

复合Mlinex损失函数下艾拉姆咖分布参数的Bayes估计

杜丽芳, 张艳, 何腾松

贵州师范大学数学科学学院, 贵州 贵阳

收稿日期: 2024年3月25日; 录用日期: 2024年4月29日; 发布日期: 2024年5月24日

摘要

在本文中, 我们采用了一种复合的Mlinex损失函数作为研究的基础准则, 艾拉姆咖是一种衡量统计模型优良性的指标, 通常用于模型选择。当我们在模型中引入逆伽玛分布作为先验分布时, 我们利用Mlinex损失函数来评估艾拉姆咖指标的表现, 并且讨论了该分布下三种不同的参数估计方法: Bayes估计、E-Bayes估计和多层Bayes估计。为了验证这些估计方法的性能, 本文采用了数值模拟的方法。通过构建模拟数据集, 并应用上述估计方法, 可以观察它们在不同情况下的表现。模拟结果显示, 这三种估计方法都表现出了良好的稳健性。

关键词

复合Mlinex损失函数, 艾拉姆咖分布, Bayes估计, E-Bayes估计, 多层Bayes估计

Bayes Estimation of Alamka Distribution Parameters under Compound Mlinex Loss Function

Lifang Du, Yan Zhang, Tengsong He

School of Mathematical Sciences, Guizhou Normal University, Guiyang Guizhou

Received: Mar. 25th, 2024; accepted: Apr. 29th, 2024; published: May 24th, 2024

Abstract

In this paper, we use a composite Mlinex loss function as the basic criterion for the study. Alamka is a measure of the goodness of statistical models, which is often used for model selection. When

we introduce the inverse gamma distribution as a prior distribution into the model, we use the Mlinex loss function to evaluate the performance of the Alamba index, and discuss three different parameter estimation methods under this distribution: Bayes estimation, E-Bayes estimation, and multilayer Bayes estimation. In order to verify the performance of these estimation methods, numerical simulation is used in this paper. By building simulated datasets and applying the above estimation methods, it is possible to observe how they perform in different situations. The simulation results show that these three estimation methods have good robustness.

Keywords

Composite Mlinex Loss Function, Alamiga Distribution, Bayesian Estimation, E-Bayes Estimation, Multilayer Bayes Estimation

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

Mlinex 损失函数在参数估计中的应用背景包括了统计学中对非对称损失函数的研究和应用，特别是在 Bayes 方法下对不同分布参数的估计问题扮演着至关重要的角色。在这样的背景下，Mlinex 损失函数应运而生，它作为一种修正型的线性指数损失函数，为解决参数估计问题提供了新的视角和方法，它在统计学的参数估计领域中得到了广泛的关注和应用。这一损失函数因其特定的形式和性质，被用来处理各种统计模型中的估计问题，尤其是在贝叶斯框架下对分布参数进行估计时。学者们研究了在 Mlinex 损失函数下的逆指数分布、指数分布等各类概率分布的参数 Bayes 估计问题，以及估计量的可容许性等方面。

Mlinex 损失函数在参数估计中的意义则体现在它为实际问题提供了一个有效的工具，尤其在处理某些特定类型的数据时具有独特的优势。通过 Mlinex 损失函数得到的参数估计能够反映出在不确定性和风险态度上的特定偏好，从而使得估计结果更加符合实际决策的需求。在定数截尾情形下的 MRE (最小风险估计)估计、Bayes 估计的一般形式，以及当先验分布给定时 Bayes 估计的精确形式都是在这一损失函数下得到的研究内容。这些成果不仅丰富了参数估计的理论，也为实际应用提供了依据。

在俄罗斯进行的一项关于武器装备维修时间的研究中，专家们采取了一种系统化的方法来分析问题。他们的研究工作首先集中在了对艾拉姆咖(一种用于衡量装备维护和修理时间的标准)的情况进行了详细的介绍和分析。艾拉姆咖，作为一种复杂的数学模型，它在装备维修理论的研究领域内扮演着至关重要的角色。参数估计的优劣很大程度上取决于损失函数的形式。2020 年张晗等人[1]对于复合 Mlinex 对称损失函数下参数估计的问题，深入探讨了三种不同类型的先验分布，它们分别是共轭先验、无信息先验以及 Jeffreys 先验。她们不仅探讨了这三种先验分布的性质和特点，还分析了它们在复合 Mlinex 对称损失函数下对艾拉姆咖分布参数的 Bayes 估计值的影响。这一分析不仅揭示了不同先验分布在估计过程中的作用，而且还为实际应用中选择合适的先验分布提供了理论依据。通过对比实验和理论分析，研究结果展示了先验分布的选择影响参数的后验分布，进而影响最终的估计结果。通过对这些先验分布进行深入的分析和比较，研究发现，在复合 Mlinex 对称损失函数的背景下，当参数的先验分布选择为共轭先验时，所得到的 Bayes 估计值在统计性能上是最优的；2015 年龙兵[2]和 2014 年金秀岩[3]采用了一种复合的 Mlinex 对称损失函数来评估对数伽玛分布的尺度参数并讨论了对数伽玛分布的 Bayes 估计，而且还提出了 E-Bayes 估计和多层 Bayes 估计。最后通过数值模拟验证了三种估计方法的稳健性；2020 年杨冬霞

等人[4]深入探讨了复合 Mlinex 损失函数这一特定背景下,指数威布尔分布的估计问题,并且分析了该分布下的三种估计方法,为了验证这些估计方法的有效性和可靠性,采用了数值模拟的方法,得到了三种估计方法都表现出了良好的稳健性;2013 年龙兵[5]深入讨论了多种损失函数,其中有:熵损失函数、Linex 损失函数、二次损失函数、平方损失函数以及我们熟悉的平衡损失函数,最后利用数值模拟的方法,对这五种损失函数的优良性进行了分析;2017 年范梓森和周菊玲[6]首先介绍了 Mlinex 损失函数和艾拉姆咖分布的基本概念和性质。然后详细阐述了如何在 Mlinex 损失函数的框架下,利用 Bayes 方法对艾拉姆咖分布的参数进行估计,为了验证所提出方法的有效性,该作者进行了一系列的数值模拟实验。在这些实验中,比较了在不同损失函数下的 Bayes 估计,其中包括熵损失函数、Linex 损失函数以及我们常见的 Mlinex 损失函数,并且讨论了有关艾拉姆咖分布参数的 Bayes 估计的性质。使用数值模拟的方法,可以得到,在 Mlinex 损失函数下得到的估计结果更接近于真实参数值。这一发现表明, Mlinex 损失函数在处理艾拉姆咖分布参数估计问题时,比传统的熵损失和 Linex 损失函数更为有效和稳健。2016 年吕佳等人[7]讨论了伽玛分布的先验和复合 Linex 对称损失函数时,利用这些信息来得到艾拉姆咖分布参数的唯一 Bayes 估计,并进一步讨论了该贝叶斯估计的容许性。本文的核心内容集中在对复合 Mlinex 损失函数的深入研究,特别是在先验分布被设定为逆伽玛分布的情况下。在本文中,我们探讨了艾拉姆咖分布参数的容许性,以及在艾拉姆咖分布参数下的 Bayes 估计、E-Bayes 估计和多层 Bayes 估计。为了验证本文提出的参数估计方法的合理性和稳健性,我们进行了一系列数值模拟实验。通过这些实验,我们得到三种 Bayes 估计方法都能提供可靠的参数估计结果。这些模拟结果表明,本文所提出的参数估计方法都是合理且稳健的,能够有效地处理复合 Mlinex 损失函数下的参数估计问题。

2. 参数 θ 的 Bayes 估计

在数学上,单参数艾拉姆咖分布的概率密度函数可以写作为 $f(x) = \frac{4x}{\theta^2} e^{-\frac{2x}{\theta}}$, 其对应的分布函数为 $F(x) = 1 - \left(1 + \frac{2}{\theta}x\right) e^{-\frac{2x}{\theta}}$ 。

假如 x_1, x_2, \dots, x_n 是一组来自分布艾拉姆咖分布总体的随机样本,那么这组样本的联合概率密度函数可以表示为:

$$f(x|\theta) = \left(\frac{4}{\theta^2}\right)^n \left(\prod_{i=1}^n x_i\right) e^{-\frac{2}{\theta} \sum_{i=1}^n x_i} = \left(\frac{4}{\theta^2}\right)^n \left(\prod_{i=1}^n x_i\right) e^{-\frac{2t}{\theta}} \quad (1)$$

其中 $t = \sum_{i=1}^n x_i$ 。

图 1 是形状参数 $\theta = 1, 2, 3, 4$ 时我们得到艾拉姆咖分布密度函数的图像。从图 1 中我们可以清晰地观察到,艾拉姆咖分布的密度函数呈现出一种先逐渐增加后逐步减少的趋势。

定义 2 [8]: 对于 Mlinex 非对称损失函数的定义简单表示为

$$L_c(\theta, \delta) = \omega \left[\left(\frac{\delta}{\theta}\right)^c - c \ln \frac{\delta}{\theta} - 1 \right] (\omega > 0, c \neq 0)$$

该损失函数是一类非对称损失函数,其中参数 θ 的估计是 δ , $c \neq 0$ 。

定义 3 [8]: 复合 Mlinex 对称损失函数的定义简单表示为

$$L(\theta, \delta) = L_c(\theta, \delta) + L_{-c}(\theta, \delta) = \omega \left[\left(\frac{\delta}{\theta}\right)^c + \left(\frac{\delta}{\theta}\right)^{-c} - 2 \right] (\omega > 0, c \neq 0) \quad (2)$$

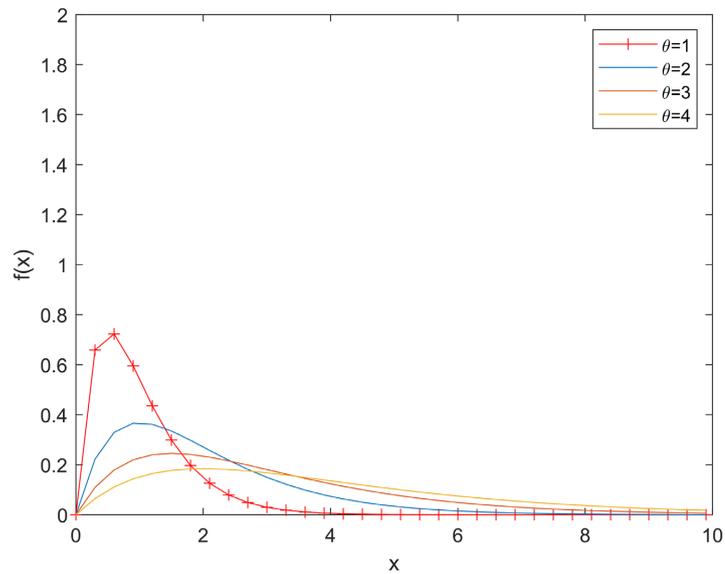


Figure 1. Density function image of Alarka distribution
图 1. 艾拉姆伽分布的密度函数图像

引理 1 [8]: 在考虑损失函数式(2)下和相关的密度函数 $f(x) = \frac{4x}{\theta^2} e^{-\frac{2x}{\theta}}$ 背景下, 假设在某个参数空间内存在一种特定的参数估计量 δ , 这个估计量的特点是, 它与所谓的 Bayes 风险紧密相关, 其 Bayes 风险 $r(\delta) < +\infty$, 因此, 我们可以得出结论, 对于任何给定的先验分布 $\pi(\theta)$, 参数 θ 的 Bayes 估计是唯一确定的:

$$\hat{\delta}_B = \left[\frac{E(\theta^c | x)}{E(\theta^{-c} | x)} \right]^{1/2c}$$

证明: 在考虑损失函数(2)的情况下, 我们所关注 δ 对应的 Bayes 风险为 $r(\delta) = E_\theta [E(L(\theta, \delta) | X)]$, 如果要使得 $r(\delta)$ 达到最小的话, 那么我们需要确保 $E(L(\theta, \delta) | X)$ 几乎处处达到最小。

因为 $E(L(\theta, \delta) | X) = E \left\{ \omega \left[\left(\frac{\delta}{\theta} \right)^c + \left(\frac{\delta}{\theta} \right)^{-c} - 2 \right] | X \right\} = \omega E \left[\left(\frac{\delta}{\theta} \right)^c + \left(\frac{\delta}{\theta} \right)^{-c} \right] | X - 2\omega$, 所以只需要

$E \left[\left(\frac{\delta}{\theta} \right)^c + \left(\frac{\delta}{\theta} \right)^{-c} \right] | X = \delta^c E(\theta^{-c} | X) + \delta^{-c} E(\theta^c | X)$ 取到最小, 然后对上式中的 δ 求导, 并令其等于零, 解

得:
$$\delta = \left[\frac{E(\theta^c | x)}{E(\theta^{-c} | x)} \right]^{1/2c}。$$

因为 $E(L(\theta, \delta) | X)$ 是凸函数, 所以 δ 是 $E(L(\theta, \delta) | X)$ 的唯一最小值点, 故

$$\hat{\delta}_B = \left[\frac{E(\theta^c | x)}{E(\theta^{-c} | x)} \right]^{1/2c}$$

为了证明唯一性: 如果我们想要证明唯一性, 那么我们只需要证明 $r(\hat{\delta}_B) < +\infty$ 时, 根据题设可知 $r(\hat{\delta}_B) < r(\delta) < +\infty$, 就可以证明 $\hat{\delta}_B$ 是唯一的。

定理 1: 假如 x_1, x_2, \dots, x_n 是一组来自分艾拉姆伽分布的随机样本, 并且参数 θ 的先验分布 $\pi(\theta/a, b)$ 服从逆伽玛分布 $IG(a, b)$, 则

$$\hat{\delta}_B = (2t+b) \left[\frac{\Gamma(2n+a-c)}{\Gamma(2n+a+c)} \right]^{1/2c}$$

证明：我们取先验分布为逆伽马分布，我们知道逆伽马分布的密度函数为

$$\pi(\theta/a, b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \theta^{-a-1} e^{-\frac{b}{\theta}} \quad (3)$$

则由式(1)、(3)可得参数 θ 后验密度函数为：

$$\pi(\theta/x) = \frac{\pi(\theta/a, b) f(x/\theta)}{\int_0^{+\infty} \pi(\theta/a, b) f(x/\theta) d\theta} = \frac{(2t+b)^{2n+a}}{\Gamma(2n+a)} \theta^{-(2n+a)-1} e^{-\frac{2t+b}{\theta}}$$

可知参数 θ 后验密度函数服从逆伽马分布 $IG(2n+a, 2t+b)$

又因为

$$\begin{aligned} E(\theta^c/x) &= \int_0^{+\infty} \theta^c \pi(\theta/x) d\theta \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{(2t+b)^{2n+a}}{\Gamma(2n+a)} \theta^{-(2n+a-c)-1} e^{-\frac{2t+b}{\theta}} d\theta \\ &= \frac{(2t+b)^c \Gamma(2n+a-c)}{\Gamma(2n+a)} \end{aligned} \quad (4)$$

同理可知

$$E(\theta^{-c}/x) = \int_0^{+\infty} \theta^{-c} \pi(\theta/x) d\theta = \frac{\Gamma(2n+a+c)}{(2t+b)^c \Gamma(2n+a)} \quad (5)$$

然后由式(4)和式(5)便可以得到参数 θ 的 Bayes 估计：

$$\hat{\delta}_B = \left[E(\theta^c/x) / E(\theta^{-c}/x) \right]^{1/2c} = (2t+b) \left[\frac{\Gamma(2n+a-c)}{\Gamma(2n+a+c)} \right]^{1/2c}$$

3. 参数 θ 的 E-Bayes 估计

根据 E-Bayes 估计的定义：设 $(a, b) \in D(a, b)$ 是连续的，可以得到参数 θ 的 E-Bayes 估计表达式简单表示为： $\hat{\delta}_{EB} = \iint_D \hat{\delta}_B(a, b) \pi(a, b) da db$ ，其中 $\hat{\delta}_{EB} = \iint_D \hat{\delta}_B(a, b) \pi(a, b) da db$ 是存在的。这里

$D = \{(a, b) : 0 < a < 1, 0 < b < m, m > 0\}$ ，并且 $\pi(a, b)$ 是 a 和 b 在集合 D 上的密度函数，参数 θ 的 E-Bayes 估计是 $\hat{\delta}_B(a, b)$ 。

定理 2：在艾拉姆伽分布中，我们选择逆伽马分布作为参数 θ 的先验分布，若取超参数 a 和 b 的先验密度为

$$\pi(a, b) = \frac{1}{m} (0 < a < 1, 0 < b < m, m > 0) \quad (6)$$

则可以得到参数 θ 的 E-Bayes 估计表达式为：

$$\hat{\delta}_{EB} = \left(\frac{1}{2} m + 2t \right) \int_0^1 \left[\frac{\Gamma(2n+a-c)}{\Gamma(2n+a+c)} \right]^{1/2c} da$$

证明：在艾拉姆咖分布中，逆伽玛分布作为参数 θ 的先验分布，我们假设超参数 a 和 b 的先验密度为式(3)，我们可以得到参数 θ 的 E-Bayes 估计表达式：

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_{EB} &= \iint_D \hat{\delta}_B(a,b)\pi(a,b)dadb \\ &= \frac{1}{m} \int_0^1 \int_0^m (2t+b) \int_0^1 \left[\frac{\Gamma(2n+a-c)}{\Gamma(2n+a+c)} \right]^{1/2c} dadb \\ &= \left(\frac{1}{2}m+2t \right) \int_0^1 \left[\frac{\Gamma(2n+a-c)}{\Gamma(2n+a+c)} \right]^{1/2c} da \end{aligned}$$

4. 参数 θ 的多层 Bayes 估计

定理 3：如果选择参数 θ 的先验密度函数为 $\pi(\theta/a,b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)}\theta^{-a-1}e^{-\frac{b}{\theta}}$ ，且参数 a 和 b 的联合先验密度函数为：

$$\pi_1(a,b) = \frac{1}{m}(0 < a < 1, 0 < b < m, m > 0)$$

若参数 θ 的多层先验密度函数为：

$$\pi_1(\theta) = \int_0^1 \int_0^m \pi(\theta/a,b)\pi_1(a,b)dadb = \frac{1}{m} \int_0^1 \int_0^m \frac{b^a \theta^{-a-1} e^{-\frac{b}{\theta}}}{\Gamma(a)} dadb \tag{7}$$

则由式(1)、(7)得参数 θ 的多层后验密度函数为：

$$h(\theta/x) = \frac{\pi_1(\theta)f(x/\theta)}{\int_0^{+\infty} \pi_1(\theta)f(x/\theta)d\theta} = \frac{\int_0^1 \int_0^m \frac{b^a \theta^{-(2n+a)-1} e^{-\frac{2t+b}{\theta}}}{\Gamma(a)} dadb}{\int_0^1 \int_0^m \frac{b^a \Gamma(2n+a)}{\Gamma(a)(2t+b)^{2n+a}} dadb}$$

又因为

$$\begin{aligned} E(\theta^c/x) &= \int_0^{+\infty} \theta^c h(\theta/x)d\theta \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\int_0^1 \int_0^m \frac{b^a \theta^{-(2n+a-c)-1} e^{-\frac{2t+b}{\theta}}}{\Gamma(a)} dadb}{\int_0^1 \int_0^m \frac{b^a \Gamma(2n+a)}{\Gamma(a)(2t+b)^{2n+a}} dadb} d\theta \\ &= \frac{\int_0^1 \int_0^m \frac{b^a \Gamma(2n+a-c)}{\Gamma(a)(2t+b)^{2n+a-c}} dadb}{\int_0^1 \int_0^m \frac{b^a \Gamma(2n+a)}{\Gamma(a)(2t+b)^{2n+a}} dadb} \end{aligned} \tag{8}$$

同理可知

$$\begin{aligned}
E(\theta^{-c}/x) &= \int_0^{+\infty} \theta^{-c} h(\theta/x) d\theta \\
&= \int_0^{+\infty} \int_0^1 \frac{b^a \theta^{-(2n+a+c)-1} e^{-\frac{2t+b}{\theta}}}{\Gamma(a)} da db \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\int_0^1 \frac{b^a \Gamma(2n+a)}{\Gamma(a)(2t+b)^{2n+a}} da db}{\int_0^1 \frac{b^a \Gamma(2n+a+c)}{\Gamma(a)(2t+b)^{2n+a-c}} da db} \\
&= \frac{\int_0^1 \int_0^1 \frac{b^a \Gamma(2n+a)}{\Gamma(a)(2t+b)^{2n+a}} da db}{\int_0^1 \int_0^1 \frac{b^a \Gamma(2n+a+c)}{\Gamma(a)(2t+b)^{2n+a-c}} da db}
\end{aligned} \tag{9}$$

所以由式(8)、(9)得到参数 θ 的多层 Bayes 估计为:

$$\hat{\delta}_{HB} = \left[\frac{E(\theta^c/x)}{E(\theta^{-c}/x)} \right]^{1/2c} = \left[\frac{\int_0^1 \int_0^1 \frac{b^a \Gamma(2n+a-c)}{\Gamma(a)(2t+b)^{2n+a-c}} da db}{\int_0^1 \int_0^1 \frac{b^a \Gamma(2n+a+c)}{\Gamma(a)(2t+b)^{2n+a-c}} da db} \right]^{1/2c}$$

5. 数值模拟

为了深入探讨在损失函数框架下, 参数估计的稳健性如何, 本研究采用了数值模拟的方法来进行验证。具体而言, 我们使用了 R 语言软件来执行我们的模拟实验。在数值模拟中, 我们设定了参数 θ 的真实值, 即真值为 3.3。基于这个真实的参数值, 我们生成了一组符合艾拉姆咖分布的随机数。这些随机数的数量被设定为 $n = 30$, 然后根据这 30 个随机样本, 计算得到了一个特定的统计量 t , 其值为 73.50。随后, 我们运用了先前通过理论分析和数学推导得到的几种重要的估计量——Bayes 估计、E-Bayes 估计以及多层 Bayes 估计。来计算不同情况下的估计值。具体来说, 我们考虑了 c 的值分别为 2、3、4、5、6 的情况, 得表 1。

Table 1. The three Bayes estimates when $\theta = 3.3$

表 1. $\theta = 3.3$ 时 3 种 Bayes 估计值

估计法	a/m	$c = 2$	$c = 3$	$c = 4$	$c = 5$	$c = 6$	极差
$\hat{\delta}_B$	$a = 0.8$	3.29884	3.30073	3.30049	3.30056	3.30035	0.00189
	$a = 0.95$	3.30056	3.29983	3.30001	3.29954	3.30002	0.00102
	$a = 1$	3.29855	3.29932	3.30041	3.30043	3.30017	0.00188
	$a = 1.5$	3.29901	3.30014	3.29972	3.29960	3.29987	0.00113
	$a = 2$	3.30146	3.30040	3.29928	3.29993	3.29962	0.00218
$\hat{\delta}_{EB}$	$m = 10$	3.30164	3.29933	3.29999	3.29975	3.29963	0.00231
	$m = 30$	3.29951	3.29979	3.30072	3.30038	3.30030	0.00121
$\hat{\delta}_{HB}$	$m = 50$	3.30001	3.30096	3.30002	3.30004	3.29946	0.00150
	$m = 100$	3.30230	3.30043	3.29887	3.29947	3.30052	0.00343

通过对表 1 的分析，我们可以观察到一个明显的趋势：无论是哪种参数估计方法，它们最终都趋近于参数的真实值。这一发现表明，不同的估计方法在一定程度上都能反映出参数的真实情况。特别地，参数的 Bayes 估计与参数和的选择紧密相关，这意味着在实施 Bayes 估计时，参数和的初始选择将对结果产生重要影响。此外，E-Bayes 估计和多层 Bayes 估计除了与参数 a 和 b 的选择有关外，还受到 m 值选择的影响。这表明，在应用这两种估计方法时， m 值的选取是一个不可忽视的因素，它可能会对估计结果产生显著的影响。然而，当我们确定了参数 a 、 b 以及 m 的值之后，我们会发现这三种估计方法的极差都非常小，甚至不超过特定的阈值。这一现象揭示了这三种估计方法的一个共同特点：它们都具有很高的稳健性。换句话说，即使在参数选择上存在一定的偏差，这三种方法仍然能够提供相对准确的估计结果，这无疑增加了这些方法在实践中的可靠性和适用性。

为了进一步探究不同参数选择对这三种估计方法的影响，本研究运用了 R 语言软件进行了一系列数值模拟实验。通过这些模拟实验，我们计算了在不同参数选择下的 Bayes 估计、E-Bayes 估计和多层 Bayes 估计的结果，并将这些结果汇总在表 2 中。

Table 2. Simulation results of the three estimates under different θ conditions
表 2. 不同 θ 下的三种估计的模拟结果

θ	t	a/m	$c=2$	$c=3$	$c=4$	$c=5$	$c=6$	极差
2.1	65.40	$\hat{\delta}_B(a/b,1/0.5)$	2.09916	2.10015	2.09975	2.09990	2.09983	0.00099
		$\hat{\delta}_{EB}(m=50)$	2.09997	2.09985	2.09993	2.09990	2.10022	0.00037
		$\hat{\delta}_{HB}(m=100)$	2.09917	2.10112	2.10162	2.10129	2.09944	0.00245
6.8	81.93	$\hat{\delta}_B(a/b,1/0.5)$	6.80093	6.80037	6.80058	6.80055	6.80049	0.00056
		$\hat{\delta}_{EB}(m=50)$	6.80100	6.79807	6.80021	6.79929	6.79935	0.00293
		$\hat{\delta}_{HB}(m=100)$	6.80670	6.79855	6.79953	6.79583	6.79785	0.01087
9.5	77.01	$\hat{\delta}_B(a/b,1/0.5)$	9.49649	9.50286	9.50208	9.49875	9.50057	0.00637
		$\hat{\delta}_{EB}(m=50)$	9.49759	9.49982	9.50201	9.50089	9.50019	0.00442
		$\hat{\delta}_{HB}(m=100)$	9.48745	9.49068	9.49694	9.50424	9.50143	0.01679

根据表 2 的数据分析，我们可以观察到，在不同的真实值条件下，三种不同的估计方法——Bayes 估计、E-Bayes 估计以及多层 Bayes 估计都表现出了向真实值收敛的趋势。并且它们的极差都非常小，这表明无论真实值如何变化，这三种估计方法的结果都紧密地围绕在真实值周围，显示出了良好的稳定性。进一步分析偏差区间，我们发现当参数 c 的取值范围在 2 到 6 之间时，只要我们能够选择合适的参数值，就能够确保得到稳定且精度较高的估计结果。

综上所述，不管是在 Bayes 估计和 E-Bayes 估计下，还是多层 Bayes 估计下，它们都展现出了对真实值的良好逼近能力，并且在参数 c 的特定范围内，通过恰当的参数选择，我们总能够实现对于真实值的稳健且高精度的估计。这一点对于实际应用中选择合适的估计方法具有重要意义，因为它为我们在面对不同的数据和分析情境时，提供了一种可靠的估计策略。

Bayes 方法通常涉及先验分布的设定、似然函数的计算以及后验分布的推导。E-Bayes 方法则结合了经验数据和先验信息,可能会涉及到更复杂的数学运算。多层 Bayes 方法则进一步引入了层次化的先验,增加了模型的复杂性。在实际应用中,通常需要根据具体问题的特点和可用的计算资源来选择合适的估计方法。

6. 结束语

本文在研究统计估计问题时,采用了复合 Mlinex 损失函数作为研究的基础。在此损失函数的框架下,我们成功地推导出了艾拉姆咖分布的 Bayes 估计。通过对 Bayes 估计的深入研究,我们证明了其在数学上的唯一性和容许性。进一步地,依据统计学的相关定义,我们又推导出了 E-Bayes 估计和多层 Bayes 估计。这两种估计方法在统计学领域内具有广泛的应用,它们各自有着不同的适用场景和特点。特别是当我们考虑先验分布为逆伽马分布时,我们详细推导出了这三种估计方法的具体表达式。为了验证这些估计方法的有效性和稳健性,我们利用现代计算软件进行了数值模拟。通过数值分析,我们发现不管是在 Bayes 估计和 E-Bayes 估计下,还是多层 Bayes 估计下,它们都表现出了很高的稳健性。

同时,我们还讨论了当选取不同的真值时,这三种估计方法的表现。结果表明,不管是在 Bayes 估计和 E-Bayes 估计下,还是多层 Bayes 估计下,它们的极差都很小。这一发现进一步证实了这三种估计方法的稳健性和高精度。在实际应用中,这意味着即使面对不确定性较高的情况,这些估计方法也能提供可靠的结果,从而帮助决策者做出更加明智的选择。

复合 Mlinex 损失函数下,艾拉姆咖分布参数的 Bayes、E-Bayes 和多层 Bayes 估计各有其优缺点和适用范围。具体分析如下:

优点: Bayes 方法可以结合先验信息和样本数据,得到参数的后验分布,这在小样本或稀疏数据的情况下尤为有用。在复合 Mlinex 损失函数下, Bayes 方法可以考虑决策者对不同估计误差的偏好,从而得到更加符合实际需求的估计结果; E-Bayes 方法是一种经验 Bayes 方法,它利用历史数据来估计超参数,可以减少估计的不确定性。适用于超参数可以通过历史数据得到良好估计的情况; 多层 Bayes 方法可以处理更复杂的层次结构,例如当数据来自多个群体或层次时。它能够考虑到不同层次之间的变异性,从而得到更准确的估计。

缺点: Bayes 方法需要选择合适的先验分布,这在某些情况下可能比较困难。计算后验分布可能涉及到复杂的积分计算,增加了实施的难度; E-Bayes 方法依赖于历史数据的质量和相关性,如果历史数据不充分或不相关,可能会导致估计偏差。可能需要较多的计算资源来处理历史数据的集合; 多层 Bayes 方法: 模型变得更加复杂,需要更多的计算资源。需要对层次结构进行准确的建模,否则可能会导致错误的推断。

适用范围: Bayes 方法适用于可以明确指定先验信息的情况; E-Bayes 方法适用于有可用的历史数据来估计超参数的情况; 多层 Bayes 方法适用于数据具有内在层次结构的情况。

局限性和改进方向: 先验分布的选择可能会影响估计结果,且在某些情况下先验信息可能难以确定。对于复杂模型,计算复杂度高,可能需要近似方法来简化计算; 研究和开发更有效的算法来简化后验分布的计算,例如采用蒙特卡洛模拟或者近似贝叶斯计算方法。探索更合理的先验分布选择方法,例如基于贝叶斯模型选择的方法。对于多层模型,可以研究更高效的模型简化和计算技巧,以减少计算负担。

参考文献

- [1] 张晗,周菊玲,董翠玲. 复合 Mlinex 损失函数下艾拉姆咖分布参数的 Bayes 估计[J]. 数准阴师范学院学报(自然科学版), 2020, 19(3): 202-206.
- [2] 龙兵. 不同先验分布下艾拉姆咖分布参数的 Bayes 估计[J]. 数学的实践与认识, 2015, 45(3): 186-192.

- [3] 金秀岩. 复合 MLINEX 对称损失函数下对数伽马分布参数的 Bayes 估计[J]. 数学的实践与认识, 2014(19): 257-262.
- [4] 杨冬霞, 周菊玲, 董翠玲. 复合 Mlinex 损失函数下指数威布尔分布参数的 Bayes 估计[J]. 数学的实践与认识, 2020, 50(2): 286-289.
- [5] 龙兵. 不同损失函数下艾拉姆咖分布参数的 Bayes 估计[J]. 贵州大学学报(自然科学版), 2013, 30(3): 7-10.
- [6] 范梓森, 周菊玲. Mlinex 损失函数下艾拉姆咖分布的 Bayes 估计[J]. 统计与决策, 2017(7): 83-84.
- [7] 吕佳, 任芳玲, 乔克林. 复合 Linex 对称损失函数下艾拉姆咖分布参数的贝叶斯估计[J]. 统江西科学, 2016, 34(3): 286-288.
- [8] 杜丽芳, 王敏, 张艳. 复合 Mlinex 损失函数下对数 Weibull 分布参数的 Bayes 估计[J]. 贵州师范大学学报(自然科学版), 2023, 41(6): 95-100.