

A New Inverse Problem of Thickness Design for Bi-Layer Textile Material

Xiangjie Li

Department of Mathematics, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou
Email: 18737033838@126.com

Received Mar. 4th, 2013; revised Mar. 16th, 2013; accepted Mar. 28th, 2013

Copyright © 2013 Xiangjie Li. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

Abstract: This paper studies a new inverse problem of estimating bi-layer textile fabrics thickness based on a steady-state heat and moisture transfer model. We first present a heat and moisture transfer model for bi-layer textile materials with boundary conditions and solve them by finite difference method. According to the requirement of clothing's thermal and moisture comfort, we formulate the inverse heat and moisture transfer problem that estimate the thickness of inner fabric as a minimum norm problem with a maximum probability constraint model. We use a static penalty method to convert the constrained problem into an equivalent unconstrained minimization problem and obtain the solution for the optimization problem by a stochastic search method, known as particle swarm optimization algorithm. Numerical experiments show that our new model is quiet acceptable, and the proposed numerical method's validity and robustness.

Keywords: Bi-Layer Textiles; Thickness Design; Heat and Moisture Transfer; Inverse Problem; A Minimum Norm with a Maximum Probability

一类新的双层纺织材料厚度设计反问题

李向杰

浙江理工大学数学系, 杭州
Email: 18737033838@126.com

收稿日期: 2013年3月4日; 修回日期: 2013年3月16日; 录用日期: 2013年3月28日

摘要: 本文基于低温环境下平行圆柱孔结构的纺织材料热湿传递稳态模型, 研究了一类双层纺织材料厚度设计反问题。首先给出了一个双层纺织材料热湿传递稳态模型, 并采用有限差分方法求解该问题。然后, 根据服装热湿舒适性指标, 将纺织材料内层厚度看成一个未知量, 提出了一类双层纺织材料厚度设计反问题, 将该反问题归结为一个最大概率最小模问题, 采用罚函数法将该约束优化问题转换为无约束的优化问题, 并采用粒子群算法求解。数值结果说明了双层纺织材料厚度设计反问题提法的合理性, 以及粒子群算法的有效性和鲁棒性。

关键词: 双层纺织材料; 厚度设计; 热湿传递; 反问题; 最大概率最小模

1. 引言

织物热湿传递研究是功能性服装设计中的一个重要课题, 功能性服装设计是基于纺织材料热湿传递特征, 根据纺织材料的热湿舒适性要求, 进行功能纺织材料的设计与选择, 如易吸湿材料、在极冷环境下高保温材料、在极热环境下高透气材料。

纺织材料热湿传递正问题是给定材料的类型、厚度和结构，研究该材料的热湿舒适性，透风性，保暖性等。近几十年来，国内外学者对纺织材料热湿传递模型的理论 and 计算的研究不断深入，目前有热阻模型^[1]，湿阻模型^[2,3]，热阻和湿阻的混合模型^[4,5]以及热湿耦合模型^[6,7]等。反问题指通过测量数据，根据保暖透汗的要求给出热湿舒适性在数学上的控制条件，决定材料的结构、类型、厚度或者同时决定类型和厚度。通过反问题的理论与方法研究纺织材料设计，可以为纺织材料设计试验和产品研发提供理论依据和科学依据，预测并指导纺织材料和衣着装备设计的试验。国内外关于这类反问题的研究结果^[8,9]很少。

本文将纺织材料内层厚度看成一个未知量，研究了一类双层纺织材料厚度设计反问题，并用粒子群算法求解。在文献[9]的基础上，本文主要做出了两方面的改进：第一在文献[9]中提出的反问题在数学上可归结为一个最小二乘问题，文中采用皮肤处相对湿度值 0.5 来作为衡量舒适性指标的参考值，而该相对湿度值在 0.4 至 0.6 的区间内都是舒适的，本文根据皮肤处相对湿度值落在该区间概率最大的思想，把内层织物厚度设计反问题归结为一个最大概率最小模问题，使得反问题更符合实际情况。第二本文提出的最大概率最小模模型可能不连续，因此不采用文献[9]中的 Hooke-Jeeves 算法进行求解，该算法具有局部收敛性，对初值的依赖性比较大，本文采用粒子群算法求解，粒子群算法是一种随机的智能算法，具有全局收敛性，能得到一个全局最优解。

本文结构如下：首先提出双层纺织材料热湿传递模型并使用有限差分法求解；在第二节中根据双层纺织材料热湿传递模型提出了双层纺织材料厚度设计反问题，并将该反问题转化为一类最大概率最小模问题；第三节给出了求解此问题的粒子群算法，数值实验结果显示了算法的有效性，以及对微小扰动数据的稳定性，最后给出了本文的结论。

2. 双层纺织材料设计正问题

本节给出了双层纺织材料厚度设计正问题以及数值求解过程。

2.1. 双层纺织材料热湿传递模型

图 1 为“人体 - 衣服 - 环境”示意图，衣服由两层不同材料组成，衣服总厚度为 L ，织物内层与人体之间的空气构成一个微气候区外层在稳定的外界环境中。

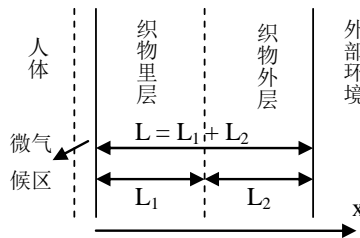


Figure 1. “Human body-clothes-environment” system
图 1. “人体 - 衣服 - 环境”系统

本文采用文献[9]中的织物热湿传递稳态模型，并给出如下假设：1) 各纺织品各向同性；2) 不考虑温度和湿度的变化对纺织材料形状的改变；3) 纺织品空隙形态结构采用“平行圆柱孔模型”；4) 假设纺织品对环境的吸湿和放湿忽略不计。

对于服装内层有如下稳态热湿传递模型

$$\begin{cases} k_1 \frac{\varepsilon_1(x) \cdot r_1(x)}{\tau_1(x)} \cdot \frac{p_v}{T^{3/2}} \cdot \frac{dp_v}{dx} + m_v = 0, \frac{dm_v}{dx} + \Gamma_1(x) = 0, \\ \kappa_1 \frac{d^2 T}{dx^2} + \lambda \Gamma_1(x) = 0, \Gamma_1(x) = -k_2 \frac{\varepsilon_1(x) \cdot r_1(x)}{\tau_1(x)} (p_{\text{sat}}(T) - p_v(x)) \frac{1}{\sqrt{T}}. \end{cases} \quad (1)$$

其中： $0 < x < L_1$ 满足的边界条件为：

$$T(0) = T_0 \quad (2)$$

对于外层有如下稳态热湿传递模型

$$\begin{cases} k'_1 \frac{\varepsilon_2(x) \cdot r_2(x)}{\tau_2(x)} \cdot \frac{p_v}{T^{3/2}} \cdot \frac{dp_v}{dx} + m_v = 0, \\ \frac{dm_v}{dx} + \Gamma_2(x) = 0, \\ \kappa_2 \frac{d^2 T}{dx^2} + \lambda \Gamma_2(x) = 0, \\ \Gamma_2(x) = -k'_2 \frac{\varepsilon_2(x) \cdot r_2(x)}{\tau_2(x)} (p_{\text{sat}}(T) - p_v(x)) \frac{1}{\sqrt{T}} \end{cases} \quad (3)$$

其中： $L_1 < x < L = L_1 + L_2$ 并且满足下面边界条件

$$\begin{cases} T(L) = T_R, \\ T'(L) = \frac{T_e - T(L)}{\kappa_2(R_t + 1/h_t)}, \\ m_v(L) = m_{v,R}, \\ p_v(L) = P_{v,R}. \end{cases} \quad (4)$$

其中 $T(x)$ 为纺织材料的温度 (K)； $p_v(x)$ 为水蒸气压力 (Pa)； $m_v(x)$ 为水蒸气质量通量 ($\text{kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$)； $\Gamma(x)$ 为水蒸气凝结率 ($\text{kg}/(\text{m}^3 \cdot \text{s})$)； $r_1(x), r_2(x)$ 为纤维的孔半径 (m)； $\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x)$ 为纤维的孔隙率 (%)； $\tau_1(x), \tau_2(x)$ 为纤维孔的曲折系数； λ 为水蒸气吸收凝结热 (J/kg)； κ_1, κ_2 分别为内外织物的热传导系数 ($\text{w}/(\text{m} \cdot \text{K})$)； R_t 表示外层织物的热阻 ($\text{K} \cdot \text{m}^2/\text{w}$)； h_t 表示织物外层表面和环境之间的对流传热系数 ($\text{w}/(\text{K} \cdot \text{m}^2)$)； k_1, k_2, k'_1, k'_2 是与分子质量和气体常数有关的常数； T_0, T_R 分别是人体表面与织物内层的边界温度和外界环境与织物外层的边界温度； T_e 为外界环境的温度； $m_{v,R}$ 表示织物外层与外界环境边界处的水蒸气质量通量； $P_{v,R}$ 表示织物外层与外界环境边界处水蒸气压力； $p_{\text{sat}}(T)$ 是水蒸气压力。

已知常微分方程组(1)和(3)以及边界条件(2)和(4)求纺织物内部的温度和湿度分布称为双层纺织材料热湿传递正问题。

2.2. 双层纺织材料热湿传递正问题的数值求解

下面利用有限差分方法对正问题进行求解，对外层织物将方程组(3)解耦，得到如下两点边值问题

$$\begin{cases} \sqrt{T} \frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{k'_2}{k'_3} A_2(x) (p_{\text{sat}}(T(x)) - p_v(x)), \\ T(L) = T_R, T'(L) = \frac{T_e - T(L)}{\kappa_2(R_t + 1/h_t)}. \end{cases} \quad (5)$$

其中 $L_1 < x < L$ ， $A_2(x) = \frac{\varepsilon_2(x) \cdot r_2(x)}{\tau_2(x)}$ ， $k'_3 = \frac{\kappa_2}{\lambda}$ ， $m_v = -k'_3 \frac{dT}{dx} + C_2$ ， $p_v = \sqrt{\int_x^L \frac{2 \cdot T^{3/2}(s)}{k'_1 A_2(s)} (k'_3 T'(s) + C_2) ds + p_{v,R}^2}$ ，

$$C_2 = m_{v,R} - k'_3 \frac{T_e - T_R}{\kappa_2(R_t + 1/h_t)}。$$

将外层区间 N 等分，令 $h_2 = \frac{L_2}{N}$ ，利用有限差分方法对(5)中方程进行离散处理，当 $i = 2, 3, \dots, N-1$ 有

$$\sqrt{T_i} \frac{T_i - 2T_{i-1} + T_{i-2}}{h_2^2} = \frac{k'_2}{k'_3} A_2(x_i) \times \left[p_{\text{sat}}(T_i) - \sqrt{p_{v,R}^2 + 2 \sum_{j=i}^{N-1} \frac{T_j^{3/2}}{k'_2 A_2(x_j)} \left[k'_3 \frac{T_{j+1} - T_j}{h_2} + C_2 \right] h_2} \right] \quad (6)$$

当 $i = N$ 时,

$$\sqrt{T_N} \frac{T_N - 2T_{N-1} + T_{N-2}}{h_2^2} = \frac{k'_3}{k'_2} A_2(x_N) [p_{\text{sat}}(T_N) - p_{v,R}]. \quad (7)$$

对于 $i = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1$, 则有

$$p_{v,i} = \sqrt{p_{v,i}^2 + 2 \sum_{j=i}^{N-1} \frac{T_j^{3/2}}{k'_2 A_2(x_j)} \left[k'_3 \frac{T_{j+1} - T_j}{h_2} + C_2 \right] h_2}, \quad (8)$$

$$m_{v,i} = k_4 \frac{T_{i+1} - T_i}{h_2} + C_2. \quad (9)$$

由 $\frac{T_N - T_{N-1}}{h_2} = T'(x_N)$, 得 T_{N-1} 。由(6)和(7)依次求得 T_{N-2}, \dots, T_1, T_0 ; 再由(8)和(9)式, 可得 $p_{v,N-1}, \dots, p_{v,1}, p_{v,0}$ 和 $m_{v,N-1}, \dots, m_{v,1}, m_{v,0}$, 从而得到织物内层和织物外层边界处的温度 T_0 , 水蒸气压力 $p_{v,0}$, 以及水蒸气的质量通量 $m_{v,0}$ 。令

$$T_{L_1} = T(L_1) = T_0, p_{v,L_1} = p_v(L_1) = p_{v,0}, m_{v,L_1} = m_v(L_1) = m_{v,0}.$$

对内层织物的热湿传递方程进行解耦得到如下两点边值问题

$$\begin{cases} \sqrt{T} \frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{k_2}{k_3} A_1(x) (p_{\text{sat}}(T(x)) - p_v(x)), \\ T(L_1) = T_{L_1}, T(0) = T_0^1. \end{cases} \quad (10)$$

其中 $0 < x < L_1, A_1(x) = \frac{\varepsilon_1(x) \cdot r_1(x)}{\tau_1(x)}$,

$$\begin{aligned} k_3 &= \frac{\kappa_1}{\lambda}, m_v = k_3 \frac{dT}{dx} + C_1, C_1 = m_{v,L_1} - k_3 T(x) \Big|_{x=L_1} \\ p_v &= \sqrt{\int_x^{L_1} \frac{2 \cdot T^{3/2}(s)}{k_1 A_1(s)} (k_3 T'(s) + C_1) ds + p_{v,L_1}^2}, \end{aligned} \quad (11)$$

将外层区间 M 等分, 令 $h_2 = \frac{L_1}{M}$, 用有限差分方法对方程(10)进行离散化处理, 当 $i = 2, 3, \dots, M-1$ 时有

$$\sqrt{T_i} \frac{T_i - 2T_{i-1} + T_{i-2}}{h_1^2} = \frac{k_2}{k_3} A_1(x_i) \times \left[p_{\text{sat}}(T_i) - \sqrt{p_{v,R}^2 + 2 \sum_{j=i}^{M-1} \frac{T_j^{3/2}}{k_2 A_1(x_j)} \left[k_3 \frac{T_{j+1} - T_j}{h_1} + C_1^* \right] h_1} \right].$$

当 $i = M$ 时,

$$\sqrt{T_M} \frac{T_M - 2T_{M-1} + T_{M-2}}{h_1^2} = \frac{k_3}{k_2} A_1(x_M) [p_{\text{sat}}(T_M) - p_{v,R}].$$

当 $i = 2, 3, \dots, M-1$ 时有

$$p_{v,i} = \sqrt{p_{v,i}^2 + 2 \sum_{j=i}^{M-1} \frac{T_j^{3/2}}{k_2 A_1(x_j)} \left[k_3 \frac{T_{j+1} - T_j}{h_1} + C_1^* \right] h_1}.$$

其中 $C_1^* = m_{v,L_1} - k_3 \frac{T_M - T_{M-1}}{h_1}$ 。

根据边界条件 $T(0) = T_0, T_{L_1} = T_M = T(x_M)$ 则可由插值方法分别得到 T_1, T_{M-1} , 从而可以得到 T_{M-2}, \dots, T_3, T_2 进而求得织物内层与人体表面处的相对湿度表达式为:

$$RH_0 = \frac{p_{v,0}}{p_{\text{sat}}(T_0)} = \frac{\sqrt{p_{v,L_1}^2 + 2 \sum_{j=0}^{M-1} \frac{T_j^{3/2}}{k_2 A_1(x_j)} \left[k_3 \frac{T_{j+1} - T_j}{h_2} + C_1^* \right] h_1}}{100 \exp \left(18.956 - \frac{4030}{(T - 273.16) + 235} \right)}$$

3. 双层纺织材料的厚度设计反问题及数值求解

3.1. 双层纺织材料厚度设计反问题的提出

衣服内侧至皮肤表面间服装微气候区的最舒适条件可表述为温度、湿度和气流速度的组合^[10]: $(32 \pm 1)^\circ\text{C}$, 相对湿度为 $50\% \pm 10\%$, 气流速度为 $(0.25 \pm 0.15) \text{ m/s}$ 。下面考虑纺织材料厚度设计反问题: 在环境温度 - 湿度组合 $(T, RH) \in [T_{\min}, T_{\max}] \times [RH_{\min}, RH_{\max}]$ 下, 已知织物的材料结构类型(即导热系数 κ)以及外层织物厚度, 根据皮肤处相对湿度值落在 $40\% \sim 60\%$ 区间的概率最大来决定内层织物的厚度 L_1 。其中 T_{\min}, T_{\max} 分别为某地某时间段最低日平均温度, 最高日平均温度; RH_{\min}, RH_{\max} 分别表示某地某时间段的最低日平均相对湿度, 最高日平均相对湿度。

3.2. 双层纺织材料厚度设计反问题的最大概率最小模模型

根据以上反问题的描述, 将环境温度 - 湿度组合离散为

$$(T_i, RH_j) \in [T_{\min}, T_{\max}] \times [RH_{\min}, RH_{\max}], (i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m).$$

$RH_{i,j,0}$ 是通过求解相应的正问题而得到内层织物与皮肤处的相对湿度。假设 $0 \leq \text{Pr}(L_1) \leq 1$ 为 $40\% \leq RH_{i,j,0} \leq 60\%$ 的概率, 于是上述反问题转化为下面的最大概率最小模模型 $\min L_1 \text{ s.t. } \text{Pr}(L_1) = 1$ 。

采用罚函数法将上述带有约束条件优化问题, 转化为下面的无约束条件优化问题,

$$\min g = L_1 + (1 - \text{Pr}(L_1)) \times K.$$

K 为一个很大的正数。该优化模型可能不连续, 采用不依赖于初值的随机性算法求解更好。

3.3. 反问题的数值算法

本文采用粒子群算法^[11]进行求解。粒子群算法的计算步骤如下:

Step 1: 初始化最小误差 ε 以及最大迭代次数 N , 每个粒子的初始化位置和初始化速度

$$X_i^0 = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iD}), V_i^0 = (V_{i1}, V_{i2}, \dots, V_{iD}).$$

Step 2: 根据目标函数 g 计算每个粒子的适应度值 $g(X_i^0)$, 找出个体极值 P^0 , 找出群体极值 P_g^0 。

Step 3: $k = k + 1$, 根据下面公式更新速度, 和位置

$$V_{id}^{k+1} = \omega V_{id}^k + c_1 v_1 (P_{id}^k - x_{id}^k) + c_2 r_2 (P_{gd}^k - x_{id}^k),$$

$$x_{id}^{k+1} = x_{id}^k + \alpha V_{id}^{k+1}.$$

其中, ω 表示惯性权重, $d = 1, 2, \dots, D; i = 1, 2, \dots, n$; k 为迭代次数; V_{id} 为粒子的速度; c_1, c_2 为非负的常数, 为加速因子; r_1, r_2 是分布于 $[0, 1]$ 的随机数; α 是约束因子, 目的是控制速度的权重。

Step 4: 计算更新后的适应度值 $g(X_i^k)$, 更新个体极值 P^k 和群体极值 P_g^k 。如果 $(P_g^{k-1} - P_g^k) / |P_g^k| \geq \varepsilon$ 且 $k < N$, 转 Step3; 否则计算结束。

3.4. 数值实例

下面我们给出几个数值实验结果来验证上述双层纺织材料厚度设计反问题提法的合理性及算法的有效性。假定人体的初始温度 $T_0 = 305.17 \text{ K}$, 外层织物的厚度 $L_2 = 0.002 \text{ m}$, 外层织物的表面水蒸气质量通量 $m_{v,R} = 2.7 \times 10^{-5}$, 参数 $k_1 = 0.00005$, $k_2 = 0.00010$, $k'_1 = 0.00006$, $k'_2 = 0.00007$ 。当温度低于 0°C 时, 凝结热 $\lambda = 2593 \text{ kJ/kg}$; 当温度高于 0°C 时, 凝结热 $\lambda = 2260 \text{ kJ/kg}$; 将区间 $[T_{\min}, T_{\max}]$ 和 $[RH_{\min}, RH_{\max}]$ 分别 50 等分, 粒子群算法的粒子规模为 20, 最大迭代次数为 100 次, 惯性权重 $\omega = 0.7289$, 学习因子 $c_1 = c_2 = 1.4692$ 。

下面考察如下三种材料组合在两组不同温度和湿度组合下的厚度设计反问题, 各种材料的结构参数和类型参数见[9]。

材料 1: 外层材料为聚丙烯, 内层为羊毛;

材料 2: 外层材料为涤纶, 内层为羊毛;

材料 3: 外层材料为羊毛, 内层为涤纶。

情况 1: 当环境温度 $T_{\min} = 0^\circ\text{C}$, $T_{\max} = 15^\circ\text{C}$, 相对湿度为 $RH_{\min} = 30\%$, $RH_{\max} = 85\%$, 不同类型材料的 $\text{Pr}(L_1)$ 概率图如图 2~图 4 所示:

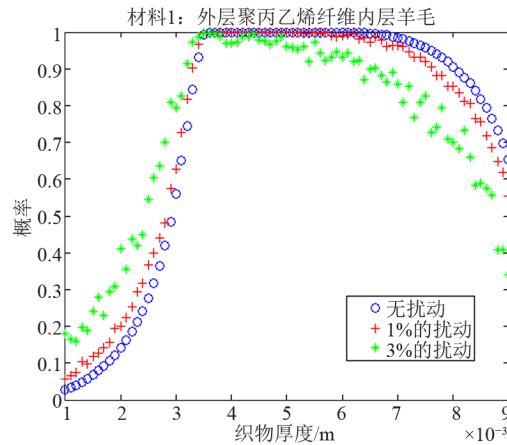


Figure 2. The probability graph of material 1
图 2. 材料 1 的概率图

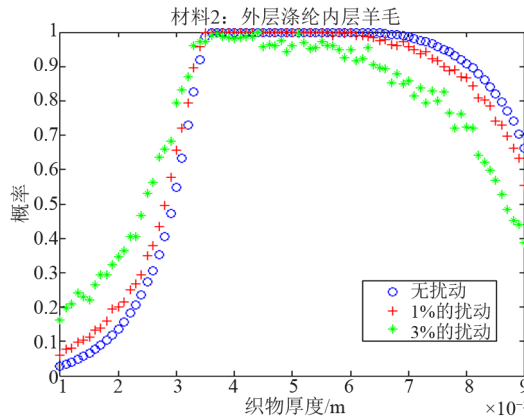


Figure 3. The probability graph of material 2
图 3. 材料 2 的概率图

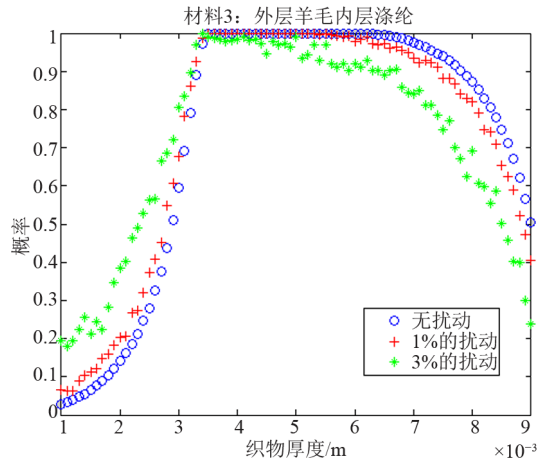


Figure 4. The probability graph of material 3
图 4. 材料 3 的概率图

情况 2: 当环境温度 $T_{\min} = -15^{\circ}\text{C}$, $T_{\max} = 0^{\circ}\text{C}$, 相对湿度 $RH_{\min} = 40\%$, $RH_{\max} = 90\%$, 不同类型材料的 $\text{Pr}(L_1)$ 概率图如图 5~图 7 所示:

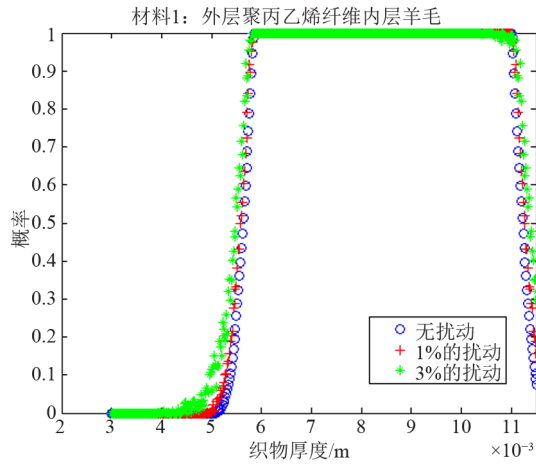


Figure 5. The probability graph of material 1
图 5. 材料 1 的概率图

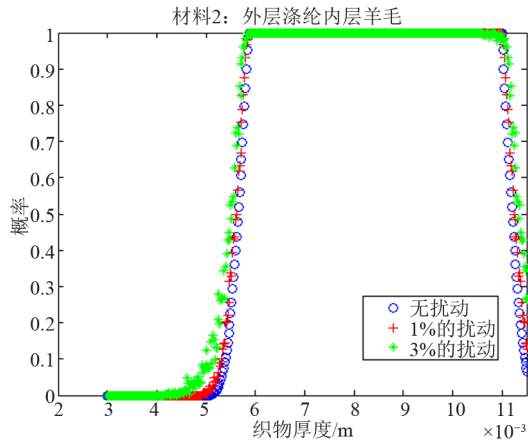


Figure 6. The probability graph of material 2
图 6. 材料 2 的概率图

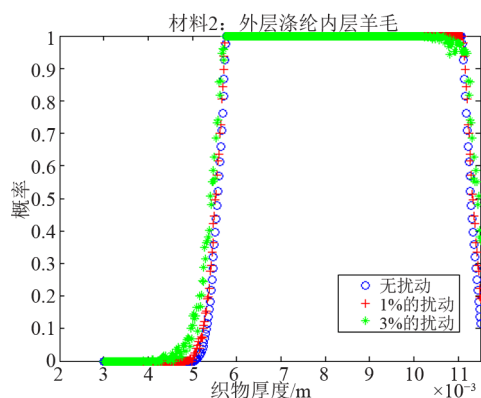


Figure 7. The probability graph of material 3
图 7. 材料 3 的概率图

从上面的图中可得，在两组不同的温度 - 湿度组合下确实存在最小的织物厚度使得落在舒适度区间的概率最大且能达到 1。利用粒子群算法分别计算情况 1 和情况 2 的三种类型的厚度，结果见表 1 和表 2。

Table 1. The numerical results for the three materials: case 1
表 1. 情况 1 的三种类型材料的数值结果

随机扰动%	服装厚度(毫米)/mm		
	材料 1	材料 2	材料 3
$\delta = 0$	3.540	3.561	3.483
$\delta = 1$	3.521	3.523	3.461
$\delta = 3$	3.190	3.244	3.361

Table 2. The numerical results for the three materials: case 2
表 2. 情况 2 的三种类型材料的数值结果

随机扰动%	服装厚度(毫米)/mm		
	材料 1	材料 2	材料 3
$\delta = 0$	3.866	3.887	3.785
$\delta = 1$	3.842	3.863	3.761
$\delta = 3$	3.821	3.847	3.680

4. 结论

本文研究了稳态热湿传递模型下双层织物材料的类型设计反问题。首先我们使用有限差分来求解相应的正问题；其次将反问题归结为最大概率最小模问题，数值结果显示，在一定气候下，着装的厚度在一定范围内都可以满足织物热湿传递舒适性，而取厚度最小是合理的，数值结果表明我们的反问题的构造是合理的。通过对结果的分析可以得到粒子群算法能用来求解纺织类型设计反问题，对微小的扰动结果是稳定的。基于纺织材料动态热湿传递模型来设计反问题将是下一步的研究方向。

参考文献 (References)

- [1] A. P. Gagge, A. C. Burton and H. C. Bazett. A practical system of units for the description of the heat exchange of man with his environment.

- Science, 1941, 94(2445): 428-430.
- [2] A. H. Woodcock. Moisture transfer in textile systems, Part I. Textile Research Journal, 1962, 32(8): 628-633.
 - [3] A. H. Woodcock. Moisture transfer in textile systems, Part II. Textile Research Journal, 1962, 32(9): 719-723.
 - [4] B. Farnworth. A numerical model of the combined diffusion of heat and water vapor through clothing. Textile Research Journal, 1986, 56(11): 635-665.
 - [5] W. A. Lotens, G. Havenith. Calculation of clothing insulation and vapor resistance. Ergonomics, 1991, 34(2): 233-254.
 - [6] P. S. H. Henry. Diffusion in absorbing media. Proceedings of the Royal Society A, 1939, 171(2): 215-241.
 - [7] J. T. Fan, X. Y. Cheng and Y. S. Chen. An experimental investigation of moisture absorption and condensation in fibrous insulations under low temperature. Experimental Thermal and Fluid Science, 2003, 27(6): 723-729.
 - [8] D. H. Xu, J. X. Cheng and X. H. Zhou. An inverse problem of thickness design for single layer textile material under low temperature. Journal of Math-for-Industry, 2010, 2(B-4): 139-146.
 - [9] D. H. Xu, J. X. Cheng and Y. B. Chen. An inverse problem of thickness design for bilayer textile materials under low temperature. Journal of Physics: Conference Series, 2011, 290(1): 139-146.
 - [10] 黄建华. 服装的舒适性[M]. 北京: 科学出版社, 2008: 25-26, 48.
 - [11] 卓金武, 魏永生, 秦健, 李必文. MATLAB 在数学建模中的应用[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2011.