1}\left(x,\xi,\sqrt{z},0\right) = \frac{\partial \Psi_{0,0}\left(x,\xi,\sqrt{z},0\right)}{\partial \xi} = -\sqrt{z}\psi_{0,1}\left(x,\xi,\sqrt{z},0\right)$$

$$\Psi_{1,0}\left(x,\xi,\sqrt{z},5\right) = \frac{\partial \Psi_{0,0}\left(x,\xi,\sqrt{z},5\right)}{\partial x} = \sqrt{z}\psi_{1,0}\left(x,\xi,\sqrt{z},5\right)$$

$$\Psi_{1,1}\left(x,\xi,\sqrt{z},0\right)=\frac{\partial^2\Psi_{0,0}\left(x,\xi,\sqrt{z},0\right)}{\partial x\partial\xi}=-z\psi_{1,1}\left(x,\xi,\sqrt{z},0\right)$$

$$\psi_{m,n}\left(x,\xi,\sqrt{z},\tau\right)=I_m\left(x\sqrt{z}\right)K_n\left(\xi\sqrt{z-\tau}\right)+\left(-1\right)^{m-n+1}I_n\left(\xi\sqrt{z-\tau}\right)K_m\left(x\sqrt{z}\right)$$

对方程(10)使用 Gaver-Stehfest 数值反演法[13]，得到指数函数型弹性外边界条件下定解问题(8)的实空间解为：

$$\begin{aligned}y\left(x,t\right)&=\frac{\ln 2}{t}\sum_{j=1}^{N}V_j\bar{y}\left(x,\frac{j\ln 2}{t}\right)\\&=\frac{\ln 2}{t}\sum_{j=1}^{N}V_j\left\{\frac{t}{j\ln 2}\frac{G_1\left(x,\frac{j\ln 2}{t}\right)}{2G_1\left(1,\frac{j\ln 2}{t}\right)+3}\right\}\end{aligned}$$

这里 V_j 为(7)式。

5. 结论

本文提出了函数型弹性外边界条件下偏微分方程定解问题，采用 Laplace 变换、待定系数法和 Gaver-Stehfest 数值反演方程对定解问题进行求解，总结出了函数型弹性外边界条件下偏微分方程定解问题的解的相似构造步骤，相似构造出的解使得实空间解的形式相对简单，利于相关研究的计算。需要指出的是，本文所提出的函数型弹性外边界条件下偏微分方程定解问题的求解方法还需要进一步的实例检验和数值模拟，以验证其在实际问题中的可行性和有效性。此外，本文提出的指数型弹性系数还可以替换为多项式型弹性系数，所研究的模型及方法也可以进一步扩展到非线性偏微分方程的定解问题中，以期获得更加广泛的应用。

基金项目

西华大学人才引进项目(Z202068)资助。

参考文献

[1] Marshall, A. (1920) Principles of Economics. Macmillan, London, 102-116.

[2] Woods, J.H. and Sauro, H.M. (1997) Elasticities in Metabolic Control Analysis: Algebraic Derivation of Simplified Expressions. *Bioinformatics*, **13**, 123-130. https://doi.org/10.1093/bioinformatics/13.2.123

[3] Madenci, E., Dorduncu, M., Barut, A. and Futch, M. (2017) Numerical Solution of Linear and Nonlinear Partial Differential Equations Using the Peridynamic Differential Operator. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, **33**, 1726-1753. https://doi.org/10.1002/num.22167

[4] Yang, F.W., Goodyer, C.E., Hubbard, M.E. and Jimack, P.K. (2017) An Optimally Efficient Technique for the Solution of Systems of Nonlinear Parabolic Partial Differential Equations. *Advances in Engineering Software*, **103**, 65-84. https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2016.06.003

[5] Abraham-Shrauner, B. (2017) Exact Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **11**, 577-582. https://doi.org/10.3934/dcdss.2018032

[6] Benamou, J.D., Froese, B.D. and Oberman, A.M. (2012) Numerical Solution of the Optimal Transportation Problem via Viscosity Solutions for the Monge-Ampere Equation. *Journal of Computational Physics*, **260**, 107-126. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2013.12.015

[7] Polyanin, A.D. and Zhurov, A.I. (2013) Exact Solutions of Non-Linear Differential-Difference Equations of a Viscous Fluid with Finite Relaxation Time. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **57**, 116-122. https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2013.06.013

[8] Lee, E., Manteuffel, T.A. and Westphal, C.R. (2015) FOSLL for Nonlinear Partial Differential Equations. *SIAM Jour-*

nal on Scientific Computing, **37**, S503-S525. https://doi.org/10.1137/140974353

[9] Yang, X.F., Deng, Z.C. and Wei, Y. (2015) A Riccati-Bernoulli Sub-ODE Method for Nonlinear Partial Differential Equations and Its Application. *Advances in Difference Equations*, **2015**, Article No. 117.

[10] Quarteroni, A. and Valli, A. (1999) Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations. Oxford Academic, Oxford. https://doi.org/10.1093/oso/9780198501787.001.0001

[11] Grande, J. and Reusken, A. (2016) A Higher Order Finite Element Method for Partial Differential Equations on Surfaces. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **54**, 388-414. https://doi.org/10.1137/14097820X

[12] 李顺初, 黄炳光. Laplace 变换与 Bessel 函数及试井分析理论基础[M]. 北京: 石油工业出版社, 2000.

[13] Stehfest, H. (1970) Remark on algorithm 368: Numerical inversion of Laplace Transforms. *Communications of the ACM*, **13**, No. 10. https://doi.org/10.1145/355598.362787

[14] 刘适式, 刘适达. 特殊函数[M]. 北京: 气象出版社, 2002.