Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(5), 172-181
Published Online May 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.145174

分担超平面的全纯曲线族的正规定则

王睿为，刘晓俊

上海理工大学理学院，上海

收稿日期：2024年3月28日；录用日期：2024年4月30日；发布日期：2024年5月28日

摘　要

本文利用值分布理论和正规族理论等相关知识，研究了全纯曲线族分担处于次一般位置的超平面的正规定则。设 $\mathcal{F}$ 是一族从区域 $D\subset\mathbb{C}$ 到 $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ 的全纯曲线，$H_l=\left\{x\in P^3(\mathrm{C}):\langle x,\alpha_l\rangle=0\right\}\neq H_0$ 是 $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ 中 k 个处于 t 次一般位置的超平面，其中 $\alpha_l=(\alpha_{l0},\alpha_{l1},\alpha_{l2},\alpha_{l3})^{\mathrm{T}}$，$l=1,2,\cdots,k$，$H_0=\{x_0=0\}$，$t\geq 3$，$k=\min\left\{p:2t+1\leq p\leq 3t+1,\left[\frac{p-t}{3}\right]\leq(p-2t-1)\right\}$。如果对任意的 $f\in\mathcal{F}$，满足：$f(z)\in H_l$ 当且仅当 $\nabla f(z)\in H_l$；若 $f(z)\in\bigcup_{t=1}^{k}H_l$，那么 $\dfrac{\left|\langle f(z),H_0\rangle\right|}{\|f(z)\|\cdot|H_0\|}\geq\delta$，其中 $0<\delta<1$ 是一个常数，则 $\mathcal{F}$ 在 D 上正规。

关键词

正规族，全纯曲线，分担超平面，导曲线

Normal Criteria Concerning Shared Hyperplanes for Families of Holomorphic Curves

Ruiwei Wang, Xiaojun Liu

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Mar. 28th, 2024; accepted: Apr. 30th, 2024; published: May 28th, 2024

Abstract

Based on value distribution theory and normal family theory, the normality of hyperplanes in sub-

文章引用: 王睿为, 刘晓俊. 分担超平面的全纯曲线族的正规定则[J]. 理论数学, 2024, 14(5): 172-181.
DOI: 10.12677/pm.2024.145174

general position shared by holomorphic curve families is considered. Let $\mathcal{F}$ be a family of holomorphic maps of a domain $D\subset\mathbb{C}$ to $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$. Let $H_l=\{x\in P^3(\mathbb{C}):\langle x,\alpha_l\rangle=0\}\neq H_0$ be hyperplanes in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ located in general position, where $\alpha_l=(\alpha_{l0},\alpha_{l1},\alpha_{l2},\alpha_{l3})^{\mathrm{T}}$, $l=1,2,\cdots,k$, $H_0=\{x_0=0\}$, $k=\min\left\{p:2t+1\leq p\leq 3t+1,\left[\frac{p-t}{3}\right]\leq(p-2t-1)\right\}$. Assume the following conditions hold for every $f\in\mathcal{F}$: if and only if $f(z)\in H_l$, then $\nabla f(z)\in H_l$; If $f(z)\in\bigcup_{l=1}^{k}H_l$, then $\frac{|\langle f(z),H_0\rangle|}{\|f(z)\|\cdot|H_0\|}\geq\delta$, where $0<\delta<1$ is a constant. Then $\mathcal{F}$ is normal on *D*.

Keywords

Normal Family, Holomorphic Curve, Shared Hyperplanes, Derived Curves

1. 问题的提出

值分布理论，又称 Nevanlinna 理论，是复分析发展史上最深刻的研究领域之一，起源于对亚纯函数值的分布情况的研究，正规族理论的核心问题是关于正规定则的研究。在亚纯函数的值分布和正规族理论中，有一个著名的现象(Bloch 原理)，即如果在一个区域 $D\subset\mathbb{C}$ 有性质 $\wp$ 使得亚纯函数在整个复平面上是常数，那么这个亚纯函数族就是正规的。Zalcman 给出了更精确的叙述(Zalcman 引理)去判断亚纯函数族的正规性。而在全纯曲线的例子中也存在一些类似的现象。

2015 年，叶亚盛、庞学诚和杨刘[1]在考虑全纯曲线 f 与其导曲线 ∇f “强分担”超平面的情形，证明了下面定理。

定理 1：设 $\mathcal{F}\subset\mathcal{H}(D;\mathbb{P}^N(\mathbb{C}))$ 是一族从区域 $D\subset\mathbb{C}$ 到 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 的全纯曲线，$H_1,H_2,\cdots,H_{2N+1}$ 是 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 中的 $2N+1$ 个处于一般位置的超平面，δ 是一个实数，$0<\delta<1$。若对于任意的 $f\in\mathcal{F}$，满足下列条件：

(1) $f(z)$ 与 $\nabla f(z)$ 在 D 上“强分担” H_j，其中 $j=1,\cdots,2N+1$；

(2) 若 $f(z)\in\bigcup_{j=1}^{2N+1}H_j$，那么 $\frac{|\langle f(z),H_0\rangle|}{\|f(z)\|\cdot|H_0\|}\geq\delta$，其中 $H_0=\{x_0=0\}$ 是一个坐标超平面，

则 $\mathcal{F}$ 在 D 上正规。

这里的“强分担”意味着 $f^{-1}(H)=\nabla f^{-1}(H)$，且满足 $f^{-1}(H)=\nabla f^{-1}(H)$ 的点上有 $f(z)=\nabla f(z)$。

刘晓俊、庞学诚和杨锦华[2]对于首项系数非零的超平面，将定理 1 中的“强分担”减弱为“分担”，得到了下面定理。

定理 2：设 $\mathcal{F}$ 是一族从区域 $D\subset\mathbb{C}$ 到 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 的全纯曲线，$H_j=\{x\in\mathbb{P}^N(\mathbb{C}):\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}_j\rangle=0\}$ 是 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 中处于一般位置的超平面，这里 $\boldsymbol{\alpha}_j=(a_{j0},\cdots,a_{jN})^{\mathrm{T}}$ 且 $a_{j0}\neq0$，$j=1,\cdots,2N+1$。若对于任意的 $f\in\mathcal{F}$，满足下列两个条件：

(1) 若 $f(z)\in H_j$，则 $\nabla f(z)\in H_j$，其中 $j=1,\cdots,2N+1$；

(2) 若 $f(z)\in\bigcup_{j=1}^{2N+1}H_j$，那么 $\dfrac{|\langle f(z),H_0\rangle|}{\|f(z)\|\cdot|H_0\|}\geq\delta$，其中 $H_0=\{x_0=0\}$，$0<\delta<1$ 是一个常数。

则 $\mathcal{F}$ 在 D 上正规。

去掉了超平面首项系数非零的限制，在 $N=2$ 的情况下，刘晓俊与庞学诚[3]得到下面的定理。

定理 3： 设 $\mathcal{F}$ 是一族从区域 $D\subset\mathbb{C}$ 到 $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ 的全纯曲线，令 $H_0=\{x_0=0\}$，$H_l=\{x\in\mathbb{P}^2(\mathbb{C}):\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}_l\rangle=0\}\neq H_0$ 是 $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ 中处于一般位置的超平面，其中 $\boldsymbol{\alpha}_l=(a_{l0},a_{l1},a_{l2})^{\mathrm{T}}$，$l=1,\cdots,5$。假设对任意的 $f\in\mathcal{F}$，满足下列两个条件：

(1) $f(z)\in H_l$ 当且仅当 $\nabla f(z)\in H_l$，其中 $l=1,\cdots,5$；

(2) 若 $f(z)\in\bigcup_{l=1}^{5}H_l$，那么 $\dfrac{|\langle f(z),H_0\rangle|}{\|f(z)\|\cdot\|H_0\|}\geq\delta$，其中 $0<\delta<1$ 是一个常数。

则 $\mathcal{F}$ 在 D 上正规。

随后，郑晓杰和刘晓俊[4]考虑了 $N=3$ 的情形，在额外增加一个超平面的情况下，证明了如下定理：

定理 4： 设 $\mathcal{F}$ 是一族从区域 $D\subset\mathbb{C}$ 到 $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ 的全纯曲线，令 $H_0=\{x_0=0\}$，$H_l=\{x\in P^3(C):\langle x,\alpha_l\rangle=0\}\neq H_0$ 是 $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ 中处于一般位置的超平面，其中 $\alpha_l=(\alpha_{l0},\alpha_{l1},\alpha_{l2},\alpha_{l3})^{\mathrm{T}}$，$l=1,2,\cdots,8$，假设对任意的 $f\in\mathcal{F}$，满足下列两个条件：

(1) $f(z)\in H_l$ 当且仅当 $\nabla f(z)\in H_l$，其中 $l=1,2,\cdots,8$；

(2) 若 $f(z)\in\bigcup_{l=1}^{8}H_l$，则 $\dfrac{|\langle f(z),H_0\rangle|}{\|f(z)\|\cdot\|H_0\|}\geq\delta$，其中 $0<\delta<1$ 是一个常数。

则 $\mathcal{F}$ 在 D 上正规。

范楚君和刘晓俊[5]又考虑了当 $N=3$ 时，分担处于 t 次一般位置的超平面的正规定则，对于 $t=3,4,5$ 的情形，得到了如下定理。

定理 5： 设 $\mathcal{F}$ 是一族从区域 $D\subset\mathbb{C}$ 到 $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ 的全纯曲线，令 $H_0=\{x_0=0\}$，$H_l=\{x\in P^3(C):\langle x,\alpha_l\rangle=0\}\neq H_0$ 是 $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ 中处于 t 次一般位置的超平面，其中 $\alpha_l=(\alpha_{l0},\alpha_{l1},\alpha_{l2},\alpha_{l3})^{\mathrm{T}}$，$l=1,2,\cdots,2t+3$，如果对任意的 $f\in\mathcal{F}$，满足下列两个条件：

(1) $f(z)\in H_l$ 当且仅当 $\nabla f(z)\in H_l$，其中 $l=1,2,\cdots,2t+3$；

(2) 若 $f(z)\in\bigcup_{l=1}^{2t+3}H_l$，则 $\dfrac{|\langle f(z),H_0\rangle|}{\|f(z)\|\cdot\|H_0\|}\geq\delta$，其中 $0<\delta<1$ 是一个常数。

则当 $t=3,4,5$ 时，$\mathcal{F}$ 在 D 上正规。

本文继续研究上述问题，通过改进研究方法，总结分析后，得到下面结论。当 $N=3$ 时，对处于任意 $t\geq3$ 次一般位置的超平面，找到了可以使得结论成立的最小的超平面个数，即如下定理。

定理 6： 设 $\mathcal{F}$ 是一族从区域 $D\subset\mathbb{C}$ 到 $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ 的全纯曲线，$t\geq3$ 为整数，设 $H_l=\{x\in P^3(\mathrm{C}):\langle x,\alpha_l\rangle=0\}\neq H_0$ 是 $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ 中 k 个处于 t 次一般位置的超平面，其中 $\alpha_l=(\alpha_{l0},\alpha_{l1},\alpha_{l2},\alpha_{l3})^{\mathrm{T}}$，$l=1,2,\cdots,k$，$H_0=\{x_0=0\}$，$k=\min\left\{p:2t+1\leq p\leq 3t+1,\left[\dfrac{p-t}{3}\right]\leq(p-2t-1)\right\}$，

如果对任意的 $f\in\mathcal{F}$，满足：

(1) $f(z)\in H_l$ 当且仅当 $\nabla f(z)\in H_l$，其中 $l=1,2,\cdots,k$；

(2) 若 $f(z)\in\bigcup_{l=1}^{k}H_l$，那么

$$\frac{|\langle f(z),H_0\rangle|}{\|f(z)\|\cdot\|H_0\|}\geq\delta$$

其中 $0<\delta<1$ 是一个常数。

那么 $\mathcal{F}$ 在 D 上正规。

注：实际上，定理 6 是对定理 4 和定理 5 的进一步推广和总结，由定理 6 可知，当 $N=3$ 时，对任意的 $t\geq 3$，只要 k 满足

$$\left[\frac{k-t}{3}\right]\leq (k-2t-1) \tag{*}$$

即可得到 $\mathcal{F}$ 在 D 上正规。

对定理 4，当 $t=3$ 时，$2t+2=8$，而由(*)式可得，此时当 $8\leq k\leq 10$，$\mathcal{F}$ 在 D 上正规，于是取 $k=8$。

同理，对定理 5，当 $t=4$ 时，$2t+3=11$，而由(*)式得只需 $11\leq k\leq 13$，而；$t=5$ 时，$2t+3=13$，而由(*)式得只需 $13\leq k\leq 16$；$t=6$ 时，$2t+3=15$，由(*)式得需 $16\leq k\leq 19$，故此时 $2t+3$ 个超平面无法得到 $\mathcal{F}$ 在 D 上正规，需增加超平面数量。

2. 符号与定义

首先介绍有关 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 的定义和符号，$\mathbb{P}^N(\mathbb{C})=\mathbb{C}^{N+1}\setminus\{0\}/\sim$ 为 N 维复射影空间，对于 $\boldsymbol{x}=(x_0,x_1,\cdots,x_N)$，$\boldsymbol{y}=(y_0,y_1,\cdots,y_N)\in\mathbb{P}^N(\mathbb{C})=\mathbb{C}^{N+1}\setminus\{0\}$，$\boldsymbol{x}\sim\boldsymbol{y}$ 当且仅当存在 $\lambda\in\mathbb{C}$，使得 $(x_0,x_1,\cdots,x_N)=\lambda(y_0,y_1,\cdots,y_N)$，$(x_0,x_1,\cdots,x_N)$ 的等价定义为 $[x_0:x_1:\cdots:x_N]$，则 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})=\left\{\boldsymbol{x}=[x_0:x_1:\cdots:x_N]:=(x_0,x_1,\cdots,x_N)\in\mathbb{C}^{N+1}\setminus\{0\}\right\}$，

其次，设 $D\to\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 是全纯曲线，U 为 D 的开子集，任意在 U 内满足 $\mathbb{P}\left(\tilde{f}(z)\right)=f(z)$ 的全纯曲线 $\tilde{f}:U\to:\mathbb{C}^{N+1}\setminus\{0\}$ 称为 f 在 U 上的即约表示，其中 $\mathbb{P}:\mathbb{C}^{N+1}\setminus\{0\}\to\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 为典型的商映射。

定义 1：对于任意开集 $U\subset D$，若 $f_0,f_1,\cdots,f_N$ 是 U 上没有公共零点的全纯函数，则称 $\tilde{f}=(f_0,f_1,\cdots,f_N)$ 为 f 在 U 上的一个即约表示。

设 $H=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{P}^N(\mathbb{C}):\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}\rangle=0\right\}$ 为一个超平面，记 $\|H\|=\|\boldsymbol{\alpha}\|=\max_{0\leq i\leq N}|a_i|$。在本文中，我们只考虑 $\|H\|=1$ 的标准化超平面。

对全纯曲线 f 的任意即约表示 $\tilde{f}$，定义全纯函数

$$\langle f(z),H\rangle=\langle\tilde{f},\boldsymbol{\alpha}\rangle=\sum_{i=0}^{N}a_i f_i(z)$$

再取

$$\left\|\tilde{f}(z)\right\|=\left\{\sum_{i=1}^{N}\left|f_i(z)\right|^2\right\}^{1/2}$$

定义 2：设 $f=[f_0:f_1:\cdots:f_N]:D\to\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 是一条全纯曲线，$z\in D$，$\tilde{f}$ 是 f 在 z 处的任意一个即约表示，记

$$f^{\#}=\frac{|f\wedge f'|}{\|f\|^2}=\frac{\sqrt{\sum_{0\leq i\leq j\leq N}\left|f_i f_j'-f_j f_i'\right|^2}}{\sum_{i=0}^{N}|f_i|^2}$$

为 f 在 z 处的 Fubini-Study 导数，简记为 F-S 导数，其中 $\tilde{f}'=\left(\tilde{f}_0',\tilde{f}_1',\cdots,\tilde{f}_N'\right)$。

定义 3：设 $f=[f_0:f_1:\cdots:f_N]:D\to\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 是一条全纯曲线，$\tilde{f}$ 是 f 在 z 处的任意一个即约表示，若

$$\rho_f=\lim_{r\to+\infty}\frac{\log T_f(r)}{\log r}<+\infty$$

其中，$T_f(r)=\int_0^{2\pi}\log\left\|\tilde{f}\left(re^{i\theta}\right)\right\|\frac{d\theta}{2\pi}-\log\left\|\tilde{f}(0)\right\|$ 为 f 的特征函数，则称 f 为有穷级的。

设 $H_1,H_2,\cdots,H_q$ 为 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 中的超平面，则：

$H_l=\left\{x\in\mathbb{P}^N(\mathbb{C}):\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}_l\rangle=a_{l0}x_0+a_{l1}x_1+\cdots+a_{lN}x_N=0\right\}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_l=\left(a_{l0},a_{l1},\cdots,a_{lN}\right)^{\mathrm{T}}$ 是模为 1 的法向量，$l=1,2,\cdots,q$。

根据文献[6]有下面关于次一般位置的定义。

定义 4： 设 N,t,q 均为正整数，且有 $t\ge N$，$q\ge 2t-N+1$，若对任意集合 $P\subseteq\{1,2,3,\cdots,q\}$，$\#P=t+1$，存在单射 $\mu:\{1,2,3,\cdots,N\}\to P$，使得 $H_{\mu(0)},H_{\mu(1)},\cdots,H_{\mu(N)}$ 处于一般位置，则称 $H_1,H_2,\cdots,H_q\subseteq\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 处于 t 次一般位置。

根据文献[7]对于超曲面的次一般位置，有下面定义：

定义 5： 设 $M\subseteq\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 是一个非空闭子集，t 为正整数，$Q_1,Q_2,\cdots,Q_q$ 是 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 中 q 个超平面，$q\ge t+1$，如果对任意的 $\{i_0,i_1,\cdots,i_t\}\subseteq\{1,2,3,\cdots,q\}$，有

$$M\cap\left(\bigcap\nolimits_{j=i_0}^{i_t}Q_j\right)=\varnothing$$

则称他们关于 M 处于 t 次一般位置，当 $M=\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$，即超曲面关于 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 处于 t 次一般位置。

特别地，当 $t=N$ 时，称为处于一般位置。

最后，根据文献[1]中导曲线的定义，有如下定义：

定义 6： 设 f 是从区域 D 到 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 的全纯曲线，$\tilde f=\left(f_0,f_1,\cdots,f_N\right)$ 是 f 在 D 上满足 $f_\mu(z)\ne 0$ 的即约表示，$\mu=1,2,3,\cdots,N$，则称

$$\nabla_\mu f(z)=\left[\frac{W\left(f_\mu,f_0\right)}{d}:\cdots:\frac{W\left(f_\mu,f_{\mu-1}\right)}{d}:\frac{f_\mu^2}{d}:\frac{W\left(f_\mu,f_{\mu+1}\right)}{d}:\cdots:\frac{W\left(f_\mu,f_N\right)}{d}\right]$$

为 f 关于第 μ 个分量的全纯导曲线，其中 $d(z)$ 为全纯函数，使得 $\frac{f_\mu^2}{d}$ 与 $\frac{W\left(f_\mu,f_i\right)}{d}$ 没有公共零点，$i=1,2,3,\cdots,\mu-1,\mu+1,\cdots,N$。

简单起见，将 $\nabla_0 f$ 记为 ∇f，显然有 $\nabla_\mu f$ 的定义与 f 的既约表示的选取无关

3. 主要引理

众所周知，Zalcman 引理为正规族理论中一个非常重要的引理，其在证明正规定则的时候起着核心的作用。在给出主要定理的证明过程之前，需要如下从 $\mathbb{C}^m$ 到 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 的全纯映射的 Zalcman 引理。

引理 1 [8]设 $\mathcal{F}$ 是一族从双曲区域 $\Omega\subseteq\mathbb{C}^m$ 映到 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 的全纯映射。若 $\mathcal{F}$ 在 Ω 上不正规，则存在子列 $\{f_n\}\subset\mathcal{F}$，点列 $\{z_n\}\subset\Omega$ 满足 $z_n\to z_0\in\Omega$，正数列 $\{\rho_n\}$ 满足 $\rho_n\to 0^+$，使得

$$g_n(\xi):=f_n\left(z_n+\rho_n\xi\right)$$

在 $\mathbb{C}^m$ 上内闭一致收敛于从 $\mathbb{C}^m$ 映到 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 的非常值全纯映射 $g(\xi)$。

在主要定理的证明过程中，还需要如下的引理。

引理 2 (Hurwitz 引理) [2]设 $\{f_n(z)\}$ 是定义在区域 $D\subseteq\mathbb{C}$ 内的一列全纯函数，$a\in\mathbb{C}$ 是任意一个复数，且设 $\{f_n(z)\}$ 在 D 的任意一个紧子集上一致收敛于非常值的全纯函数 $f(z)$。若存在点 $z_0\in D$，使得 $f(z_0)=a$，则对于每一个充分大的 n，方程 $f_n(z)-a$ 在 D 内有根。此外，存在 z_0 的某邻域 U，使得 $f(z)-a$ 在 U 内根的总数与在 $f_n(z)-a$ 内根的总数相同(计重数)。

引理 3 (Picard 型定理) [9]设 $f:\mathbb{C}\to X$ 是一条全纯曲线，其中 X 是 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 中的一个闭子集。再设 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_{2t+1}$ 是 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 中的超曲面，关于 X 处于 t 次一般位置。若 f 不取 Q_i，即 $\langle f,Q_i\rangle\ne 0$，$i=1,2,\cdots,2t+1$，则 f 必为常值曲线.。

为了方便利用上述引理辅助证明，得到了如下推论。

引理 4 [6]设 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 是一条全纯曲线，$H_1,H_2,\cdots,H_q$ 均是 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 中处于 t 次一般位置的超平面，其中 $q\ge 2t+1$，$t\ge N$，若对每个 $i=1,2,3,\cdots,q$，f 不取 H_i，或者 $f(\mathbb{C})\subseteq H_i$，则 f 必为常值曲线。

引理 5 [3]设 $g=[g_0,g_1,\cdots,g_N]:\mathbb{C}\to\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 是有穷级的全纯曲线，$g_0(\zeta)\not\equiv 0$，$N\ge 2$ 为整数。$H_l=\left\{x\in\mathbb{P}^N(\mathbb{C}):\langle x,\alpha_l\rangle=0\right\}$ 是 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 中处于一般位置的超平面，且其第一系数 a_{l_0} 均不为零，$l=0,1,\cdots,N+1$。$\tilde{g}=(g_0,g_1,\cdots,g_N)(\zeta)$ 是 g 的任意即约表示，令

$$G_l(\zeta)=a_{l_0}+\sum_{i=1}^{N}a_{l_i}\frac{g_i(\zeta)}{g_0(\zeta)},l=0,1,\cdots,N+1$$

若 $G_l(\zeta)\ne 0$，且 $G_l'(\zeta)\ne 0$，$\zeta\in\mathbb{C}$ 则 g 是线性退化的。

引理 6 [10]设 $f(z)$ 为整函数，若 $f(z)$ 的球面导数 $f^{\#}(z)$ 有界，则 $f(z)$ 的级至多为 1。

4. 定理的证明

首先假设 $\mathcal{F}$ 在 D 上不正规，则由引理 1 可得，存在点列 $\{z_n\}\subset D$ 满足 $z_n\to z_0\in D$，全纯曲线列 $\{f_n\}\subset\mathcal{F}$，正数列 $\{\rho_n\}$ 满足 $\rho_n\to 0^+$，使得

$$g_n(\zeta)\doteq f_n(z_n+\rho_n\zeta)\Rightarrow g(\zeta)$$

其中，g 是从 $\mathbb{C}$ 到 $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ 的有穷级的非常值全纯曲线。

设 $\tilde{g}(\zeta)=(g_0,g_1,g_2,g_3)(\zeta)$ 是 g 在 $\mathbb{C}$ 上的某个既约表示。

由于 H_l 是处于 t 次一般位置的超平面，$1\le l\le k$，由次一般位置的定义可得，至少存在 $k-t$ 个超平面的第一系数不为零。不失一般性，假定 $H_1,H_2,\cdots,H_{k-t}$ 的第一系数均不为零。

又由引理 4 及 g 非常值知，存在某个 $i\in\{1,2,3,\cdots,k\}$，不失一般性，假定 $i=k$，以及某个 $\zeta_0\in\mathrm{C}$，使得 $\langle g,H_k\rangle(\zeta_0)=0$，但 $\langle g,H_k\rangle(\zeta)\not\equiv 0$。

类似于定理 4 中的证明，有如下结论：

断言 a. $g_0(\zeta_0)\ne 0$，从而 $g_0(\zeta)\not\equiv 0$

断言 b. H_k 的第一系数必为零，即 $\alpha_k=(0,a_{k,1},a_{k,2},a_{k,3})$

以下分为两种情形进行讨论。

情况 1 $\tilde{g}$ 线性非退化。

由断言 b，有 $\tilde{g}$ 不取 H_l，$l=1,2,3,\cdots,k-t$ 即

$$G_l=a_{l,0}+a_{l,1}\frac{g_1}{g_0}+a_{l,2}\frac{g_2}{g_0}+a_{l,3}\frac{g_3}{g_0}\ne 0,l=1,2,3,\cdots,k-t$$

类似于定理 4 的情况(A)的证明过程，可得 $G_l'(\zeta)\ne 0$，$l=1,2,3,\cdots,k-t$，$\zeta\in\mathbb{C}$。又由于 H_l 处于 t 次一般位置，且 $k-t\ge t+1$，在上述 $k-t$ 个超平面中任取 $t+1$ 个，其中必定存在 4 个超平面处于一般位置。再由引理 5，取 $N=3$，可知 $\tilde{g}$ 线性退化，矛盾。

情况 2 $\tilde{g}$ 线性退化。

此时，存在不全为零的数 k_0,k_1,k_2,k_3，使得

$$k_0g_0(\zeta)+k_1g_1(\zeta)+k_2g_2(\zeta)+k_3g_3(\zeta)\equiv 0$$

情况 2.1，g_0,g_1,g_2 线性无关

此时，$k_3\ne 0$，所以存在常数 b_0,b_1,b_2,b_3 使得

$$g_3(\zeta)=b_0g_0(\zeta)+b_1g_1(\zeta)+b_2g_2(\zeta)+b_3g_3(\zeta)$$

又由引理 4 的证明可得 $g_0(\zeta)\neq 0$，则

$$\frac{g_3(\zeta)}{g_0(\zeta)}=b_0+b_1\frac{g_1(\zeta)}{g_0(\zeta)}+b_2\frac{g_2(\zeta)}{g_0(\zeta)}+d$$

且 G_l 是全纯的 $l=1,2,3,\cdots,k-t$，

由 Zalcman 引理的证明可得 $g^{\#}(z)<1$，则存在常数 $M>0$，使得 $G_l^{\#}\leq M$。则由引理 6 可知 $\rho_{G_l}\leq 1$，$1\leq l\leq k-t$，又由断言 b，$G_l\equiv 0$，或 $G_l\neq 0$，因此当 $G_l\neq 0$，$l=1,2,3,\cdots,k-t$ 时，$G_l=B_l\mathrm{e}^{A_l\zeta}$；当 $G_l\equiv 0$ 时，仍然记 $G_l=B_l\mathrm{e}^{A_l\zeta}$，此时 $B_l=0$。

任取 $j_1,j_2,\cdots,j_{t+1}\in\{1,2,3,\cdots,k-t\}$，不失一般性，令 $j_i=i$，$i=1,2,\cdots,t+1$，则存在某个单射 $\sigma:\{1,2,3,4\}\to\{1,2,3,\cdots,t+1\}$，使得 $H_{\sigma(1)},H_{\sigma(2)},H_{\sigma(3)},H_{\sigma(4)}$ 处于一般位置，从而 $\det A\neq 0$，其中

$$A=\begin{pmatrix} a_{\sigma(1),0} & a_{\sigma(2),0} & a_{\sigma(3),0} & a_{\sigma(4),0} \\ a_{\sigma(1),1} & a_{\sigma(2),1} & a_{\sigma(3),1} & a_{\sigma(4),1} \\ a_{\sigma(1),2} & a_{\sigma(2),2} & a_{\sigma(3),2} & a_{\sigma(4),2} \\ a_{\sigma(1),3} & a_{\sigma(2),3} & a_{\sigma(3),3} & a_{\sigma(4),3} \end{pmatrix}$$

设 $p_1B_{\sigma(1)}\mathrm{e}^{A_{\sigma(1)}\zeta}+p_2B_{\sigma(2)}\mathrm{e}^{A_{\sigma(2)}\zeta}+p_3B_{\sigma(3)}\mathrm{e}^{A_{\sigma(3)}\zeta}+p_4B_{\sigma(4)}\mathrm{e}^{A_{\sigma(4)}\zeta}=0$，$p_1,p_2,p_3,p_4$ 为常数。因此

$$\left(1,\frac{g_1}{g_0},\frac{g_2}{g_0},\frac{g_3}{g_0}\right)A\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix}=0$$

由于 $1,\frac{g_1}{g_0},\frac{g_2}{g_0},\frac{g_3}{g_0}$ 线性相关，所以存在非零向量 $(b_1,b_2,b_3,b_4)^{\mathrm{T}}$，使得 $A\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$，因此 p_1,p_2,p_3,p_4 不全为 0，则 $B_{\sigma(1)}\mathrm{e}^{A_{\sigma(1)}\zeta},B_{\sigma(2)}\mathrm{e}^{A_{\sigma(2)}\zeta},B_{\sigma(3)}\mathrm{e}^{A_{\sigma(3)}\zeta},B_{\sigma(4)}\mathrm{e}^{A_{\sigma(4)}\zeta}$ 线性相关。

断言 c：存在某个单射，$\phi:\{1,2,3\}\to\{\sigma(1),\sigma(2),\sigma(3),\sigma(4)\}$，使得 $B_{\phi(1)}\mathrm{e}^{A_{\phi(1)}\zeta},B_{\phi(2)}\mathrm{e}^{A_{\phi(2)}\zeta},B_{\phi(3)}\mathrm{e}^{A_{\phi(3)}\zeta}$ 线性无关。

断言 c 的证明：

不失一般性，假设存在常数 l_1,l_2,l_3，有 $B_{\sigma(4)}\mathrm{e}^{A_{\sigma(4)}\zeta}=l_1B_{\sigma(1)}\mathrm{e}^{A_{\sigma(1)}\zeta}+l_2B_{\sigma(2)}\mathrm{e}^{A_{\sigma(2)}\zeta}+l_3B_{\sigma(3)}\mathrm{e}^{A_{\sigma(3)}\zeta}$，由于 $\left(B_{\sigma(1)}\mathrm{e}^{A_{\sigma(1)}\zeta},B_{\sigma(2)}\mathrm{e}^{A_{\sigma(2)}\zeta},B_{\sigma(3)}\mathrm{e}^{A_{\sigma(3)}\zeta},B_{\sigma(4)}\mathrm{e}^{A_{\sigma(4)}\zeta}\right)=\left(1,\frac{g_1}{g_0},\frac{g_2}{g_0},\frac{g_3}{g_0}\right)A$，所以

$$\left(1,\frac{g_1}{g_0},\frac{g_2}{g_0},\frac{g_3}{g_0}\right)=\left(B_{\sigma(1)}\mathrm{e}^{A_{\sigma(1)}\zeta},B_{\sigma(2)}\mathrm{e}^{A_{\sigma(2)}\zeta},B_{\sigma(3)}\mathrm{e}^{A_{\sigma(3)}\zeta},B_{\sigma(4)}\mathrm{e}^{A_{\sigma(4)}\zeta}\right)A^{-1}$$

从而 $\frac{g_j}{g_0}=\sum_{i=1}^{3}c_{ij}B_{\sigma(i)}\mathrm{e}^{A_{\sigma(i)}\zeta}$，$j=1,2,3$，设 $C=\begin{pmatrix} c_{10} & c_{11} & c_{12} \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} \\ c_{30} & c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$，则有

$\left(1,\frac{g_1}{g_0},\frac{g_2}{g_0}\right)=\left(B_{\sigma(1)}\mathrm{e}^{A_{\sigma(1)}\zeta},B_{\sigma(2)}\mathrm{e}^{A_{\sigma(2)}\zeta},B_{\sigma(3)}\mathrm{e}^{A_{\sigma(3)}\zeta}\right)C$，若 $r(C)=2$，则方程 $C\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=0$ 有非零解，因此，

存在不全为0的常数 q_1,q_2,q_3 使得 $C\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix}=0$，则

$$\left(B_{\sigma(1)}\mathrm{e}^{A_{\sigma(1)}\zeta},B_{\sigma(2)}\mathrm{e}^{A_{\sigma(2)}\zeta},B_{\sigma(3)}\mathrm{e}^{A_{\sigma(3)}\zeta}\right)C\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix}=0 \text{ 即 } \left(1,\frac{g_1}{g_0},\frac{g_2}{g_0}\right)\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix}=0$$

，因此 $1,\frac{g_1}{g_0},\frac{g_2}{g_0}$ 线性相关，矛盾，从而 $r(C)=3$。

若 $B_{\sigma(1)}\mathrm{e}^{A_{\sigma(1)}\zeta},B_{\sigma(2)}\mathrm{e}^{A_{\sigma(2)}\zeta},B_{\sigma(3)}\mathrm{e}^{A_{\sigma(3)}\zeta}$ 线性相关，则存在不全为 0 的常数 c_0,c_1,c_2 使得 $\left(B_{\sigma(1)}\mathrm{e}^{A_{\sigma(1)}\zeta},B_{\sigma(2)}\mathrm{e}^{A_{\sigma(2)}\zeta},B_{\sigma(3)}\mathrm{e}^{A_{\sigma(3)}\zeta}\right)\begin{pmatrix}c_0\\c_1\\c_2\end{pmatrix}=0$，因此，$\left(1,\frac{g_1}{g_0},\frac{g_2}{g_0}\right)C^{-1}\begin{pmatrix}c_0\\c_1\\c_2\end{pmatrix}=0$，这意味着 $1,\frac{g_1}{g_0},\frac{g_2}{g_0}$ 线性相关，矛盾，断言 c 得证。

所以 $B_{\sigma(1)}\mathrm{e}^{A_{\sigma(1)}\zeta},B_{\sigma(2)}\mathrm{e}^{A_{\sigma(2)}\zeta},B_{\sigma(3)}\mathrm{e}^{A_{\sigma(3)}\zeta}$ 线性无关，则 $B_{\sigma(1)},B_{\sigma(2)},B_{\sigma(3)}$ 均不为 0，且 $A_{\sigma(1)},A_{\sigma(2)},A_{\sigma(3)}$ 互不相等。又因为 $r\left\{\left(1,\frac{g_1}{g_0},\frac{g_2}{g_0},\frac{g_3}{g_0}\right)\right\}=3$，则 $r\left\{\left(B_1\mathrm{e}^{A_1\zeta},B_2\mathrm{e}^{A_2\zeta},\cdots,B_{k-t}\mathrm{e}^{A_{k-t}\zeta}\right)\right\}\le 3$。

综上所述，任取 $P\subseteq\left\{B_1\mathrm{e}^{A_1\zeta},B_2\mathrm{e}^{A_2\zeta},\cdots,B_{k-t}\mathrm{e}^{A_{k-t}\zeta}\right\}$，$\#P=t+1$，存在 P 中的 3 个元素线性无关。因此，$A_1,A_2,\cdots,A_{k-t}$ 中任取 $t+1$ 个，有且仅有 3 个元素不同，当某个 $B_l=0$，对应的 $B_l\mathrm{e}^{A_l\zeta}$ 必与其他的线性相关，故不考虑。

由于 $\left[\frac{k-t}{3}\right]\le(k-2t-1)$，在 $k-t$ 个 $B_l\mathrm{e}^{A_l\zeta}$ 中，只有 3 个不同的 A_l，则最少的一种的个数小于等于 $\left[\frac{k-t}{3}\right]$，又取 $t+1$ 个时，有 $k-2t-1$ 个取不到，则可以只取另外两种，一共取 $t+1$ 个，此时取出的 $t+1$ 个只有 2 个元素不同，故不能满足要求，矛盾。

情况 2.2 g_0,g_1,g_2 线性相关

此时存在不全为零的数 p_0,p_1,p_2，使得

$$p_0g_0+p_1g_1+p_2g_2=0$$

情况 2.2.1 若 $p_2\ne 0$，则 g_2,g_3 可由 g_0,g_1 线性表出，即存在常数 k_1,k_2,l_1,l_2，使得 $g_2=k_1g_0+l_1g_1$，$g_3=k_2g_0+l_2g_1$，则

$$G_l=a_{l,0}+a_{l,1}\frac{g_1}{g_0}+a_{l,2}\frac{g_2}{g_0}+a_{l,3}\frac{g_3}{g_0}=\left(a_{l,1}+a_{l,2}k_1+a_{l,3}k_2\right)\frac{g_1}{g_0}+a_{l,0}+a_{l,2}l_1+a_{l,3}l_2，\quad l=1,2,\cdots,k$$

由于 H_l 是处于 t 次一般位置的超平面，则不失一般性，设 $\alpha_{l_0},\alpha_{l_1},\alpha_{l_2},\alpha_{l_3}$ 线性无关，$\{l_0,l_1l_2,l_3\}\subseteq\{1,2,\cdots,k-t\}$，则必存在某个 $l_i\in\{l_0,l_1l_2,l_3\}$ 使得 $a_{l,1}+a_{l,2}k_1+a_{l,3}k_2\ne 0$。对于上述的 l_i，若 $G'_{l_1}\equiv 0$，则有 $\left(\frac{g_1}{g_0}\right)'\equiv 0$，这意味着 $\frac{g_1}{g_0}=c_1$，矛盾。类似于定理 4 的证明可知，$G'_{l_1}\ne 0$，$\left(\frac{g_1}{g_0}\right)'\ne 0$。

若 H_j 的第一系数均不为零，即 $a_{j,0}\ne 0$，则由断言 b 有 g 不取 H_j 或 $g(\mathbb{C})\subseteq H_j$，$j=k-t+1,\cdots,k-1$。由引理 4 知，$\tilde{g}$ 为常值映射，矛盾。

因此，至少存在两个 $j_m,j_n\in\{k-t+1,\cdots,k-1\}$，$j_m\ne j_n$ 使得 $a_{j_m,0}=a_{j_n,0}=0$，设 $j_m=k-2$，$j_n=k-1$。又假设 H_i 的首项系数非零，即 $a_{i,0}\ne 0$，则 g 不取 H_i 或 $g(\mathbb{C})\subseteq H_i$，$i=k-t+1,\cdots,2t$。若对任意的

$\zeta\in\mathbb{C}$，有$\langle\tilde{g},\alpha_q\rangle\neq 0$或$\langle\tilde{g},\alpha_q\rangle\equiv 0$，$q=2t+1,\cdots,k$，则$\tilde{g}$为常值映射，矛盾。因此存在某个$q_i\in\{2t+1,\cdots,k\}$，$\zeta_0\in\mathbb{C}$，使得$\langle\tilde{g},\alpha_{q_i}\rangle(\zeta_0)=0$且$\langle\tilde{g},\alpha_{q_i}\rangle(\zeta)\not\equiv 0$。

断言 d： $\langle\tilde{g},\alpha_{q_i}\rangle$的零点$\zeta_0$均是重级的，且$\zeta_0$也是$G_{q_i}(\zeta)$的重级零点。

设$\alpha_{q_i}=(0,a_{q_i,1},a_{q_i,2},a_{q_i,3})$，则$\langle\tilde{g},\alpha_{q_i}\rangle(\zeta_0)=a_{q_i,1}g_1(\zeta_0)+a_{q_i,2}g_2(\zeta_0)+a_{q_i,3}g_3(\zeta_0)=0$。由式 2 可得，$(a_{q_i,1}+a_{q_i,2}k_1+a_{q_i,3}k_2)g_1(\zeta_0)+(a_{q_i,2}l_1+a_{q_i,3}l_2)g_0(\zeta_0)=0$，由于$g_0(\zeta_0)\neq 0$，故$G_{q_i}(\zeta_0)=0$。

由引理 2，存在序列$\{\zeta_n\}$，$\zeta_n\to\zeta_0$，使得$\langle\tilde{g}_n,\alpha_{q_i}\rangle(\zeta_n)=0$，则有$\langle\tilde{f}_n,\alpha_{q_i}\rangle(z_n+\rho_n\zeta_n)=0$，由定理 6 的条件 a 有，$\langle\nabla\tilde{f}_n,\alpha_{q_i}\rangle(z_n+\rho_n\zeta_n)=0$。所以

$$a_{q_i,1}\left(\frac{f_{n1}}{f_{n0}}\right)'+a_{q_i,2}\left(\frac{f_{n2}}{f_{n0}}\right)'+a_{q_i,3}\left(\frac{f_{n3}}{f_{n0}}\right)'\Bigg|_{z_n+\rho_n\zeta_n}=0$$

$$a_{q_i,1}\left(\frac{g_{n1}}{g_{n0}}\right)'+a_{q_i,2}\left(\frac{g_{n2}}{g_{n0}}\right)'+a_{q_i,3}\left(\frac{g_{n3}}{g_{n0}}\right)'\Bigg|_{\zeta_n}=0$$

令$n\to+\infty$，则

$$a_{q_i,1}\left(\frac{g_1}{g_0}\right)'+a_{q_i,2}\left(\frac{g_2}{g_0}\right)'+a_{q_i,3}\left(\frac{g_3}{g_0}\right)'\Bigg|_{\zeta_n}=0$$

得$G'_{q_i}(\zeta_0)=0$。即ζ_0也是$G_{q_i}(\zeta)$的重级零点，且$\langle\tilde{g},\alpha_{q_i}\rangle(\zeta)$的零点是重级的，$G_{q_i}(\zeta)$的零点也是重级的。

这意味着$\left(\frac{g_1}{g_0}\right)'(\zeta_0)=0$，因此至少存在一个$m_i\in\{k-t+1,\cdots,2t\}$有$a_{m_i,0}=0$，不失一般性，取$m_i=2t$。

类似地，可证得$a_{k-t,0},\cdots,a_{k,0}$均为零。因此，$\langle\tilde{g},\alpha_p\rangle$的零点$\zeta_0$均是重级的，且$\zeta_0$也是$G_p(\zeta)$的重级零点，$p=k-t+1,\cdots,k$，若对于任意的$\zeta\in\mathbb{C}$，$\langle\tilde{g},\alpha_p\rangle(\zeta)\equiv 0$，$p=k-t+1,\cdots,k$，则由引理 4，$\tilde{g}$为常值函数，矛盾。因此，存在某个$\zeta_0\in\mathbb{C}$，$p_j\in\{k-t+1,\cdots,k\}$使得$\langle\tilde{g},\alpha_{p_j}\rangle(\zeta_0)=0$但$\langle\tilde{g},\alpha_{p_j}\rangle(\zeta)\not\equiv 0$，这意味着

$$\left(a_{p_j,1}+a_{p_j,2}k_1+a_{p_j,3}k_2\right)\left(\frac{g_1}{g_0}\right)'\Bigg|_{\zeta_n}=0$$

矛盾。

情况 2.2.2 $p_2=0$，则p_0,p_1不全为零；

若$p_1\neq 0$，则g_1,g_3可由g_0,g_2线性表出，用相同的证明方法，可得矛盾。

若$p_0\neq 0$，则$p_1=0$，由$g_1=0$知$\frac{g_1}{g_0}=0$，矛盾。

综上所述，$\mathcal{F}$在D上正规，证毕。

注： 当k的值继续变小，不满足$\left[\frac{k-t}{3}\right]\leq(k-2t-1)$时，即$\left[\frac{k-t}{3}\right]>(k-2t-1)$时，最少的$A_l$的个数大于等于$\left[\frac{k-t}{3}\right]$大于$k-2t-1$，则任取$t+1$个一定有 3 个不同，故无法推出矛盾，则无法证明$\mathcal{F}$在$D$上正规。

5. 小结

本文从前人在 $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ 上 $t=3,4,5,6$ 的证明中得到灵感，进行进一步推导，得到了在 $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ 上 $t\geq 3$ 时的一般性结论，但是由证明方法无法推广到 $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$ 上，因为证明本质是通过一系列方法降维，把问题从 $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ 降维到 $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$，然后再利用前人方法得到证明，但是在 $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$ 降到 $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ 时，此方法无法通用，因此，期待有人能找到新的降维方法。

参考文献

[1] Ye, Y.S., Pang, X.C. and Yang, L. (2015) An Extension of Schwick's Theorem for Normal Families. *Annales Polonici Mathematici*, **115**, 23-31. https://doi.org/10.4064/ap115-1-2

[2] 刘晓俊, 庞学诚, 杨锦华. 涉及分担超平面的正规定则[J]. 数学年刊 A 辑(中文版), 2021, 42(2): 171-178.

[3] Liu, X.J. and Pang, X.C. (2020) Shared Hyperplanes and Normal Families of Holomorphic Curves. *International Journal of Mathematics*, **31**, 2050037. https://doi.org/10.1142/S0129167X20500378

[4] 郑晓杰, 刘晓俊. 全纯曲线正规族分担超平面[J]. 上海理工大学学报, 2021, 43(6): 523-527.

[5] 范楚君, 刘晓俊. 涉及导曲线与分担超平面的正规定则[J]. 上海理工大学学报, 2022, 44(5): 490-496.

[6] Ru, M. (2001) Nevanlinna Theory and Its Relation to Diophantine Approximation. World Scientific Publishing, Singapore. https://doi.org/10.1142/9789812810519

[7] 杨刘. 到复射影空间的全纯映射及亚纯映射的正规性和值分布[D]: [博士学位论文]. 上海: 华东师范大学, 2016.

[8] Aladro, G. and Krantz, S.G. (1991) A Criterion for Normality in C^n. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **161**, 1-8. https://doi.org/10.1016/0022-247X(91)90356-5

[9] Eremenko, A. (1999) A Picard Type Theorem for Holomorphic Curves. *Periodica Mathematica Hungarica*, **38**, 39-42. https://doi.org/10.1023/A:1004794914744

[10] 顾永兴, 庞学诚, 方明亮. 正规族理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2007.