Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(5), 140-144
Published Online May 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.145170

多维G-方程极值定理

李　洋[*]，江继祥，张　宇，许乾海

上海理工大学理学院，上海

收稿日期：2024年3月28日；录用日期：2024年4月28日；发布日期：2024年5月24日

摘　要

本文基于G-期望空间理论，通过反证法，利用Hessian矩阵将G-方程的极值定理推广到多维空间和变系数的情况，得到了多维变系数G-方程极值在定义域边界取得的结论，在物理学、金融学以及计算数学领域有很高的实用性价值。

关键词

非线性期望，变系数G-方程，多维G-方程，Hessian矩阵

Extreme Value Theorem of Multidimensional G-Equation

Yang Li[*], Jixiang Jiang, Yu Zhang, Qianghai Xu

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Mar. 28th, 2024; accepted: Apr. 28th, 2024; published: May 24th, 2024

Abstract

This article is based on the theory of G-expected space and uses the method of proof to generalize the extreme value theorem of G-equations to multi-dimensional space and variable coefficient cases using Hessian matrix. The conclusion that the extreme values of multi-dimensional variable coefficient G-equations are obtained at the boundary of the domain is obtained, which has high practical value in the fields of physics, finance, and computational mathematics.

Keywords

Nonlinear Expectation, Variable Coefficient G-Equation, Multidimensional G-Equation, Hessian Matrix

[*]通讯作者。

文章引用: 李洋, 江继祥, 张宇, 许乾海. 多维 G-方程极值定理[J]. 理论数学, 2024, 14(5): 140-144.
DOI: 10.12677/pm.2024.145170

1. 引言

2007 年，Peng [1]首次提出了 G-期望空间理论，即直接对于不确定量——随机变量来定义其非线性期望泛函，并通过 G-热方程引入了 G-正态分布和 G-Brown 运动等定义，得出了非线性期望下的大数定律和中心极限定理，而作为一种特殊的 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程，G-热方程在金融数学和随机控制领域中得到了广泛应用。Pasik-Duncan [2]和 Duncan [3]对 G 热方程的粘性解进行了研究，并验证了其粘性解的存在性和唯一性。Peng [4] [5] [6]针对初值函数为凹函数或凸函数的情形进行了深入的研究，并给出了具体的计算公式。Hu [7]得到了对每个整数 $k\ge 1$，初值条件为 $\varphi(x)=x^k$ 的 G 热方程的显式粘性解。Peng 和 Zhou [8]分别针对初值为 $\varphi(x)=I_{\{x>a\}}$ 与 $\varphi(x)=I_{\{x<a\}}$ 的 G-热方程给出了显式解的形式，同时针对初值为 $\varphi(x)=I_{\{|x|>a\}}$ 的 G-热方程给出了解满足的渐近不等式。近年来，众多学者着重与研究 G-热方程的数值方法，2010 年，Gong 和 Yang [9]讨论了有限差分方法用于离散化 G-热方程，并考虑了全隐式方案以及牛顿迭代方法在这一过程中的应用，进一步证明了全隐式离散化方案收敛到 G-热方程的粘性解。Qian [10]得出 G-热方程的 Tychonoff 唯一性定理，有助于理解其唯一解的特性。2019 年，Hu [11]等人讨论了 G-热方程的显式解及其应用。2021 年，Li [12]等人研究了 g-正态分布任意函数的次线性期望的迭代逼近及其对应的 g-热方程的解。

2007 年，姜礼尚和陈亚浙[13]等人从物体内部的热传导过程入手，在物理意义上解释了热方程的极值原理，并且通过严格的数学方法给出了证明。后续有许多学者在这一领域进行了深入的研究，Songchitruksa 和 Andrew [14]提出了一种新的应用极值理论来估计碰撞的安全性。Gomes 和 Guillou [15]基于极值理论对概率渐近结果的参数单变量极端统计进行了研究，并对极端事件参数估计和半参数框架下极值条件检验进行了讨论。而宋彬彬[16]首次将抛物方程的极值理论与 G-期望空间联系起来，并对一维 G-抛物方程的极值理论进行了证明。本文将对 G-方程的极值理论进一步推广多维的形式，并进行严格的理论证明。

2. 预备知识(G-期望空间)

本文中作者将研究在 G 框架下的多维极值定理，对此，我们将沿用文献[6]中的关于 G-期望空间的相关定义以及应用条件。

定义 2.1 设 Ω 是一给定集合，$\mathcal{H}$ 是定义在 Ω 上的实值函数所组成的一个线性空间，并且满足以下的条件：

a) 每一个实值的常数 c 都在 $\mathcal{H}$ 中；

b) 如果 $X(\cdot)\in\mathcal{H}$，则 $|X(\cdot)|\in\mathcal{H}$。

那么我们把 $\mathcal{H}$ 中的函数称为随机变量，而称二元组 $(\Omega,\mathcal{H})$ 为随机变量空间。

定义 2.2 定义在随机变量空间 $\mathcal{H}$ 上的满足以下性质的泛函 $\hat{\mathbb{E}}:\mathcal{H}\mapsto\mathbb{R}$：

(1) 单调性：若 $X\ge Y$，则有 $\hat{\mathbb{E}}[X]\ge\hat{\mathbb{E}}[Y]$；

(2) 保常数性：对任意 $c\in\mathbb{R}$ 都有 $\hat{\mathbb{E}}[c]=c$；

称三元组 $(\Omega,\mathcal{H},\hat{\mathbb{E}})$ 为非线性期望空间。称 $\hat{\mathbb{E}}$ 为一个非线性期望。

若 $\hat{\mathbb{E}}$ 还满足：

(3) 次可加性：$\hat{\mathbb{E}}[X+Y]\le\hat{\mathbb{E}}[X]+\hat{\mathbb{E}}[Y]$，$\forall X,Y\in\mathcal{H}$，

(4) 正齐次性：$\hat{\mathbb{E}}[\lambda X]=\lambda\hat{\mathbb{E}}[X]$，$\lambda\ge 0$。

称$(\Omega,\mathcal{H},\hat{\mathbb{E}})$为次线性期望空间，$\hat{\mathbb{E}}$为$(\Omega,\mathcal{H})$上的次线性期望。

定义 2.3 (G-正态分布)

我们称次线性期望空间$(\Omega,\mathcal{H},\hat{\mathbb{E}})$中的 n 维随机向量 $X=(x_1,\cdots,x_n)$ 服从 G-正态分布，如果对任意的 $a,b>0$，有：

$$aX+b\bar{X}=^{n}\sqrt{a^2+b^2}X$$

其中 $\bar{X}$ 是 X 的任意独立复制。

定义 2.4 (G-分布)

我们称次线性期望空间$(\Omega,\mathcal{H},\hat{\mathbb{E}})$中的 n 维随机向量(X,η)服从 G-分布，如果其满足

$$\left(aX+b\bar{X},a^2\eta+b^2\bar{\eta}\right)=^{n}\left(\sqrt{a^2+b^2}X,\left(a^2+b^2\right)\eta\right)$$

其中$(\bar{X},\bar{\eta})$是(X,η)的独立复制。

3. 多维 G-方程值定理

鉴于所考虑的方程在空间上存在无界区域，而在实际数值计算过程中无法处理无界区域，因此，本研究在求解前首先对方程执行了边界截断处理。对于经过边界截断处理的方程，我们考虑其形式为：

$$\begin{cases}\partial_t U-\dfrac{1}{2}a(x,t)\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{\sigma}^2\left(\partial_{x_ix_i}^2U\right)^+-\underline{\sigma}^2\left(\partial_{x_ix_i}^2U\right)^-\right)-\sum_{i=1}^{n}b_i(x,t)\left(\bar{\mu}\left(\partial_xU\right)^+-\underline{\mu}\left(\partial_xU\right)^-\right)=f(t,x_1,\cdots,x_n),\\ -\partial_{x_i}U\big|_{x_i=-l}=\phi_i(t),\partial_{x_i}U\big|_{x_i=l}=\phi_{i+1}(t),\cdots\\ U\big|_{t=0}=\psi(x_1,\cdots,x_n).\end{cases}\tag{1}$$

其中：$(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)\in[0,T)\times\underbrace{[-l,l]\times\cdots\times[-l,l]}_{n个}$，$x^+=\max\{0,x\}$，$x^-=-\min\{0,x\}$。

上述方程可以进一步等效表达为两种等价的形式：

等价形式一：

$$\begin{cases}\partial_t U-\dfrac{1}{2}a(x,t)\sum_{i=1}^{n}\sigma^2\left(\partial_{x_ix_i}^2U\right)\partial_{x_ix_i}^2U-\sum_{i=1}^{n}b_i(x,t)\mu\left(\partial_{x_i}U\right)\partial_{x_i}U=f(t,x_1,\cdots,x_n),\\ -\partial_{x_i}U\big|_{x_i=-l}=\phi_i(t),\partial_{x_i}U\big|_{x_i=l}=\phi_{i+1}(t),\cdots\\ U\big|_{t=0}=\psi(x_1,\cdots,x_n).\end{cases}\tag{2}$$

其中：

$$\sigma^2(x)=\begin{cases}\bar{\sigma}^2,x\ge 0\\ \underline{\sigma}^2,x<0\end{cases},\quad \mu(x)=\begin{cases}\bar{\mu},x\ge 0\\ \underline{\mu},x<0\end{cases}$$

等价形式二：

$$\begin{cases}\partial_t U-\dfrac{1}{2}a(x,t)\sum_{i=1}^{n}\sup_{\sigma}\left(\sigma^2\partial_{x_ix_i}^2U\right)-\sum_{i=1}^{n}b_i(x,t)\sup_{\sigma}\left(\mu\partial_{x_i}U\right)=f(t,x_1,\cdots,x_n),\\ -\partial_{x_i}U\big|_{x_i=-l}=\phi_i(t),\partial_{x_i}U\big|_{x_i=l}=\phi_{i+1}(t),\cdots\\ U\big|_{t=0}=\psi(x_1,\cdots,x_n).\end{cases}\tag{3}$$

定理 4.1 (多维极值原理) 若 U 满足(1)，且系数 $a(x,t)$ 为非负的，我们设置一个辅助函数 $\bar{\mathcal{L}}_{\sigma,\mu}(U)$，令：

$$\bar{\mathcal{L}}_{\sigma,\mu}(U)=\partial_t U-\frac{1}{2}a(x,t)\sum_{i=1}^{n}\sigma^2\left(\partial_{x_ix_i}^2 U\right)\partial_{x_ix_i}^2 U-\sum_{i=1}^{n}b_i(x,t)\mu\left(\partial_{x_i}U\right)\partial_{x_i}U$$

若 $\bar{\mathcal{L}}_{\sigma,\mu}(U)\le 0$ 在 $D=[0,T]\times\underbrace{[-l,l]\times\cdots\times[-l,l]}_{n个}$ 成立且 U 光滑，若 U 非常数，则 U 在 $\partial D=\{t=0或x_i=\pm l\}$ 上取得最大值。

证明： 在证明中，我们引入了 Hessian 矩阵来处理多维情境的复杂性。Hessian 矩阵的负定性是证明中的关键，因为它表明在潜在的最大值点，函数的曲率向下。

构造函数 $V(t,x_1,\cdots,x_n)=U(t,x_1,\cdots,x_n)-\varepsilon t$，其中，$\varepsilon>0$，则

$$\bar{\mathcal{L}}_{\sigma,\mu}(V)=\bar{\mathcal{L}}_{\sigma,\mu}(U)-\varepsilon<0.$$

下证 $V(t,x_1,\cdots,x_n)$ 的最大值在 ∂D 取到。反证法：假设 $V(t,x_1,\cdots,x_n)$ 的最大值在内点取到，不妨假设最大值点为 $(t^*,x_1^*,\cdots,x_n^*)$，设 $\partial_{x_ix_i}^2 V=\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_i^2}$，则在这一点函数的 Hessian 矩阵

$$H=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial t\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial t\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 V}{\partial t\partial x_n}\\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1\partial t} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1\partial x_n}\\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_2\partial t} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_2\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_2\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_n\partial t} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_n\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_n\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_n^2}\end{bmatrix}$$

为负定矩阵[17]，故 H 的对角元 $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_i^2}<0$，即 $\partial_{x_ix_i}^2 V<0, i=1,2,\cdots,n$ 在点 $(t^*,x_1^*,\cdots,x_n^*)$ 处成立，且有 $\dfrac{\partial V}{\partial t}\ge 0$，$\dfrac{\partial V}{\partial x_i}=0$ 则有：

$$\bar{\mathcal{L}}_{\sigma,\mu}(U)=\partial_t U-\frac{1}{2}a(x,t)\sum_{i=1}^{n}\sigma^2\left(\partial_{x_ix_i}^2 U\right)\partial_{x_ix_i}^2 U-\sum_{i=1}^{n}b_i(x,t)\mu\left(\partial_{x_i}U\right)\partial_{x_i}U\ge 0$$

上式与 $\bar{\mathcal{L}}_{\sigma,\mu}(V)<0$ 矛盾，由此可见 V 的最大值在 ∂D 取到。

下证 $U(t,x,y)$ 的最大值也在 ∂D 取到：

$$\begin{aligned}\max_D(U)&=\max_D(V+\varepsilon t)\le\max_D(V)+\max_D(\varepsilon t)\\&=\max_{\partial D}(V)+\max_D(\varepsilon t)=\max_{\partial D}(U-\varepsilon t)+\max_D(\varepsilon t)\\&\le\max_{\partial D}(U)+\max_{\partial D}(-\varepsilon t)+\max_D(\varepsilon t)\\&\le\max_{\partial D}(U)+\varepsilon T,\end{aligned}$$

又因为 $\partial D\subseteq D$，所以 $\max_D(U)\ge\max_{\partial D}(U)$。于是，对任意的 $\varepsilon>0$ 成立：

$$\max_{\partial D}(U)\le\max_D(U)\le\max_{\partial D}(U)+\varepsilon T\ 。$$

因此可得，$\max_{\partial D}(U)=\max_D(U)$，即 U 在边界取到最大值。

4. 结论

本文研究了 G-方程极值定理，利用 Hessian 矩阵将其推广到多维情况下。在物理领域中能够更加合适的显示多因素影响下的热传导过程，在金融数学领域可以为多种期权定价模型性质的证明提供助力，而在计算数学领域，为一类特定多维差分方程数值模拟的收敛性和稳定性的证明提供了前提条件。

基金项目

本论文由上海理工大学教师发展研究项目(编号：CFTD2023YB38)资助。

参考文献

[1] Peng, S. (2007) G-Expectation, G-Brownian Motion and Related Stochastic Calculus of Ito Type. Stochastic Analysis and Applications. Springer, Berlin, Heidelberg, 541-567. https://doi.org/10.1007/978-3-540-70847-6_25

[2] Peng, S. (1992) A Generalized Dynamic Programming Principle and Hamilton-Jacobi-Bellman Equation. *Stochastics*: *An International Journal of Probability and Stochastic Processes*, **38**, 119-134. https://doi.org/10.1080/17442509208833749

[3] Pasik-Duncan, B. and Duncan, T.E. (2001) Stochastic Controls: Hamiltonian Systems and HJB Equations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **46**, 1846. https://doi.org/10.1109/TAC.2001.964706

[4] 彭实戈. 非线性期望的理论, 方法及意义[J]. 中国科学: 数学, 2017, 47(10): 1223-1254.

[5] Peng, S. (2008) A New Central Limit Theorem under Sublinear Expectations. arXiv:0803.2656.

[6] Peng, S. (2008) Multi-Dimensional G-Brownian Motion and Related Stochastic Calculus under G-Expectation. *Stochastic Processes and Their Applications*, **118**, 2223-2253.

[7] Hu, M. (2012) Explicit Solutions of the G-Heat Equation for a Class of Initial Conditions. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods and Applications*, **75**, 6588-6595. https://doi.org/10.1016/j.na.2012.08.002

[8] Peng, S. and Zhou, Q. (2020) A Hypothesis-Testing Perspective on the Gnormal Distribution Theory. *Statistics and Probability Letters*, **156**, 108623.

[9] Gong, X. and Yang, S. (2013) The Application of G-Heat Equation and Numerical Properties. arXiv:1304.1599. https://doi.org/10.1016/j.spl.2019.108623

[10] Lin, Q. (2010) The Tychonoff Uniqueness Theorem for the G-Heat Equation. arXiv:1006.5300.

[11] Hu, M. and Sun, Y. (2021) Explicit Positive Solutions to G-Heat Equations and the Application to G-Capacities. *Journal of Differential Equations*, **297**, 246-276. https://doi.org/10.1016/j.jde.2021.06.029

[12] Li, Y. and Kulperger, R. (2018) An Iterative Approximation of the Sublinear Expectation of an Arbitrary Function of *G*-Normal Distribution and the Solution to the Corresponding *G*-Heat Equation. arXiv:1804.10737.

[13] 姜礼尚, 陈亚浙, 刘西垣. 数学物理方程讲义[M]. 北京: 高等教育出版社, 2007.

[14] Songchitruksa, P. and Tarko, A.P. (2006) The Extreme Value Theory Approach to Safety Estimation. *Accident Analysis & Prevention*, **38**, 811-822. https://doi.org/10.1016/j.aap.2006.02.003

[15] Gomes, M.I. and Guillou, A. (2015) Extreme Value Theory and Statistics of Univariate Extremes: A Review. *International Statistical Review*, **83**, 263-292. https://doi.org/10.1111/insr.12058

[16] 宋彬彬. G-方程的数值方法[D]: [硕士学位论文]. 苏州: 苏州大学, 2015.

[17] 王萼芳, 石生明. 高等代数[M]. 第 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2013: 227-233.