

Three Order Impulsive Boundary Value Problem with P-Laplacian on Time Scales*

Shuzhen Qi¹, Jun Yang^{1,2}, Liyang Qi³, Meng Cheng⁴

¹College of Science, Yanshan University, Qinhuangdao

²Mathematic Research Center in Hebei Province, Shijiazhuang

³Elementary School of Xinzhai, Gaocun, Shahe

⁴College of Electrical Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao

Email: qishuzhen230@163.com

Received: Jun. 29th, 2012; revised: Jul. 16th, 2012; accepted: Jul. 18th, 2012

Abstract: This paper uses Avery-Peterson fixed point theorem on cone to study existence of positive solutions for a class of mixed impulsive boundary value problem with P-Laplacian. Some new results for the existence of at least three positive solutions of the boundary value problem are obtained, thus our results make a theoretical foundation for the further study of the impulsive boundary value problem with P-Laplacian. Finally, an example is worked out to demonstrate our results.

Keywords: Boundary Value Problem; Impulsive; Fixed Point Theorem; Time Scale

时标上三阶带脉冲的 P-Laplacian 动力方程边值问题*

齐淑珍¹, 杨军^{1,2}, 齐黎阳³, 程猛⁴

¹燕山大学理学院, 秦皇岛

²河北省数学研究中心, 石家庄

³沙河市高村学区辛寨小学, 沙河

⁴燕山大学电气工程学院, 秦皇岛

Email: qishuzhen230@163.com

收稿日期: 2012年6月29日; 修回日期: 2012年7月16日; 录用日期: 2012年7月18日

摘要: 本文利用 Avery-peterson 不动点定理得到了时标上一类带脉冲的 P-Laplacian 多点边值问题的正解存在性, 并且建立了至少存在三个正解的充分条件, 为现有的相关结果作了进一步推广, 同时为含有带脉冲的 P-Laplacian 多点边值问题的研究奠定了理论基础, 最后给出数字例子对主要结果进行了证明。

关键词: 边值问题; 脉冲; 不动点定理; 时标

1. 引言

近年来, 时标上 P-Laplacian 动力方程的发展颇为迅速。随后, 时标上 P-Laplacian 脉冲动力方程边值问题也成为了广大学者关注的焦点之一, 2005年, 何智敏^[1]讨论了二阶 P-Laplacian 边值问题, 利用 Banach 空间中锥的 twin 不动点定理, 得到了存在两个正解的条件; 2007年, 宋常修和肖存涛^[2]研究了时标上 P-Laplacian 泛函动力方程边值问题, 应用 Anderson 不动点定理进而也得到了正解存在性的相关条件。

本文受文[3]的启示, 研究如下一类受脉冲影响的 P-Laplacian 泛函动力方程多点边值问题正解的存在性:

*基金项目: 国家自然科学基金(60604004); 河北省自然科学基金资助项目(07M005); 秦皇岛市科技支撑计划项目(201001A037、201101A168)。

$$\begin{cases} \left[\phi_p \left(p(t) y^{\Delta \nabla}(t) \right) \right]^{\nabla} + a(t) f \left(y(t), y(\theta(t)) \right) = 0, \quad t \in J = [0, 1]_{\mathbb{T}}, \quad t \neq t_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \\ \Delta y|_{t=t_k} = I_k \left(y \left(t_k^- \right) \right), \quad k = 1, 2, \dots, n \\ \Delta y^{\Delta}|_{t=t_k} = -\bar{I}_k \left(y \left(t_k^- \right) \right), \quad k = 1, 2, \dots, n \\ y^{\Delta}(0) = 0, \quad a_0 y(1) + y^{\Delta}(1) = \sum_{i=1}^m \alpha_i y^{\Delta}(\xi_i), \quad y^{\Delta \nabla}(0) = 0, \\ y_0(t) = \psi(t), \quad t \in [-r, 0]. \end{cases} \quad (1)$$

其中 \mathbb{T} 为时标, $-r, \xi_i, 0, 1 \in \mathbb{T}$ 且 $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots < t_n < 1, 0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_m < 1$, 且

$\xi_i \neq t_k, i = 1, 2, \dots, m, k = 1, 2, \dots, n, a_0 > 0, 0 < \sum_{i=1}^m \alpha_i < 1, r > 0$ 。 $\phi_p(s)$ 是一个 P-Laplacian 算子, 且

$\phi_p(s) = |s|^{p-2} \cdot s, p > 1, (\phi_p)^{-1} = \phi_q, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 且 $\Delta y|_{t=t_k} = y(t_k^+) - y(t_k^-), \Delta y^{\Delta}|_{t=t_k} = y^{\Delta}(t_k^+) - y^{\Delta}(t_k^-)$, 其中

$y(t_k^+), y(t_k^-)$ 分别代表 $y(t)$ 在 $t = t_k$ 时的右极限和左极限。且满足:

(H₁) $I_k \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+), \bar{I}_k \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$;

(H₂) $f: (\mathbb{R}^+)^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ 连续的, $a(t) \in C_{ld}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^+)$ 且 $a(t)$ 在 $[0, 1]_{\mathbb{T}}$ 的任意闭子集上不恒为零并保持左连续, 其中 $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$;

(H₃) $p(t) \in C([0, 1], (0, \infty))$ 为单调增加函数;

(H₄) $\psi(s) \in C([-r, 0], \mathbb{R}^+), \theta(t) \in C([0, 1], [-r, 1])$ 且 $\theta(t) \leq t, t \in [0, 1]$ 。

在给出主要结果之前, 先介绍一些预备知识。假设 f, I_k, \bar{I}_k 递增且连续, 且定义 Banach 空间 E , 锥 P , 算子 A 。令 $E = \left\{ y: [0, 1]_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R} \mid y_k \in C(J_k, \mathbb{R}), k = 0, 1, \dots, n, \text{存在} \right\}$ 定义其上的范数为 $\|y\| = \sup_{t \in [0, 1]_{\mathbb{T}}} |y(t)|$ 。

$J_k = (t_k, t_{k+1}]_{\mathbb{T}}, k = 0, 1, \dots, n$, 定义 $J_0 = [0, t_1]_{\mathbb{T}}, J_{n+1} = \{1\}$ 。定义锥 $P \subset E$ 为

$$P = \left\{ y \in E \mid y \text{ 在每一个 } J_k \text{ 上均为非增非负凹泛函}, \right. \\ \left. y^{\Delta \nabla}(0) = 0, \text{ 且 } \text{Imp}(y(t_k)) \geq 0, k = 0, 1, \dots, n \right\}$$

因而对于任意的 $y \in P, \|y\| = \sup_{t \in [0, 1]_{\mathbb{T}}} |y(t)| = y(1)$ 。

引理 1 如果 $y \in P$, 那么 $y(t) \geq (1-t)\|y\|, t \in [0, 1]$ 其中 $\|y\| = \sup_{t \in [0, 1]_{\mathbb{T}}} |y(t)|$ 。

引理 2^[4] P 是实 Banach 空间 E 中的锥, 假设存在实数 e_4 和 e_5 , 锥 P 上的非负连续凸泛函 β 和 γ , 锥 P 上的非负连续凹泛函 φ 以及锥 P 非负连续泛函 ω 满足 $\omega(\lambda y) \leq \lambda \omega(y), 0 \leq \lambda \leq 1$ 且

$\varphi(y) \leq \omega(y), \|y\| \leq e_5 \beta(y), y \in \overline{P(\beta, e_4)}$ 。 $A: \overline{P(\beta, e_4)} \rightarrow \overline{P(\beta, e_4)}$ 是全连续的且存在正常数 e_1, e_2 和 e_3 , 其中 $e_1 < e_2$, 满足

(A₁) $\{y \in P(\beta, \gamma, \varphi, e_2, e_3, e_4) : \varphi(y) > e_2\} \neq \emptyset$ 且 $y \in P(\beta, \gamma, \varphi, e_2, e_3, e_4)$ 有 $\varphi(A(y)) > e_2$;

(A₂) $y \in P(\beta, \varphi, e_2, e_4)$ 且 $\gamma(A(y)) > e_3$ 有 $\varphi(A(y)) > e_2$;

(A₃) $0 \notin Q(\beta, \omega, e_1, e_4), y \in Q(\beta, \omega, e_1, e_4)$ 且 $\omega(y) = e_1$ 有 $\omega(A(y)) < e_1$ 。则 A 至少存在三个不动点

$y_1, y_2, y_3 \in \overline{P(\beta, e_4)}$ 使得 $\beta(y_i) \leq e_4, i = 1, 2, 3$, 和 $e_2 < \varphi(y_1), e_1 < \omega(y_2), \varphi(y_2) < e_2, \omega(y_3) < e_1$ 。

2. 主要结果

易得边值问题(1)有解的充分必要条件为 $y = y(t)$

$$y(t) = \begin{cases} \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{a_0} - s\right) \frac{1}{p(s)} \phi_q \left(\int_0^s a(r) f(y(r), y(\theta(r))) \nabla r \right) \nabla s - \\ \frac{1}{a_0} \sum_{i=1}^m \alpha_i \int_0^{\xi_i} \frac{1}{p(s)} \phi_q \left(\int_0^s a(r) f(y(r), y(\theta(r))) \nabla r \right) \nabla s - \\ \int_0^t (t-s) \frac{1}{p(s)} \phi_q \left(\int_0^s a(r) f(y(r), y(\theta(r))) \nabla r \right) \nabla s + \\ \sum_{k=1}^n W_k(t, y(t_k)), & t \in [0, 1]_{\mathbb{T}} \\ \psi(t), & t \in [-r, 0] \end{cases}.$$

其中 $W_k(t, y(t_k)) = \begin{cases} I_k(y(t_k)) + \bar{I}_k y(t_k) t_k, & t_k < t \leq 1 \\ \bar{I}_k y(t_k) t, & 0 \leq t \leq t_k \end{cases}$.

定义算子 $A: P \rightarrow E$ 为

$$\begin{aligned} Ay(t) = & \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{a_0} - s\right) \frac{1}{p(s)} \phi_q \left(\int_0^s a(r) f(y(r), y(\theta(r))) \nabla r \right) \nabla s \\ & - \frac{1}{a_0} \sum_{i=1}^m \alpha_i \int_0^{\xi_i} \frac{1}{p(s)} \phi_q \left(\int_0^s a(r) f(y(r), y(\theta(r))) \nabla r \right) \nabla s \\ & - \int_0^t (t-s) \frac{1}{p(s)} \phi_q \left(\int_0^s a(r) f(y(r), y(\theta(r))) \nabla r \right) \nabla s + \sum_{k=1}^n W_k(t, y(t_k)), \quad T \in [0, 1]. \end{aligned}$$

假设固定 η 且满足 $0 < \eta < \xi_1 < 1$ 。在锥 P 中定义非负连续凹泛函 φ ，非负连续的凸泛函 β 和 γ 及非负连续泛函 ω 为 $\varphi(y) = \min_{t \in [0, \eta]} y(t) = y(\eta)$ ， $\beta(y) = \gamma(y) = \max_{t \in [\xi_1, 1]} y(t) = y(\xi_1)$ ， $\omega(y) = \max_{t \in [\eta, 1]} y(t) = y(\eta)$ ，对于

$y \in P, \varphi(y) = \omega(y), \omega(\lambda y) = \lambda y(\eta) = \lambda \omega(y)$ ，由引理 1 得

$$\beta(y) = \max_{t \in [\xi_1, 1]} y(t) = y(\xi_1) \geq (1 - \xi_1) \|y\|,$$

即 $\|y\| \leq \frac{1}{1 - \xi_1} \beta(y)$ 。记 $M_1 = \{t \in [0, 1] : \theta(t) \leq 0\}$ ， $M_2 = \{t \in [0, 1] : \theta(t) > 0\}$ ， $M_3 = M_1 \cap [0, \eta]$ ，

$$l_1 = \left(1 + \frac{1}{a_0}\right) \frac{1}{p(0)} \phi_q \left(\int_0^1 a(r) \nabla r \right), \quad l_2 = \left(1 - \sum_{i=1}^m \alpha_i\right) \frac{(1-\eta)}{a_0 p(1)} \phi_q \left(\int_{M_3} a(r) \nabla r \right).$$

贯穿全文假定 $M_3 \neq \emptyset$ 且 $\int_{M_3} a(r) \nabla r > 0$ 。

定理 1 假设条件 $(H_1) \sim (H_4)$ 成立， $0 < e_1 < (1 - \xi_1) e_2 < e_2 < (1 - \xi_1) e_4$ ， $l_1 e_2 < l_2 e_4$ 且 f 满足以下条件

(H_5) $f(y, \psi(s)) < \phi_p \left(\frac{e_4}{l_1} \right)$ ，若 $0 \leq y(t) \leq \frac{1}{1 - \xi_1} e_4$ ， $s \in [-r, 0]$;

$f(y_1, y_2) < \phi_p \left(\frac{e_4}{l_1} \right)$ ，若 $0 \leq y_i(t) \leq \frac{1}{1 - \xi_1} e_4$ ， $i = 1, 2$;

(H_6) $f(y, \psi(s)) > \phi_p \left(\frac{e_2}{l_2} \right)$ ，若 $e_2 \leq y(t) \leq \frac{1}{(1 - \xi_1)^2} e_2$ ， $s \in [-r, 0]$;

(H_7) $f(y, \psi(s)) < \phi_p \left(\frac{e_1}{l_1} \right)$ ，若 $0 \leq y(t) \leq \frac{1}{1 - \xi_1} e_1$ ， $s \in [-r, 0]$;

$$f(y_1, y_2) < \phi_p \left(\frac{e_1}{l_1} \right), \text{ 若 } 0 \leq y_i(t) \leq \frac{1}{1-\xi_1} e_1, \quad i=1, 2;$$

则边值问题(1)至少存在三个解

$$y(t) = \begin{cases} \psi(t), & t \in [-r, 0] \\ y_i(t), & t \in [0, 1], \quad i=1, 2, 3 \end{cases} \quad (2)$$

其中 $y_1(t), y_2(t)$ 和 $y_3(t)$ 满足

$$\max_{t \in [\xi_1, 1]} y_i(t) \leq e_4, \quad i=1, 2, 3; \quad e_2 < \min_{t \in [0, \eta]} y_1(t); \quad e_1 < \max_{t \in [0, \eta]} y_2(t); \quad \min_{t \in [0, \eta]} y_2(t) < e_2; \quad \max_{t \in [\eta, 1]} y_3(t) < e_1.$$

证明 由假设(H₁)~(H₄)和引理 1 可知 $A: P \rightarrow P$ 是全连续映射。选 $y \in \overline{P(\beta, e_4)}$, 则

$$\beta(y) = \max_{t \in [\xi_1, 1]} y(t) = y(\xi_1) < e_4, \quad \text{其中 } \|y\| \leq \frac{1}{1-\xi_1} \beta(y) < \frac{e_4}{1-\xi_1} \text{ 有 } 0 \leq y(t) \leq \frac{e_4}{1-\xi_1}, \quad t \in [0, 1].$$

由(H₅), 当 $t \in [0, 1]$ 可得

$$\begin{aligned} \beta(Ay) &= (Ay)(\xi_1) \\ &= \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{a_0} - s \right) \frac{1}{p(s)} \phi_q \left(\int_0^s a(r) f(y(r), y(\theta(r))) \nabla r \right) \nabla s - \\ &\quad \frac{1}{a_0} \sum_{i=1}^m \alpha_i \int_0^{\xi_i} \frac{1}{p(s)} \phi_q \left(\int_0^s a(r) f(y(r), y(\theta(r))) \nabla r \right) \nabla s - \\ &\quad \int_0^{\xi_1} (\xi_1 - s) \frac{1}{p(s)} \phi_q \left(\int_0^s a(r) f(y(r), y(\theta(r))) \nabla r \right) \nabla s + \sum_{k=1}^n W_k(t, y(t_k)) \\ &\leq \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{a_0} - s \right) \frac{1}{p(s)} \phi_q \left(\int_0^s a(r) f(y(r), y(\theta(r))) \nabla r \right) \nabla s \leq \left(1 + \frac{1}{a_0} \right) \frac{e_4}{l_1 p(0)} \phi_q \left(\int_0^1 a(r) \nabla r \right) = e_4. \end{aligned}$$

从而 $A: \overline{P(\beta, e_4)} \rightarrow \overline{P(\beta, e_4)}$ 。

先验证引理 2 中的(A₁)成立, 选取 $y = \frac{e_2}{1-\xi_1}, e_3 = \frac{e_2}{1-\xi_1}$ 则

$$\varphi(y) = y(\eta) = \frac{e_2}{1-\xi_1} > e_2, \quad \gamma(y) = y(\xi_1) = \frac{e_2}{1-\xi_1}, \quad \beta(y) = y(\xi_1) = \frac{e_2}{1-\xi_1} \leq e_4.$$

则 $\{y \in P(\beta, \gamma, \varphi, e_2, e_3, e_4) : \varphi(y) > e_2\} \neq \emptyset$, 对 $y \in P(\beta, \gamma, \varphi, e_2, e_3, e_4)$ 满足

$$\varphi(y) = \min_{t \in [0, \eta]} y(t) = y(\eta) \geq e_2, \quad \gamma(y) = \max_{t \in [\xi_1, 1]} y(t) = y(\xi_1) \leq e_3.$$

由引理 1 可得 $\|y\| \leq \frac{1}{1-\xi_1} y(\xi_1) \leq \frac{1}{1-\xi_1} e_3$, 因此 $e_2 \leq y(t) \leq \frac{1}{(1-\xi_1)^2} e_2, t \in [0, \eta]$, 由(H₆), 当 $t \in [0, \eta]$ 可得

$$\varphi(Ay) = (Ay)(\eta) \geq e_2 \left(1 - \sum_{i=1}^m \alpha_i \right) \frac{(1-\eta)}{l_2 a_0 p(1)} \phi_q \left(\int_{M_3} a(r) \nabla r \right) = e_2, \quad \text{即引理 2 中的(A}_1\text{)成立。接着验证引理 2 中的(A}_2\text{)}$$

成立。选取 $y \in P(\beta, \varphi, e_2, e_4)$ 并且使 $\gamma(Ay) = Ay(\xi_1) > \frac{e_2}{1-\xi_1}$, 可得

$$\varphi(Ay) = \min_{t \in [0, \eta]} Ay(t) = Ay(\eta) \geq (1-\eta) Ay(\eta) \geq (1-\eta) Ay(\xi_1) > \frac{(1-\eta)e_2}{1-\xi_1} > e_2.$$

最后验证引理 2 中的(A₃)成立。由于 $\omega(0) = 0 < e_1$, 因此 $0 \notin Q(\beta, \omega, e_1, e_4)$ 。选取 $y \in Q(\beta, \omega, e_1, e_4)$ 并且

$\omega(y) = e_1$, 从而有引理 1 可得 $0 \leq y(t) \leq \|y(t)\| \leq \frac{y(\eta)}{1-\eta} \leq \frac{e_1}{1-\xi_1}, t \in [0, 1]$, 即 $0 \leq y(t) \leq \frac{e_1}{1-\xi_1}, t \in [0, 1]$. 由(H7), 当 $t \in [0, 1]$ 可得

$$\begin{aligned} \omega(Ay) &= (Ay)(\eta) \leq \left(1 + \frac{1}{a_0}\right) \frac{1}{p(0)} \phi_q \left[\int_{M_1} a(r) f(y(r), \psi(\theta(r))) \nabla r + \int_{M_2} a(r) f(y(r), \psi(\theta(r))) \nabla r \right] \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{a_0}\right) \frac{e_1}{l_1 p(0)} \phi_q \left(\int_0^1 a(r) \nabla r \right) = e_1. \end{aligned}$$

引理 2 中的(A3)成立.

因此, 由引理 2 可知 A 至少存在三个不动点 $y_1(t), y_2(t), y_3(t) \in \overline{P(\beta, e_4)}$ 使

$$\max_{t \in [\xi_1, 1]} y_i(t) \leq e_4, i = 1, 2, 3; e_2 < \min_{t \in [0, \eta]} y_1(t); e_1 < \max_{t \in [\eta, 1]} y_2(t); \min_{t \in [0, \eta]} y_2(t) < e_2; \max_{t \in [\eta, 1]} y_3(t) < e_1.$$

所以式(2)是边值问题(1)的三个正解. 证毕.

3. 应用例子

例 1 $T = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{3^n} : n \in N_0 \right\} \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{3}{5} \right] \cup \left(\frac{3}{5}, 1 \right]$ 考虑如下边值问题

$$y^{\Delta \nabla \nabla}(t) + \frac{5000y^5(t)}{\frac{1}{2}y^5(t) + y^5\left(t - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{6}} = 0, \quad t \in (0, 1) \tag{3}$$

$$\Delta y|_{t=i} = \frac{1}{50}t^4, \quad i = 1, 2; \Delta y^\Delta|_{t=i} = t^4, \quad i = 1, 2;$$

$$y^\nabla(0) = 0, y(1) + y^\Delta(1) = \frac{1}{3}y^\Delta\left(\frac{2}{5}\right) + \frac{1}{2}y^\Delta\left(\frac{2}{3}\right), y^{\Delta \nabla}(0) = 0, y_0(t) = \psi(t) = 0, t \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right), \tag{4}$$

其中 $p(t) = 1, p = 2, a(t) = 1, a_0 = 1, \alpha_1 = \frac{1}{3}, \alpha_2 = \frac{1}{2}, \xi_1 = \frac{2}{5}, \xi_2 = \frac{2}{3}, \eta = \frac{1}{9}, \theta: [0, 1] \rightarrow \left[-\frac{1}{3}, 1\right]$,

并且 $\theta(t) = t - \frac{1}{3}, r = \frac{1}{3}, f(y, \psi(s)) = \frac{500y^5}{y^5 + 1}, f(y_1, y_2) = \frac{500y_1^5}{y_1^5 + y_2^5 + 1}$. 通过具体计算可得,

$$M_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right], M_2 = \left(\frac{1}{3}, 1\right], M_3 = \left[0, \frac{1}{9}\right], l_1 = 2, l_2 = \frac{4}{81}, \text{选 } e_1 = \frac{1}{30}, e_2 = 2, e_4 = 1050,$$

那么利用定理 1,

$$f(y, \psi(s)) \leq 500 < \frac{e_4}{l_1} = \frac{1050}{2} = 525, 0 \leq y(t) \leq \frac{1}{1-\xi_1} e_4 f(y_1, y_2) \leq 500 < \frac{e_4}{l_1} = \frac{1050}{2} = 525, 0 \leq y_i(t) \leq \frac{1}{1-\xi_1} e_4, i = 1, 2.$$

进一步

$$f(y, \psi(s)) \geq 500 > \phi_p\left(\frac{e_2}{l_2}\right) = 6.4, e_2 \leq y(t) \leq \frac{1}{(1-\xi_1)^2} e_2,$$

然后

$$f(y, \psi(s)) \leq \phi_p\left(\frac{e_1}{l_1}\right) < \frac{e_1}{l_1} = 0.017, 0 \leq y(t) \leq \frac{1}{1-\xi_1} e_1, f(y_1, y_2) \leq \phi_p\left(\frac{e_1}{l_1}\right) < \frac{e_1}{l_1} = 0.017, 0 \leq y_i(t) \leq \frac{1}{1-\xi_1} e_1, i = 1, 2,$$

则边值问题(3)~(4)至少存在三个解

$$y(t) = \begin{cases} \psi(t) & t \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right] \\ y_i(t) & t \in [0, 1], \quad i = 1, 2 \end{cases}.$$

其中 $y_1(t), y_2(t), y_3(t)$ 满足 $\max_{t \in \left[\frac{2}{5}, 1\right]} y_i(t) \leq 1050, \quad i = 1, 2, \quad 2 < \max_{t \in \left[0, \frac{1}{9}\right]} y_1(t), \quad \frac{1}{30} < \max_{t \in \left[\frac{1}{9}, 1\right]} y_2(t); \quad \min_{t \in \left[0, \frac{1}{9}\right]} y_2(t) < 2;$

$$\max_{t \in \left[\frac{1}{9}, 1\right]} y_3(t) < \frac{1}{30}.$$

4. 说明

很多学者研究了时标上二阶边值问题的正解存在性, 比如文献[3]研究的是时标上二阶带脉冲的动力方程两点边值问题解的存在性, 论文是通过利用 Schaefer's 不动点定理和 Leray-Schauder 非线性迭代来证明解的存在性。[5]研究了在时标上二阶带脉冲的两点边值问题的解存在性, 论文主要是利用的是 Krasnoselskii 和 Zabreiko 和 Leggett-Williams 不动点定理进行证明的, 得到存在一个和三个解的存在性。本文研究的是在时标上三阶带脉冲的 P-Laplacian 混合型动力方程多点边值问题, 利用 Avery-peterson 不动点定理证明了存在三个正解的充分条件, 为高阶的动力方程边值问题提供了理论基础, 拓宽了研究方向。

5. 结论

本论文的研究结果是新的, 并且丰富了时标上动力方程边值问题的理论内容, 为以后高阶的动力方程边值问题奠定了一定的理论基础。

参考文献 (References)

- [1] Z. M. He. Double positive solutions of three-point boundary value problems for P-Laplacian dynamic equations on time scales. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2005, 182(2): 304-315.
- [2] C. X. Song, C. T. Xiao. Positive solutions for P-Laplacian functional dynamic equations on time scales. *Nonlinear Analysis*, 2007, 66(10): 1989-1998.
- [3] M. Benchohra, S. K. Ntouyas and A. Ouahab. Existence results for second order boundary value problem of impulsive dynamic equations on time scales. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2004, 296(1): 65-73.
- [4] R. I. Avery, A. C. Peterson. Three positive fixed points of nonlinear operators on ordered banach spaces. *Computers & Mathematics with Applications*, 2001, 42(3): 313-322.
- [5] J. L. Li, J. H. Shen. Existence results for second-order impulsive boundary value problems on time scales. *Nonlinear Analysis*, 2009, 70: 1648-1655.