Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(5), 60-68
Published Online May 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.145161

Hans汉斯

带相依结构和常值红利界限风险模型的Gerber-Shiu贴现惩罚函数

郭红爽

辽宁师范大学数学学院，辽宁 大连

收稿日期：2024年3月12日；录用日期：2024年4月2日；发布日期：2024年5月15日

摘　要

我们考虑的是带相依结构和常值红利界限的复合泊松风险模型，其中索赔时间和索赔额服从某种二元分布。我们可以导出Gerber-Shiu贴现惩罚函数的微积分方程，我们还求解了该微积分方程，证明其解是无界限条件下的Gerber-Shiu函数和相关齐次微积分线性方程解的组合。

关键词

Gerber-Shiu贴现惩罚函数，常值红利界限，破产理论

The Gerber-Shiu Discounted Penalty Function for the Risk Model with Dependence Structure and a Constant Dividend Barrier

Hongshuang Guo

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Mar. 12th, 2024; accepted: Apr. 2nd, 2024; published: May 15th, 2024

Abstract

We consider a compound Poisson risk model with dependence and a constant dividend barrier, where the claim amount and the interclaim time follow some bivariate distribution. An integro-differential equation for the Gerber-Shiu discounted penalty function is derived. We also solve the

文章引用: 郭红爽. 带相依结构和常值红利界限风险模型的 Gerber-Shiu 贴现惩罚函数[J]. 理论数学, 2024, 14(5): 60-68. DOI: 10.12677/pm.2024.145161

integrodifferential equation and show that the solution is a linear combination of the Gerber-Shiu function with no barrier and the solution of an associated homogeneous integrodifferential equation.

Keywords

Gerber-Shiu Discounted Penalty Function, Constant Dividend Barrier, Ruin Theory

1. 引言

在破产理论中，经典复合泊松风险模型建立在索赔额 X_i 和间隔时间 W_i 是相依的假设上，破产概率及相关问题已被广泛研究，论文[1]提出了期望贴现惩罚函数，它是统一研究破产时间，破产前盈余和破产时的赤字的一种有效的工具，论文[2]将经典风险模型推广到索赔额依赖于前一次索赔时间的风险模型，导出了 Gerber-Shiu 贴现惩罚函数的微积分方程并给出了解的表示，论文[3]将相依和边界分红策略引入复合泊松风险模型，得到了在常值红利界限下，具有简单相依关系时的 Gerber-Shiu 贴现惩罚函数的微积分方程并求解方程得到了 Gerber-Shiu 贴现惩罚函数的表达式，论文[4] [5] [6]介绍了复合泊松风险模型中红利策略的研究，论文[7]研究了具有拓展了的相依结构的复合泊松风险模型，得到了 Gerber-Shiu 贴现惩罚函数的拉普拉斯变换以及指数索赔下破产时的拉普拉斯变换的确切表达，利用论文[8] [9]中的 Dickson-Hipp 算子得出贴现惩罚函数的瑕疵更新方程。

本文选取一个更一般的相依结构，利用论文[10]中 Zhang 提出的相依结构(本文中(1)式)来代替常见的 FGM 联结函数，与常值红利界限相结合将论文[11]进行推广。

本篇文章安排如下：第二节，介绍了常值红利界限存在的索赔额与索赔间隔时间相依的风险模型；第三节，得到了 Gerber-Shiu 贴现惩罚函数的微积分方程；最后，在第四节，使用更新方程得到 $m_{b,\delta}(u)$ 的解析解。

2. 模型建构

在经典复合泊松风险模型中，盈余过程有以下形式

$$U(t)=u+ct-\sum_{i=1}^{N(t)}X_i, t\ge 0,$$

其中 $u\ge 0$ 是初始盈余，是保险公司是初始资产， $c\ge 0$ 是保费收入率，即保险公司单位时间收取的保费，单个索赔额 $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是独立同分布的随机变量，其概率密度函数 f_X，累计分布函数 F_X，拉普拉斯变换 $\hat{f}_X$。索赔次数过程 $\{N(t),t\ge 0\}$ 是由索赔间隔时间 $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ 定义的更新过程，指到时刻 t 为止索赔到来的次数，且 $\{N(t),t\ge 0\}$ 是参数为 λ 的 Poisson 过程。索赔来到的时间间隔 $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是严格正的随机变量序列，其服从参数为 λ 的指数分布，其概率密度函数为

$$f_W(t)=\lambda e^{-\lambda t}, t\ge 0.$$

在本篇论文中，假定 $\{X_i\}$ 和 $\{W_i\}$ 是独立的但是二元随机向量 $\{(X_i,W_i),i\ge i\}$ 是独立同分布的随机序列其分布类似于继承可变向量 (X,W)。令 $f_{X,W}(x,t)$ 是 (X,W) 的密度，并假定其表达式为

$$f_{X,W}(x,t)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \mathrm{e}^{-\lambda_i t} f_i(x), \tag{1}$$

其中 n 是正整数，$\lambda_i>0, i=1,2,\cdots,n$，$f_i's$ 是 $(0,\infty)$ 上的连续函数。一些 $f_i's$ 可以是负的，只要 $f_{X,W}(x,t)\ge 0$ 即可。

索赔总额过程 $\{S(t),t\ge 0\}$ 定义为 $S(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} X_i$；令 $U_b(0)=u$ 且

$$\begin{cases} \mathrm{d}U_b(t)=c\mathrm{d}t-\mathrm{d}S(t), & \text{if } U_b(t)<b, \\ \mathrm{d}U_b(t)=-\mathrm{d}S(t), & \text{if } U_b(t)=b. \end{cases}$$

为存在常值红利界限 $b(0<b<\infty)$ 的盈余过程，其中 $u\ge 0$ 是初始盈余水平，$c>0$ 是保费水平。换句话说，当公司盈余在 b 下方时没有分红，只要保险公司的盈余超过界限 b 时，我们就假设保险公司支付保费率 c 作为股息，将超出部分全部用来分红。

结合风险模型，我们用 T 表示破产时间，是 $U_b(t)$ 低于 0 水平的第一次穿过时间：

$$T=\inf\{t\ge 0, U_b(t)<0\},$$

如果对于所有的 $t\ge 0$，$U_b(t)\ge 0$，则 $T=\infty$。为保证破产不是一个必然事件，我们保证下列净利润条件成立：

$$E[cW_i-X_i]>0,\ i=1,2,\cdots$$

同时，我们引入 Gerber-Shiu 贴现惩罚函数的定义：

$$m_{b,\delta}(u)=E\left[\mathrm{e}^{-\delta T}\omega\left(U(T^-),|U(T)|\right)I(T<\infty)\middle|U(0)=u\right],$$

其中 $\delta\ge 0$ 是利息力度，$I(\bullet)$ 是示性函数，$\omega\left(U(T^-),|U(T)|\right)$ 是定义在 $[0,\infty)\times[0,\infty)$ 上的非负函数，$U(T^-)$ 是破产前盈余，$|U(T)|$ 是破产时的赤字。

3. Gerber-Shiu 贴现惩罚函数

这一部分的主要目的是导出期望贴现惩罚函数 $m_{b,\delta}(u)$ 的微积分方程，该方程将被用于得出 $m_{b,\delta}(u)$ 的解析解。本篇文章中，我们定义 I 和 D 分别为恒等算子和微分算子。

定理 1 在带有基于在(1)式定义的相依结构和常值红利 b 的复合泊松风险模型中，期望贴现惩罚函数 $m_{b,\delta}(u)$ 满足下面的积分方程：

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda_i+\delta}{c}I-D\right)m_{b,\delta}(u)=\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1,j\ne i}^{n}\frac{\lambda_i}{c}\left(\frac{\lambda_j+\delta}{c}I-D\right)\sigma_i(u) \tag{2}$$

$0\le u\le b<\infty$ 边界条件为

$$m'_{b,\delta}(b)=0, \tag{3}$$

$$m_{b,\delta}^{(n)}(b)=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{c}\sigma_i^{(n-1)}(b), \tag{4}$$

其中

$$\sigma_i(u)=\int_0^u m_{b,\delta}(u-x)f_i(x)\mathrm{d}x+\omega_i(u), \tag{5}$$

$$\omega_i(u)=\int_u^\infty \omega(u,x-u)f_i(x)\mathrm{d}x. \tag{6}$$

证明 以第一次索赔发生的时间 W_1 和索赔额 X_1 为条件，分

$$\{X_1 \le u+cW_1 \le b\},\{X_1 > u+cW_1\}\cap\{u+cW_1 \le b\},$$
$$\{X_{11} \le b < u+cW\},\{X_1 > b\}\cap\{u+cW_1 > b\}$$

四种情况考虑，前两种情况下第一次索赔发生在盈余过程到达 b 之前，后两种情况下第一次索赔发生在盈余过程到达 b 之后，在后两种情况下盈余过程首次到达 b 的时刻 $t_0=\frac{b-u}{c}$。故当 $0\le u\le b$ 时

$$\begin{aligned} m_{b,\delta}(u) &= \int_0^{(b-u)/c}\int_0^{u+ct} \mathrm{e}^{-\delta t} m_{b,\delta}(u+ct-x) f_{X,W}(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &\quad + \int_0^{(b-u)/c}\int_{u+ct}^{\infty} \mathrm{e}^{-\delta t}\omega(u+ct,x-u-ct) f_{X,W}(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &\quad + \int_{(b-u)/c}^{\infty}\int_0^{b} \mathrm{e}^{-\delta t} m_{b,\delta}(b-x) f_{X,W}(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &\quad + \int_{(b-u)/c}^{\infty}\int_b^{\infty} \mathrm{e}^{-\delta t}\omega(b,x-b) f_{X,W}(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{7}$$

将给定的(1)式代入(7)式，并做变换 $u+ct\to t$ 进行整理得到

$$m_{b,\delta}(u)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\int_0^{(b-u)/c}\mathrm{e}^{-(\lambda_i+\delta)}\sigma_i(u+ct)\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\int_{(b-u)/c}^{\infty}\mathrm{e}^{-(\lambda_i+\delta)}\sigma_i(b)\mathrm{d}t, \tag{8}$$

其中，函数 $\sigma_i(u)$ 由(5) (6)式给定。

将(8)式做简单变形得到

$$m_{b,\delta}(u)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{c}\int_u^{\infty}\mathrm{e}^{-(\delta+\lambda_i)((t-u)/c)}\sigma_i(t\wedge b)\mathrm{d}t$$

其中 $t\wedge b=\min(t,b)$。

为方便计算，令

$$g_i(u)=\int_u^{\infty}\mathrm{e}^{-(\delta+\lambda_i)((t-u)/c)}\sigma_i(t\wedge b)\mathrm{d}t,$$

则

$$g_i'(u)=\frac{\lambda_i+\delta}{c}g_i(u)-\sigma_i(u),$$

$n=2$ 时

$$\begin{aligned} m_{b,\delta}(u) &= \frac{\lambda_1}{c}\int_u^{\infty}\mathrm{e}^{-(\delta+\lambda_1)((t-u)/c)}\sigma_1(t\wedge b)\mathrm{d}t+\frac{\lambda_2}{c}\int_u^{\infty}\mathrm{e}^{-(\delta+\lambda_2)((t-u)/c)}\sigma_2(t\wedge b)\mathrm{d}t \\ &= \frac{\lambda_1}{c}g_1(u)+\frac{\lambda_2}{c}g_2(u), \end{aligned} \tag{9}$$

对 u 求导

$$\begin{aligned} m_{b,\delta}'(u) &= \frac{\lambda_1+\delta}{c}\frac{\lambda_1}{c}g_1(u)-\frac{\lambda_2+\delta}{c}\frac{\lambda_2}{c}g_2(u)-\frac{\lambda_1}{c}\sigma_1(u)-\frac{\lambda_2}{c}\sigma_2(u) \\ &= \frac{\lambda_1+\delta}{c}\left(m_{b,\delta}(u)-\frac{\lambda_2}{c}g_2(u)\right)+\frac{\lambda_2+\delta}{c}\left(m_{b,\delta}(u)-\frac{\lambda_1}{c}g_1(u)\right) \\ &\quad -\frac{\lambda_1}{c}\sigma_1(u)-\frac{\lambda_2}{c}\sigma_2(u) \\ &= \left(\frac{\lambda_1+\delta}{c}+\frac{\lambda_2+\delta}{c}\right)m_{b,\delta}(u)-\frac{\lambda_1+\delta}{c}\frac{\lambda_2}{c}g_2(u)-\frac{\lambda_2+\delta}{c}\frac{\lambda_1}{c}g_1(u) \\ &\quad -\frac{\lambda_1}{c}\sigma_1(u)-\frac{\lambda_2}{c}\sigma_2(u), \end{aligned} \tag{10}$$

(10)式继续对 u 求导

$$m''_{b,\delta}(u)=\left(\frac{\lambda_1+\delta}{c}+\frac{\lambda_2+\delta}{c}\right)m'_{b,\delta}(u)-\frac{\lambda_2}{c}\frac{\lambda_1+\delta}{c}\frac{\lambda_2+\delta}{c}g_2(u)-\frac{\lambda_1}{c}\frac{\lambda_1+\delta}{c}\frac{\lambda_2+\delta}{c}g_1(u)$$
$$+\frac{\lambda_1}{c}\frac{\lambda_2+\delta}{c}\sigma_1(u)+\frac{\lambda_2}{c}\frac{\lambda_1+\delta}{c}\sigma_2(u)-\frac{\lambda_1}{c}\sigma'_1(u)-\frac{\lambda_2}{c}\sigma'_2(u),$$

将(9)式代入，可以得到

$$m''_{b,\delta}(u)=\left(\frac{\lambda_1+\delta}{c}+\frac{\lambda_2+\delta}{c}\right)m'_{b,\delta}(u)+\frac{\lambda_1+\delta}{c}\frac{\lambda_2+\delta}{c}m_{b,\delta}(u)$$
$$+\frac{\lambda_1}{c}\frac{\lambda_2+\delta}{c}\sigma_1(u)+\frac{\lambda_2}{c}\frac{\lambda_1+\delta}{c}\sigma_2(u)-\frac{\lambda_1}{c}\sigma'_1(u)-\frac{\lambda_2}{c}\sigma'_2(u),$$

使用恒等算子 I 和微分算子 D，可以得到

$$\left(\frac{\lambda_1+\delta}{c}I-D\right)\left(\frac{\lambda_2+\delta}{c}I-D\right)m_{b,\delta}(u)$$
$$=\frac{\lambda_1}{c}\left(\frac{\lambda_2+\delta}{c}I-D\right)\sigma_1(u)+\frac{\lambda_2}{c}\left(\frac{\lambda_1+\delta}{c}I-D\right)\sigma_2(u).$$

假设 $n=k$ 时

$$\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{\lambda_i+\delta}{c}I-D\right)m_{b,\delta}(u)=\sum_{i=1}^{k}\prod_{j=1,j\neq i}^{k}\frac{\lambda_i}{c}\left(\frac{\lambda_j+\delta}{c}I-D\right)\sigma_i(u)$$

成立，当 $n=k+1$ 时

$$\prod_{i=1}^{k+1}\left(\frac{\lambda_i+\delta}{c}I-D\right)m_{b,\delta}(u)$$
$$=\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{\lambda_i+\delta}{c}I-D\right)\left(\frac{\lambda_{k+1}+\delta}{c}I-D\right)m_{b,\delta}(u)$$
$$=\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{\lambda_i+\delta}{c}I-D\right)\left(\frac{\lambda_{k+1}+\delta}{c}I-D\right)\sum_{l}\frac{\lambda_l}{c}g_l(u)+\prod_{i=1}^{k+1}\left(\frac{\lambda_i+\delta}{c}I-D\right)\frac{\lambda_{k+1}}{c}g_{k+1}(u)$$
$$=\sum_{i=1}^{k}\prod_{j=1,j\neq i}^{k}\frac{\lambda_i}{c}\left(\frac{\lambda_j+\delta}{c}I-D\right)\sigma_i(u)+\prod_{j=1,j\neq i}^{k+1}\frac{\lambda_i}{c}\left(\frac{\lambda_j+\delta}{c}I-D\right)\sigma_i(u)$$
$$=\sum_{i=1}^{k+1}\prod_{j=1,j\neq i}^{k+1}\frac{\lambda_i}{c}\left(\frac{\lambda_j+\delta}{c}I-D\right)\sigma_i(u).$$

由此(2)式成立。

在 $m'_{b,\delta}(u)$ 中 $u=b$ 时可以得出边界条件(3)，同时，(2)式在 $u=b$ 时可得到(4)式。

注意到(2)式本身并不依赖于界限 b，因此，可以得出一个结论，在没有界限 b 的条件下，Gerber-Shiu 贴现惩罚函数满足 n 阶非齐次微积分方程：

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\lambda_k+\delta}{c}I-D\right)m_{\infty,\delta}(u)=\sum_{k=1}^{n}\prod_{j=1,j\neq k}^{n}\frac{\lambda_k}{c}\left(\frac{\lambda_j+\delta}{c}I-D\right)\sigma_k(u);$$

其中

$$\sigma_k(u)=\int_0^u m_{\infty,\delta}(u-x)f_i(x)\mathrm{d}x+\omega_i(u).$$

论文[7]可见，它是瑕疵更新方程的一个解。

4. 贴现惩罚函数的一个表示方法

在这一部分，我们导出 $m_{b,\delta}(u)$ 的瑕疵更新方程。为实现这一目的，我们使用可积实值函数的 Dickson-Hipp 的算子 T_s， T_s 的定义可见于论文[8]

$$T_k f(x)=\int_x^{\infty} e^{-r(u-x)} f(u)du, r\in C.$$

论文[9]提供了关于 T_s 的一系列性质。

由定理 1 知 $m_{b,\delta}(u)$ 满足 n 阶非齐次方程，由微分方程理论，n 阶非齐次方程 $m_{b,\delta}(u)$ 的解可以表示为一个特解 $m_{\infty,\delta}(u)$ 和相关齐次微积分方程的 n 个线性无关的解的组合：

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda_i+\delta}{c}I-D\right)y(u)=\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1,j\neq i}^{n}\frac{\lambda_i}{c}\left(\frac{\lambda_j+\delta}{c}I-D\right)\int_0^u y(u-x)f_i(x)dx. \tag{11}$$

令 $\hat{y}(s)=\int_0^s e^{-sx}y(x)dx$，对(11)式微积分方程两边进行拉普拉斯变换，我们能得到

$$\hat{y}(s)=\sum_{k=1}^{n}\rho_k(s)y^{(k-1)}(0)\left[\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda_i+\delta}{c}-s\right)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{c}\prod_{j=1,j\neq i}^{n}\left(\frac{\lambda_j-\delta}{c}-s\right)\hat{f}_i(s)\right]^{-1} \tag{12}$$

其中

$$\rho_1(s)=-\frac{1}{s}\left[\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda_i+\delta}{c}-s\right)-\tau_{\lambda,0}\right],$$

$$\rho_2(s)=\frac{(-1)^2}{s}\left[\rho_1(s)-\tau_{\lambda,1}\right],$$

$$\vdots$$

$$\rho_{n-1}(s)=(-1)^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i+\delta}{c}-s\right),$$

$$\rho_n(s)=(-1)^n,$$

$$\tau_{\lambda,0}=\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i+\delta}{c}$$

$$\tau_{\lambda,i}=\frac{\tau_{\lambda,i-1}(s)}{\frac{\lambda_j+\delta}{c}}, i\neq j$$

由(12)式可将(11)式写成 n 个线性无关解 $\{y_{1,\delta}(u),u\ge 0\},\{y_{2,\delta}(u),u\ge 0\},\cdots,\{y_{n,\delta}(u),u\ge 0\}$ 的组合，其中当 $y_{1,\delta}(0)=1, y_{2,\delta}(0)=0,\cdots,y_{n,\delta}(0)=0$ 时

$$\begin{aligned}\hat{y}_{1,\delta}(s)=&-\frac{1}{s}\left[\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda_i+\delta}{c}-s\right)-\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i+\delta}{c}\right]\\&\cdot\left[\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda_i+\delta}{c}-s\right)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{c}\prod_{j=1,j\neq i}^{n}\left(\frac{\lambda_j-\delta}{c}-s\right)\hat{f}_i(s)\right]^{-1},\end{aligned} \tag{13}$$

当 $y_{1,\delta}(0)=0, y_{2,\delta}(0)=1,\cdots,y_{n,\delta}(0)=0$ 时

$$\hat{y}_{2,\delta}(s)=\frac{(-1)^2}{s}\left[\rho_1(s)-\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=i,j\neq i}^{n}\frac{\lambda_j+\delta}{c}\right]$$
$$\cdot\left[\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda_i+\delta}{c}-s\right)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{c}\prod_{j=1,j\neq i}^{n}\left(\frac{\lambda_j-\delta}{c}-s\right)\hat{f}_i(s)\right]^{-1}, \tag{14}$$

$$\vdots$$

当 $y_{1,\delta}(0)=0,y_{2,\delta}(0)=0,\cdots,y_{n,\delta}(0)=1$时

$$\hat{y}_{2,\delta}(s)=\left[\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda_i+\delta}{c}-s\right)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{c}\prod_{j=1,j\neq i}^{n}\left(\frac{\lambda_j-\delta}{c}-s\right)\hat{f}_i(s)\right]^{-1}. \tag{15}$$

定理 2 Gerber-Shiu 贴现惩罚函数满足(2)式， $m_{b,\delta}(u)$的解的表达式为

$$m_{b,\delta}(u)=m_{\infty,\delta}(u)+\sum_{i=1}^{n}\xi_i y_{i,\delta}(u),\ 0\le u\le b,$$

其中，常数 ξ_i 是下列线性方程组的解：

$$\sum_{i=1}^{n}\xi_i y'_{i,\delta}(b)=-m'_{\infty,\delta}(b), \tag{16}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\xi_j y_{j,\delta}^{(n)}(b)+\sum_{j=1}^{n}\xi_j\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{c}D^{n-1}\int_0^u y_{j,\delta}(u-x)f_i(x)\mathrm{d}x\Big|_{u=b}$$
$$=-\left[m_{b,\delta}^{(n)}(b)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{c}D^{n-1}\int_0^u m_{b,\delta}(u)f_i(x)\mathrm{d}x\Big|_{u=b}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{c}\omega_i^{(n-1)}(b)\right]. \tag{17}$$

证明 $m_{b,\delta}(u)$的形式显然有

$$m_{b,\delta}(u)=m_{\infty,\delta}(u)+\sum_{i=1}^{n}\xi_i y_{i,\delta}(u), \tag{18}$$

因此，对(18)式中 u 求导令 $u=b$ ，同时由(3) (4)式我们能得到

$$m'_{\infty,\delta}(u)+\sum_{i=1}^{n}\xi_i y'_{i,\delta}(b)=0, \tag{19}$$

$$m_{\infty,\delta}^{(n)}(u)+\sum_{i=1}^{n}\xi_i y_{i,\delta}^{(n)}(b)=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{c}\sigma_i^{(n-1)}(b). \tag{20}$$

(19)即为(16)式，利用 $m_{b,\delta}(u)$的结构形式(17)式，对(5)式中 u 求 $n-1$阶导，得到

$$D^{n-1}(\sigma_i(u))=\sum_{i=1}^{n}\xi_i D^{n-1}\int_0^u y_{i,\delta}(u-x)f_i(x)\mathrm{d}x+D^{n-1}\omega_i(u). \tag{21}$$

在 $u=b$ 处将(21)式带入(20)右手边，得出(17)式。

由论文[7]中性质 4.1 和 4.2 可知(13)~(15)右侧分母有且只有 n 个互不相同的正实根 $s_1,s_2,\cdots,s_n$ 。利用论文[7]中(47)式，(13)~(15)式可被表示为

$$\hat{y}_{1,\delta}(s)=\left[\sum_{i=1}^{n}\rho_1(s)\frac{\prod_{i=1}^{n}(s-s_i)}{(s-s_i)\left[\prod_{i=1}^{n}(s-s_i)\right]'}\right]\cdot\left[\prod_{i=1}^{n}(s-s_i)\right]^{-1}\left[1-T_sT_{s_n}\cdots T_{s_2}T_{s_1}h_{2,\delta}(0)\right]^{-1},$$

$$\hat{y}_{2,\delta}(s)=\left[\sum_{i=1}^{n-1}\rho_2(s)\frac{\prod_{i=1}^{n-1}(s-s_i)}{(s-s_i)\left(\prod_{i=1}^{n-1}(s-s_i)\right)'}\right]\cdot\left[\prod_{i=1}^{n}(s-s_i)\right]^{-1}\left[1-T_sT_{s_n}\cdots T_{s_2}T_{s_1}h_{2,\delta}(0)\right]^{-1},$$

$$\vdots$$

$$\hat{y}_{n,\delta}(s)=\left[\prod_{i=1}^{n}(s-s_i)\right]^{-1}\left[1-T_sT_{s_n}\cdots T_{s_2}T_{s_1}h_{2,\delta}(0)\right]^{-1},$$

其中

$$\hat{h}_{2,\delta}(s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{c}\prod_{j=1,j\neq i}^{n}\left(\frac{\lambda_j+\delta}{c}-s\right)\hat{f}_i(s).$$

因此，现在可以利用拉普拉斯变换求出每个线性无关解的表达式$\{y_{1,\delta}(u),u\geq 0\},\{y_{2,\delta}(u),u\geq 0\},\cdots,\{y_{n,\delta}(u),u\geq 0\}$。由论文[7]中性质 7.2 (45)式可以得出

$$y_{1,\delta}(u)=k_\delta\int_0^u y_{1,\delta}(u-y)g_\delta(y)\mathrm{d}y+\sum_{i=1}^{n}\frac{\rho_1(s_i)\mathrm{e}^{s_iu}}{\prod_{j=1,j\neq i}^{n}(s_i-s_j)},$$

$$y_{2,\delta}(u)=k_\delta\int_0^u y_{2,\delta}(u-y)g_\delta(y)\mathrm{d}y+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\rho_2(s_i)\left(\mathrm{e}^{s_iu}-\mathrm{e}^{s_nu}\right)}{\prod_{j=1,j\neq i}^{n}(s_i-s_j)},$$

$$\vdots$$

$$y_{n,\delta}(u)=k_\delta\int_0^u y_{n,\delta}(u-y)g_\delta(y)\mathrm{d}y+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\mathrm{e}^{s_iu}}{\prod_{j=1,j\neq i}^{n}(s_i-s_j)}.$$

其中

$$k_\delta=\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{c}\Bigg[\tau_{\delta,1}(s)T_0T_{s_n}\cdots T_{s_2}T_{s_1}f_i(0)+\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\tau_{\delta,2}(s)T_0T_{s_n}\cdots\widehat{T_{s_j}}\cdots T_{s_1}f_i(0)$$
$$+\sum_{k=1,j<k}^{n}\tau_{\delta,3}(s)T_0T_{s_n}\cdots\widehat{T_{s_j}}\cdots\widehat{T_{s_k}}\cdots T_{s_1}f_i(0)+\cdots+T_0T_{s_i}f_i(0)\Bigg],$$

$$g_\delta(y)=\frac{T_{s_n}\cdots T_{s_2}T_{s_1}}{k_\delta}$$

$$\tau_{\delta,0}(s)=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda_i+\delta}{c}-s_i\right)$$

$$\tau_{\delta,i}(s)=\frac{\tau_{\delta,i-1}(s)}{\frac{\lambda_j+\delta}{c}-s_j},i\neq j$$

瑕疵更新方程可以给出$y_{i,\delta}(u)$的解析解。该表达式的核心是复合几何分布函数$L_\delta(u)$，

$$L_\delta(u)=1-\sum_{n=1}^{\infty}(1-k_\delta)(k_\delta)^n\bar{G}_\delta^{*n}(y),$$

其中$\bar{G}_\delta^{*n}(y)$是概率密度函数$g_\delta(y)$的n重卷积的生存分布。

参考文献

[1] Gerber, H.U. and Shiu, E.S. (1998) On the Time Value of Ruin. *North American Actuarial Journal*, **2**, 48-72. https://doi.org/10.1080/10920277.1998.10595671

[2] Boudreault, M., *et al*. (2006) On a Risk Model with Dependence between Interclaim Arrivals and Claim Sizes. *Scandinavian Actuarial Journal*, **2006**, 265-285. https://doi.org/10.1080/03461230600992266

[3] Landriault, D. (2008) Constant Dividend Barrier in a Risk Model with Interclaim-Dependent Claim Sizes. *Insurance*: *Mathematics and Economics*, **42**, 31-38. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2006.12.002

[4] Lin, X.S., *et al.* (2003) The Classical Risk Model with a Constant Dividend Barrier: Analysis of the Gerber-Shiu Discounted Penalty Function. *Insurance*: *Mathematics and Economics*, **33**, 551-566. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2003.08.004

[5] Albrecher, H., *et al*. (2005) On the Distribution of Dividend Payments and the Discounted Penalty Function in a Risk Model with Linear Dividend Barrier. *Scandinavian Actuarial Journal*, **2005**, 103-126. https://doi.org/10.1080/03461230510006946

[6] Yuen, K.C., *et al*. (2007) The Gerber-Shiu Expected Discounted Penalty Function for Risk Processes with Interest and a Constant Dividend Barrier. *Insurance*: *Mathematics and Economics*, **40**, 104-112. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2006.03.002

[7] Cossette, H., *et al*. (2010) Analysis of Ruin Measures for the Classical Compound Poisson Risk Model with Dependence. *Scandinavian Actuarial Journal*, **2010**, 221-245. https://doi.org/10.1080/03461230903211992

[8] Dickson, D.C. and Hipp, C. (2001) On the Time to Ruin for Erlang (2) Risk Processes. *Insurance*: *Mathematics and Economics*, **29**, 333-344. https://doi.org/10.1016/S0167-6687(01)00091-9

[9] Li, S. and Garrido, J. (2004) On Ruin for the Erlang (n) Risk Process. *Insurance*: *Mathematics and Economics*, **34**, 391-408. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2004.01.002

[10] Zhang, Z., *et al*. (2012) On a Sparre Andersen Risk Model with Time-Dependent Claim Sizes and Jump-Diffusion Perturbation. *Methodology and Computing in Applied Probability*, **14**, 973-995. https://doi.org/10.1007/s11009-011-9215-1

[11] Liu, D., *et al*. (2014) The Gerber-Shiu Expected Penalty Function for the Risk Model with Dependence and a Constant Dividend Barrier. Abstract and Applied Analysis, **2014**, Article ID: 730174. https://doi.org/10.1155/2014/730174