

The Global Stability of a SEIRS Epidemic Model

Xia Wang, Fengling Hong, Weiping Yan

Shanxi University, Taiyuan

Email: wx616711@163.com, hongfl666@163.com, yanwp@sxu.edu.cn

Received Apr. 18th, 2013; revised Apr. 27th, 2013; accepted May 16th, 2013

Copyright © 2013 Xia Wang et al. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

Abstract: In this paper, a SEIRS epidemic model with generally nonlinear incidence rate, which can be influenced by psychological effect, and constant recruitment and disease-caused death in epidemiology is considered. It is investigated that the global dynamic is completely determined by the basic reproduction number R_0 . If $R_0 \leq 1$ holds, then the only disease-free equilibrium is global stable and the disease dies out. If $R_0 > 1$ holds, then the unique endemic equilibrium in its feasible region is globally stable and the disease persists at an endemic equilibrium state.

Keywords: SEIRS Model; Global Stability; Nonlinear Incidence; Lyapunov Function; Compound Matrix

一类 SEIRS 传染病模型的全局稳定性

王霞, 洪凤玲, 闫卫平

山西大学, 太原

Email: wx616711@163.com, hongfl666@163.com, yanwp@sxu.edu.cn

收稿日期: 2013 年 4 月 18 日; 修回日期: 2013 年 4 月 27 日; 录用日期: 2013 年 5 月 16 日

摘要: 本文主要研究的 SEIRS 传染病模型中的发病率是具有人为影响的一般非线性的, 出生率和死亡率均为常数。基本再生数 R_0 决定论疾病的稳定性和存在及灭亡。若 $R_0 \leq 1$ 时, 则无病平衡点存在且唯一, 是全局渐进稳定的, 此时疾病会灭亡。若 $R_0 > 1$, 则存在唯一的地方性平衡点, 且是全局渐进稳定的, 此时疾病会一直持续下去形成地方病。

关键词: SEIRS 模型; 全局稳定性; 非线性发病率; Lyapunov 函数; 复合矩阵

1. 引言

数学模型对传染病的研究起非常重要的作用, 能够更好地理解疾病模型和在较长一段时间内的疾病控制, 对数学模型传染病研究中发病率的函数公式是一个重要的影响因素。在[1]中提出一般发病率 $g(I)S = \frac{kI^p S}{1 + \alpha I^q}$, 这个发病率被许多学者引用。后来在[2]中引入发病率 $g(I)S = \frac{\beta IS}{1 + \alpha I}$, 其中 βI 为测量疾病的感染能力, $\frac{1}{1 + \alpha I}$ 是测量易感人群行为变化或心理的抑制作用。这一发病率更接近实际意义。在[3]考虑带时滞的非线性 SIR 传染病模型。在[4]中考虑 SEIR 传染病模型。文[5]和[6]研究了两类传染病模型的性质, 文[8-10]详细介绍了传染病模型的概念和基本性质。

本文在以上学者研究了模型下做出一些改变, 研究如下一般非线性发病率的 SEIRS 模型

$$\begin{cases} S'(t) = b - dS(t) - \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha I^p(t)} + \gamma R(t) \\ E'(t) = \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha I^p(t)} - (d + \varepsilon)E(t) \\ I'(t) = \varepsilon E(t) - (d + k + d_1)I(t) \\ R'(t) = kI(t) - dR(t) - \gamma R(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 $S(t), E(t), I(t), R(t)$ 分别代表了时刻 t 时的易感人群数, 潜伏期人群数, 已感人群数和恢复人群数。参数 b 为人口的出生率, d 为人口自然死亡率, k 为疾病人群恢复率, d_1 为因病死亡率, β 为接触比例常数, α 为衡量生理抑制作用常数, ε 为潜伏期人群变为已感人群数的比例常数, γ 为已感人群丧失免疫变为易感人群比例, 系统中的各系数均为正常数。由上述方程可得: $\frac{1}{\varepsilon}$ 为潜伏期, $\frac{1}{k}$ 为感染周期, $\frac{1}{\gamma}$ 为免疫周期。其中所有参数均为非负常数, $p \geq 2$ ($p=0, p=1, p=2$ 时的模型已被许多学者研究过其全局稳定性)。

2. 模型的平衡点和基本性质

我们令 $x = \frac{\beta}{d}S, y = \frac{\beta}{d}E, z = \frac{\beta}{d}I, w = \frac{\beta}{d}R, t = \frac{\tau}{d}$, 由(1.1)我们可将系统简化成如下系统(为了方便, 我们仍然用 S, E, I, R, t 替换 x, y, z, w, τ)

$$\begin{cases} S'(t) = A - S(t) \frac{S(t)I(t)}{1 + \rho I^p(t)} + \eta R(t) \\ E'(t) = \frac{S(t)I(t)}{1 + \rho I^p(t)} - (1 + \varepsilon_0)E(t) \\ I'(t) = \varepsilon_0 E(t) - (1 + k_1 + d_2)I(t) \\ R'(t) = k_1 I(t) - R(t) - \eta R(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 $A = \frac{\beta b}{d^2}, \rho = \frac{\alpha d^p}{\beta^p}, \eta = \frac{\gamma}{d}, \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{d}, k_1 = \frac{k}{d}, d_2 = \frac{d_1}{d}$ 。

令(2.1)中四个方程相加且定义 $N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$, 可得到 $N'(t) = A - N(t) - d_2 I(t)$, 由文献[4]可知 $\frac{A}{d_2 + 1} \leq \liminf_{t \rightarrow +\infty} N(t) \leq A$ 。因此可得系统(2.1)等价系统如下

$$\begin{cases} E'(t) = \frac{(N - E - I - R)I}{1 + \rho I^p} - mE \\ I'(t) = \varepsilon_0 E - \delta I \\ R'(t) = k_1 I - \theta R \\ N'(t) = A - N - d_2 I \end{cases} \quad (2.2)$$

其中 $m = 1 + \varepsilon_0, \delta = 1 + k_1 + d_2, \theta = \eta + 1$ 。根据生物学意义, 我们研究系统(2.2)在紧集

$$T = \{(E, I, R, N) \in R_+^4 : 0 \leq E + I + R \leq A, N \leq A\}。$$

其中 R_+^4 为 R^4 的非负集, 且易得是(2.2)相关的正不变集。 ∂T 和 $\overset{\circ}{T}$ 分别代表 T 的边界和内部。

定义基本再生数为

$$R_0 = \frac{A\varepsilon_0}{m\delta} = \frac{\beta b/d^2 \cdot \varepsilon/d}{(1+\varepsilon_0)(1+k_1+d_2)} = \frac{\beta b\varepsilon}{d(d+\varepsilon)(d+k+d_1)}. \quad (2.3)$$

定理 2.1: 当 $R_0 \leq 1$ 时, 则在 T 内仅有无病平衡点 P_0 ; 当 $R_0 > 1$ 时, 则在 T 内仅有地方病平衡点 P_* 。

证明: 对于系统(2.2)的任意非负参数值, 系统(2.2)始终有一个无病平衡点 $P_0 = (0, 0, 0, A)$ 。求正的平衡点, 令系统(2.2)四个方程均等于 0, 故可推得 $(N - E - I - R)I = \frac{m\delta}{\varepsilon_0}(1 + \rho I^p)I$ 。由此我们可得 $I = 0$ 或 $N - E - I - R = \frac{m\delta}{\varepsilon_0}(1 + \rho I^p)$ 。若 $I = 0$ 成立, 易推出无病平衡点 $P_0 = (0, 0, 0, A)$ 。若

$$N - E - I - R = \frac{m\delta}{\varepsilon_0}(1 + \rho I^p) \quad (2.4)$$

可推得

$$m\delta\rho I^p + \left(d_2\varepsilon_0 + \delta + \frac{k_1\varepsilon_0}{\theta} + \varepsilon_0\right)I + \left(1 - \frac{A\varepsilon_0}{m\delta}\right)m\delta = 0. \quad (2.5)$$

由(2.5)可知:

- 1) 若 $R_0 \leq 1$, 则无平衡点;
- 2) 若 $R_0 > 1$, 则存在唯一正平衡点 $P_* = (E_*, I_*, R_*, N_*)$ 叫做地方病平衡点。其中 $E_* = \frac{\delta}{\varepsilon_0}I_*, R_* = \frac{k_1}{\theta}I_*, N_* = A - d_2I_*, I_*$ 为方程(2.5)的解(由(2.5)可得 $A - d_2I_* > 0$)。

定理 2.2: 若 $R_0 \leq 1$, 系统(2.2)的无病平衡点 $P_0 = (0, 0, 0, A)$ 在 T 内是全局渐进稳定的, 若 $R_0 > 1$, 则无病平衡点是不稳定的。

证明: 构造一个 Lyapunov 函数 $L' = \varepsilon_0 E + mI$ 。它沿着(2.2)的解的导数为 $L'(t) \leq m\delta I(R_0 - 1)$ 。因此若 $R_0 \leq 1$, 则 $L'(t) \leq 0$ 。且仅当 $I = 0$ 时, 则 $L'(t) = 0$ 。在 T 的边界上, 其中 $I = 0$, 我们有 $E = 0$, $R'(t) = -\theta R$, 得 $R(t) = R(0)e^{-\theta t}$, 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $R(t) \rightarrow 0$, $N'(t) = A - N$ 。故 $N(t) = A + (N(0) - A)e^{-t}$ 。当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $N(t) \rightarrow A$ 。因此当 $R_0 \leq 1$ 时, 集合 $\{(E, I, R, N) \in T : L' = 0\}$ 的最大不变集为无病平衡点 P_0 。因此由 Lyapunov-LaSalle 定理可得无病平衡点 P_0 是全局渐进稳定的。

当 $R_0 > 1$ 时, 我们分析 P_0 的稳定性, 系统(2.2)在点 $P_0 \in T$ 的特征方程为

$$(\lambda + 1)(\lambda + \theta) \left[\lambda^2 + (m + \delta)\lambda + m\delta(1 - R_0) \right] = 0. \quad (2.6)$$

若 $R_0 > 1$, 则(2.6)有一个正根和三个负根。因此, 若 $R_0 > 1$, 则 P_0 为不稳定的。

下面, 我们研究当 $R_0 > 1$ 时, 唯一的地方性平衡点 P_* 的局部渐进稳定性。我们将证明矩阵 $J(P_*)$ 是稳定的。即 $J(P_*)$ 的所有特征值均有负实部(证明 Routh-Hurwitz 条件的常规做法。由于 P_* 的确定坐标不明确, 证明 Routh-Hurwitz 不等式变得特别困难)。

定理 2.3: 若 $R_0 > 1$ 且 $\theta = 1$ 时, 系统(2.2)的地方性平衡点 $P_* = (E_*, I_*, R_*, N_*)$ 是局部渐进稳定的。

证明: 系统(2.2)在 P_* 的 Jacobian 矩阵为

$$J_* = \begin{pmatrix} -m - \frac{I_*}{1 + \rho I_*^p} & \frac{m\delta[1 - (p-1)\rho I_*^p]}{\varepsilon_0(1 + \rho I_*^p)} - \frac{I_*}{1 + \rho I_*^p} & -\frac{I_*}{1 + \rho I_*} & \frac{I_*}{1 + \rho I_*} \\ \varepsilon_0 & -\delta & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & -1 & 0 \\ 0 & -d_2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

则 J_* 的特征方程为

$$(\lambda + 1) [\lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3] = 0. \quad (2.7)$$

其中 $a_1 = 1 + m + \delta + \frac{I_*}{1 + \rho I_*^p} > 0$, $a_2 = (m + \delta) \left(1 + \frac{I_*}{1 + \rho I_*^p} + \frac{p \rho m \delta I_*^p}{1 + \rho I_*^p} \right) > 0$, $a_3 = \frac{m \delta I_* (1 + p \rho I_*^{p-1})}{1 + \rho I_*^p}$. 则 $a_1 a_2 - a_3 > 0$.

因此由 Routh-Hurwitz 条件可得若 $R_0 > 1$ 且 $\theta = 1$ 时, P_* 是局部渐进稳定的。

3. 地方性平衡点的全局稳定性

考虑如下系统:

$$x'(t) = f(t, x) \quad (3.1)$$

$$y'(t) = y(t) \quad (3.2)$$

其中 f 和 g 为连续的且在 $x \in R^n$ 为满足局部 Lipschitz, 对所有正时间解均存在。若对所有 $x \in R^n$ 时, 当 $t \rightarrow +\infty$, 有 $f(t, x) \rightarrow g(x)$, 则系统(3.1)是与极限系统(3.2)相关的渐进自治系统。

引理 3.1^[7]: 令 e 为系统(3.2)的一个局部渐进稳定平衡点, ω 是系统(3.1)的一个正向有界解 $x(t)$ 的 ω -极限集。若 ω 包含一个点 y_0 , 使得系统(3.2)的解满足 $y(0) = y_0$ 时, 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $y(t)$ 收敛于 e , 则 $\omega = e$, 即当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $x(t) \rightarrow e$ 。

推论 3.2: 若系统(3.1)的解是有界的且系统(3.2)的平衡点 e 是全局渐进稳定的, 则系统(3.1)的任意解 $x(t)$ 满足当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $x(t) \rightarrow e$ 。

下面我们先考虑系统(1.1)的极限系统, 由 $\frac{A}{d_2 + 1} \leq \liminf_{t \rightarrow +\infty} N(t) \leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} N(t) \leq A$, 因此如下系统等价于系(1.1)的极限系统为

$$\begin{cases} S'(t) = A - S(t) - \frac{S(t)I(t)}{I + \rho I^p(t)} + \eta(A - S(t) - E(t) - I(t)) \\ \quad = \theta A - \theta S(t) - \eta E(t) - \eta I(t) - \frac{S(t)I(t)}{I + \rho I^p(t)} \\ E(t) = \frac{S(t)I(t)}{I + \rho I^p(t)} - mE(t) \\ I'(t) = \varepsilon_0 E(t) - \delta I(t) \end{cases} \quad (3.3)$$

由[4]得集合 $T_1 = \{(S, E, I) \in R_+^3 : 0 \leq S + E + I \leq A\}$ 是与系统(3.1)相关的正不变集。故系统(3.3)是有界系统。

注记 3.3: d_1 为确定的常数, $N(t)$ 趋于某个常数, 系统(1.1)均可化为一个类似于(3.3)的极限系统, 为了计算方便, 我们设 $d_1 = 0$, 此时的因病死亡率为零, 疾病不影响死亡率, 此时 $d_2 = 0$ 此时方程(1.1)中第三个方程为 $I'(t) = \varepsilon E(t) - (d + k)I(t)$, 此时得到 $\dot{N}(t) = A - N(t)$, 则 $N(t) = A - (A - N(t_0))e^{-(t-t_0)}$, 可推出

$\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = A - (A - N(t_0))e^{-\infty} = A$ 。由于 t_0 输入的人口数为常数 A , 故 $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = A$, 故此时系统(1.1)的极限系统为系统(3.3)。

由推论 3.2 知证明 P_* 只的全局稳定性的充分条件, 就是证明平衡点 θ_* 在 T_1 内的全局渐近稳定性的充分条件。

定理 3.4: 当且仅当 $R_0 > 1$ 时, 系统(3.1)在 T_1 的内部是一致持续的。

证明: 由定理 2.2 可得到当 $R_0 < 1$ 时, P_0 是全局渐近稳定的, 排除了持续性的任何可能, 由[11]中定理 4.3 得到 $R_0 > 1$ 是一致持续的充分条件。当 $R_0 > 1$ 时, 令 $X = R^3$ 且 $E = T_1$, 系统(2.2)满足[11]中定理 4.3 的所有条件。在边界集 ∂T_1 上的最大不变集是点集 $\{P_0\}$ 且是孤立的。因此对系统(3.1), [11]中的假设的 (H_1) 成立。[11]中的定理 4.3 的一致持续的充分必要条件等价于 P_0 是不稳定的。当且仅当 $R_0 > 1$ 时 P_0 是不稳定的, 故系统(3.1)在 T_1 内是一致持续的。

注记 3.5: 系统(3.3)在有界集 $\overset{\circ}{T}_1$ 内中的一致持续性等价于系统(3.3)在 $\overset{\circ}{T}_1$ 内部中存在一个紧吸引子集 $\Gamma \subset \overset{\circ}{T}_1$ 。

定理 3.6: 若 $R_0 > 1$, 则 θ_* 在 $\overset{\circ}{T}_1$ 内是全局渐近稳定的。

证明: 令 $P(S, E, I) = \text{diag}(1, E/I, E/I)$, 则 P 是 C^1 且在 $\overset{\circ}{T}_1$ 内是非奇异的。令 f 代表系统(3.3)的向量域, 则 $P_f P^{-1} = \text{diag}(1, \dot{E}/E - \dot{I}/I, \dot{E}/E - \dot{I}/I)$ 。系统(3.3)一般解 $x(t) = (S(t), E(t), I(t))$ 的 Jacobian 矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} -\theta - \frac{I}{1 + \rho I^p} & -\eta & -\eta - \frac{S(1 - \rho p I^p)}{(1 + \rho I^2)^2} \\ \frac{I}{1 + \rho I^p} & -m & \frac{S(1 - \rho p I^p)}{(1 + \rho I^2)^2} \\ 0 & \varepsilon_0 & -\delta \end{pmatrix}$$

则矩阵 $B = P J^{[2]} P^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$, 其中 $B_{11} = -\theta - m - \frac{I}{1 + \rho I^p}$, $B_{12} = \left(\frac{I}{E} \frac{S(1 - \rho p I^p)}{(1 + \rho I^2)^2} \frac{I}{E} \left(\eta + \frac{S(1 - \rho p I^p)}{(1 + \rho I^2)^2} \right) \right)$ 。

$$B_{21} = \begin{pmatrix} \frac{E \varepsilon_0}{I} \\ I \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_{22} = \begin{pmatrix} \frac{\dot{E}}{E} - \frac{\dot{I}}{I} - \theta - \delta - \frac{I}{1 + \rho I^p} & -\eta \\ \frac{I}{1 + \rho I^p} & \frac{\dot{E}}{E} - \frac{\dot{I}}{I} - m - \delta \end{pmatrix}.$$

令 (u, v, w) 是 R^3 中的一个向量, 我们定义在 R^3 中的向量模为 $|(u, v, w)| = \max\{|u|, |v| + |w|\}$ 。令 μ 为这个模的 Lozinskiĭ, 令

$$\mu(B) \leq \max\{g_1, g_2\}. \tag{3.4}$$

其中 $g_1 = \mu_1(B_{11}) + |B_{12}|$, $g_2 = |B_{21}| + \mu_1(B_{22})$, $|B_{21}|$ 和 $|B_{12}|$ 为 L^1 模下的 Lozinskiĭ 测量值。则由上可得

$$\mu_1(B_{11}) = -\theta - m - \frac{I}{1 + \rho I^p}, \quad \mu_1(B_{22}) = \frac{\dot{E}}{E} - \frac{\dot{I}}{I} - \theta - \delta, \quad |B_{21}| = \frac{E \varepsilon_0}{I},$$

$$|B_{12}| = \frac{I}{E} \frac{S(1 - \rho p I^p)}{(1 + \rho I^2)^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\eta(1 + \rho I^2)^2}{S(1 - \rho p I^p)} + 1 \right)^2}.$$

因此

$$g_1 < g_2 \tag{3.5}$$

由(3.4)和(3.5)可得 $\mu(B) \leq \frac{\dot{E}}{E} - \theta$ 。由于满足初始条件 $x_0 = (S(t), E(t), I(t)) \in \Gamma$ (吸引集)的系统(3.1)的每一个

解 $x(t) = (S(t), E(t), I(t))$, 我们均可得: $\frac{1}{t} \int_0^t \mu(B) ds \leq \frac{1}{t} \int_0^t \left(\frac{\dot{E}}{E} - \theta \right) ds = \frac{1}{t} \ln \frac{E(t)}{E(0)} - \theta$ 。可推得:

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \sup_{x_0 \in \Gamma} \frac{1}{t} \int_0^t \mu(B(x(s, x_0))) ds \leq -\frac{\theta}{2} < 0.$$

故可得 θ_* 是全局稳定的。由推论 3.2 和定理 3.6, 我们可得到:

定理 3.7: 若 $R_0 > 1$, 则系统(2.1)的地方性平衡点 P_* 是在 $\overset{\circ}{T}_1$ 内是全局渐近稳定的。

注 3.8: 当 $\theta \neq 1$ 时, 本文没有证明其地方性平衡点的局部渐近稳定性, 这可作为下一步的研究。

参考文献 (References)

- [1] W. M. Liu, S. A. Lein and Y. Lwasa. Influence of nonlinear incidence rates upon the behavior of SIRS epidemiological models. *Journal of Mathematical Biology*, 1986, 23(2): 187-204.
- [2] W. R. Derrick, P. den van Driessche. A disease transmission model in a nonconstant population. *Journal of Mathematical Biology*, 1993, 31(5): 495-512.
- [3] R. Xu, Z. E. Ma. Global stability of a SIR epidemic model with nonlinear incidence rate and time delay. *Nonlinear Analysis: Real World Application*, 2009, 10(5): 3175-3189.
- [4] L. J. Chen. Global stability of a SEIR epidemic model with nonmonotone incidence rate. *Journal of Biomathematics*, 2009, 24: 591-598.
- [5] H. F. Huo, Z. P. Ma. Dynamics of a delayed epidemic model with nonmonotonic incidence rate. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2010, 15: 459-468.
- [6] C. J. Sun, Y. P. Lin and S. P. Tang. Global stability for a special SEIR epidemic model with nonlinear incidence rates. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2007, 33(1): 290-297.
- [7] H. R. Thieme. Convergence results and a Poincaré-Bendixson trichotomy for asymptotically autonomous differential equations. *Journal of Mathematical Biology*, 1992, 30(7): 755-763.
- [8] 马知恩, 周义仓, 王稳地, 靳祯. 传染病动力学的数学建模与研究[M]. 北京: 科学出版社, 2006.
- [9] 路征一, 周义仓. 数学生物学进展[M]. 北京: 科学出版社, 2006.
- [10] 路征一, 王稳地. 生物数学前沿[M]. 北京: 科学出版社, 2008.
- [11] H. R. Freedman, S. G. Ruan and M. X. Tang. Uniform persistence and flows near a closed positively invariant set. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 1994, 6(4): 583-600.