

A POD-Based Reduced-Order Extrapolating Finite Element Formulation for Parabolic Equations*

Fei Teng¹, Ping Sun², Zhendong Luo^{3#}

¹School of Mathematical Sciences, Kaili College, Kaili

²School of Mathematics and Computer Science, Guizhou Normal University, Guiyang

³School of Mathematics and Physics, North China Electric Power University, Beijing
Email: tengfeikaili@126.com, sunp@gznu.edu.cn, #zhdluo@ncepu.edu.cn

Received: Apr. 16th, 2013; revised: Apr. 28th, 2013; accepted: May 10th, 2013

Copyright © 2013 Fei Teng et al. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

Abstract: A POD-based reduced-order extrapolating finite element formulation with second-order time accuracy for two-dimensional parabolic equations is established by using the proper orthogonal decomposition (POD) technique, and the algorithm implementation of error estimation and solution for POD-based reduced-order extrapolating finite element formulation is provided. Finally, a numerical example is used to verify the feasibility and efficiency of the POD-based reduced-order extrapolating finite element formulation method.

Keywords: Proper Orthogonal Decomposition (POD) Technique; Reduced-Order Extrapolating Finite Element Formulation; Error Estimate

抛物方程基于 POD 的降阶外推有限元格式*

腾 飞¹, 孙 萍², 罗振东^{3#}

¹凯里学院数学科学学院, 凯里

²贵州师范大学数学与计算机科学学院, 贵阳

³华北电力大学数理学院, 北京

Email: tengfeikaili@126.com, sunp@gznu.edu.cn, #zhdluo@ncepu.edu.cn

收稿日期: 2013 年 4 月 16 日; 修回日期: 2013 年 4 月 28 日; 录用日期: 2013 年 5 月 10 日

摘 要: 用特征投影分解(Proper Orthogonal Decomposition, 简记 POD)方法去建立二维抛物方程的一种基于 POD 的时间二阶精度的降阶外推有限元格式; 并给出误差估计和求解这种降阶外推有限元格式的算法实现。最后用数值例子验证这种基于 POD 方法降阶外推有限元格式的可行性和有效性。

关键词: 特征投影分解方法; 降阶外推有限元格式; 误差估计

1. 引言

设 $\Omega \subset R^2$ 是有界连通区域, 考虑下面的抛物方程的初边值问题:

问题 I: 求 u 满足

$$u_t - \Delta u = f, \text{ 在 } \Omega \times (0, T) \text{ 中} \quad (1.1)$$

$$u(x, y, 0) = g(x, y), \text{ 在 } \Omega \text{ 中} \quad (1.2)$$

*资助信息: 国家自然科学基金(批准号: 11271127 和 11061009)和贵州省科技计划项目(批准号: 黔科合 J 字[2011]2367)。

#通讯作者。

$$u(x, y, t) = s(x, y, t), \text{ 在 } \partial\Omega \times [0, T] \text{ 上} \quad (1.3)$$

其中, $u(x, y, x)$ 是未知函数, $f(x, y, t)$ 、 $g(x, y)$ 和 $s(x, y, t)$ 分别是已知源项、初值和函数边值, T 是总时间。为了便于理论分析而且不是一般性, 在下面的理论分析中, 我们不妨假定 $g(x, y)$ 和 $s(x, y, t)$ 都是零函数。

虽然抛物方程(1.1)~(1.3)即问题 I 是一个较简单的问题, 但是它可用来描述诸如气体的扩散、液体的渗透、热的传导等许多物理现象, 具有实际应用背景^[1]。例如, 自然环境、工程设备及生物机体中的气体的扩散、液体的渗透、热的传导以及半导体材料中杂质的扩散等许多物理现象都可用抛物方程来描述。

由于描述实际问题的抛物方程的源函数或计算域往往是很复杂的, 要想求出其精确解往往不容易, 有效的方法是求其数值解。具有二阶时间精度的 Crank-Nicolson(CN)有限元格式是求解抛物方程(1.1)~(1.3)问题 I 的高精度数值方法^[2,3]。然而, 对大型的工程问题, 抛物方程的 CN 有限元格式往往包含数以万计甚至数千万的未知量。这样, 由于计算机计算过程中截断误差的积累, 即使很好的有限元格式, 计算若干步后, 也会出现浮点溢出无法计算下去, 无法得到理想的数值解。因此, 为抛物方程建立一种保证有足够高精度, 尽可能少未知量的降阶有限元格式, 使之能减少计算过程中误差的积累, 可不断地往前计算求出所要的数值解, 这将具有重要的应用价值的工作。

特征投影分解(Proper Orthogonal Decomposition, 简记 POD)方法^[4]是一种在保证足够高精度的数值解情况下, 能极大地减少计算方法的未知量, 从而减少计算过程中的误差积累的有效降阶方法。虽然一些抛物方程基于 POD 方法的降阶格式^[4-7]已经被建立, 但是这些降阶格式都是用经典计算方法算出的经典数值解做样本(在 POD 方法中称为瞬像), 去构造 POD 基和降阶格式, 也就是用已有的解构造降阶格式验证一遍相同时段上的解, 属于重复计算。本文建立二维抛物方程的一种基于 POD 的时间二阶精度的 CN 降阶外推有限元格式, 只用最初很少已知经典 CN 有限元解去构造 POD 基和建立降阶外推有限元格式, 这种降阶外推有限元格式没有重复计算。特别是我们给出的误差估计可以作为 POD 基的选取准则, 这是对现有基于 POD 技术的降阶方法的改进和创新。

本文安排如下: 第 2 节给出抛物方程经典的具有二阶时间精度的 CN 有限元格式和一种基于 POD 的时间二阶精度的 CN 降阶外推有限元格式; 第 3 节给出误差估计及算法实现; 第 4 节给出数值例子说明这种基于 POD 的时间二阶精度的 CN 降阶外推有限元格式的可行性和有效性; 第 5 节是结论及展望。

2. 抛物方程经典的 CN 有限元格式和基于 POD 方法的降阶外推有限元格式

2.1. 抛物方程的经典 CN 有限元格式

本文用到的 Sobolev 空间^[8]都是标准的。设 $X = H_0^1(\Omega)$, 则问题 I 的变分形式为

问题 II: 求 $u \in X$ 使得对于所有的 $t \in (0, T)$ 满足

$$\begin{cases} (u_t, v) + a(u, v) = (f, v), & \forall v \in X \\ u(x, y, 0) = 0, & (x, y) \in \Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 (\cdot, \cdot) 表示 L -内积, $a(u, v) = (\nabla u, \nabla v)$ 。

变分问题 II 的解的存在唯一性是熟知的^[2,3]。为了求问题 II 的数值解, 用时间二阶精度 CN 有限元方法去离散问题 II。设 N 为正整数, 时间步长取为 $\tau = T/N$, $t_n = n\tau$ ($0 \leq n \leq N$)。再设 \mathfrak{T}_h 是 $\bar{\Omega}$ 的拟一致三角形剖分^[2,3], 则空间 X 的有限元空间可取为

$$X_h = \{v_h \in X \cap C^0(\Omega); v_h|_K \in P_m(K), \forall K \in \mathfrak{T}_h\} \quad (2.2)$$

其中 $m \geq 1$ 为整数, $P_m(K)$ 是 K 上次数不超过 m 的多项式空间。记 $u^n(x, y) = (x, y, t_n)$, 用 u_h^n 表示 u 的全离散逼近, 那么问题 II 的时间二阶精度的 CN 全离散化有限元格式为

问题 III: 求 $u_h^n \in X_h$ 满足

$$\begin{cases} 2(u_h^n, v_h) + \tau a(u_h^n, v_h) = 2(u_h^{n-1}, v_h) - \tau a(u_h^{n-1}, v_h) + \tau(f^n + f^{n-1}, v_h), & \forall v_h \in X_h, n=1, 2, \dots, N \\ u_h^0(x, y) = 0, x \in \Omega \end{cases} \quad (2.3)$$

对于问题 III, 有下面熟知的结论^[2,3]。

定理 1: 当 $f \in L^2(\Omega)$ 时, 问题 III 存在唯一的解 $u_h^n \in X_h$, 并且当问题 II 的解满足 $u_t \in H^{m+1}(\Omega)$ 和 $u_{tt} \in L^2(\Omega)$ 时, 有下列的误差估计

$$\|u(x, y, t_n) - u_h^n\|_0 \leq C(h^{m+1} + \tau^2), \quad 1 \leq n \leq N \quad (2.4)$$

这里和下文用到的 C 表示与 h 和 τ 无关的常数。

这样, 只要给定 f 和时间步长 τ 及空间步长 h , 解问题 III 就可以得到解的集合 $\{u_h^n\}_{n=1}^N$ 。从中抽取最初的 L (一般 $L \ll N$, 例如, $L=20, N=200$) 个样本点构成子集 $\{u_h^n\}_{n=1}^L$, 在 POD 方法中, 这个子集称为瞬像集合。

附注 1: 在对实际问题计算时, 瞬像集合可以从实际物理过程抽取样本点来构成。然后用下面的 POD 方法重构这瞬像集合元素得到最优 POD 基, 用最优 POD 基张成的子空间代替有限元空间 X_h , 将无限维抛物方程降维数很低的全离散化代数方程, 从而可以快速模拟出物理现象未来的变化情况, 对未来的物理变化做出快捷预测, 这是具实际应用价值的方法。

2.2. POD 基的生成和基于 POD 方法的时间二阶精度的 CN 降阶外推有限元格式

对第 2 节中抽取的瞬像 $u_h^n (n=1, 2, \dots, L)$, 记 $W_n = u_h^n (n=1, 2, \dots, L)$ 及 $V = \text{span}\{W_1, W_2, \dots, W_L\}$ 。如果 $l = \dim(V)$ (即 V 的维数), 设 $\{\psi_j\}_{j=1}^l$ 是 V 的标准正交基向量函数, 则有

$$W_i = \sum_{j=1}^l (\nabla W_i, \nabla \psi_j) \psi_j, \quad i=1, 2, \dots, L \quad (3.1)$$

定义 1: POD 方法在于求标准正交基 $\{\psi_j\}_{j=1}^l$ 使得对于每个 $d (1 \leq d \leq l)$, 元素 $W_n (n=1, 2, \dots, L)$ 与 (3.1) 的 d 项和之间的均方误差在平均意义下最小, 即求标准正交基 $\psi_j (j=1, 2, \dots, l)$ 使得

$$\min_{\{\psi_j\}_{j=1}^l} \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \left\| \nabla \left(W_i - \sum_{j=1}^d (\nabla W_i, \nabla \psi_j) \psi_j \right) \right\|_0^2 \quad (3.2)$$

满足

$$(\nabla \psi_i, \nabla \psi_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq d \quad (3.3)$$

问题 (3.2) 和 (3.3) 的解 $\{\psi_j\}_{j=1}^d$ 称为秩等于 d 的 POD 基。

记相关矩阵 $A = ((\nabla W_i, \nabla W_j))_{L \times L}$, 则矩阵 A 是秩等于 l 的对称非负定矩阵, 它存在正特征值被排列为 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_l > 0$, 以及对应的标准正交特征向量 $\mathbf{w}_i = (a_1^i, a_2^i, \dots, a_l^i)^\top (i=1, 2, \dots, l)$ 。可以证明求 POD 基的问题可以转化为求 A 的特征值和特征向量问题, 而且 POD 基的构造及相关性质有下面的主要结论^[4-6]。

命题 2: 设 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_d > 0$ 是矩阵 A 非零特征值, $\mathbf{w}_i = (a_1^i, a_2^i, \dots, a_l^i)^\top (i=1, 2, \dots, d)$ 是相应标准正交特征向量, 则秩为 d 的标准正交 POD 基表示如下

$$\psi_j = \frac{1}{\sqrt{L\lambda_j}} \sum_{i=1}^L a_i^j u_h^i, \quad j=1, 2, \dots, d \quad (3.4)$$

而且有下列的误差公式

$$\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \left\| \nabla \left(W_i - \sum_{j=1}^d (\nabla W_i, \nabla \psi_j) \psi_j \right) \right\|_0^2 = \sum_{j=d+1}^l \lambda_j \quad (3.5)$$

记 $X^d = \text{span}\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_d\}$ 。对于每个 $u_h \in X_h$ ，定义 CN 投影 $P^d : X_h \rightarrow X^d$ ，即对于 $u_h \in X_h$ 满足

$$\left(P^d u_h^n - u_h^n, v_d \right) + \frac{\tau}{2} \left(\nabla \left(P^d u_h^n - u_h^n \right), \nabla v_d \right) = \left(P^d u_h^{n-1} - u_h^{n-1}, v_d \right) - \frac{\tau}{2} \left(\nabla \left(P^d u_h^{n-1} - u_h^{n-1} \right), \nabla v_d \right), \forall v_d \in X^d \quad (3.6)$$

那么由泛函分析理论^[8]知：存在 P^d 的一个延拓 $P^h : X \rightarrow X_h$ 使得 $P^h|_{X_h} = P^d : X_h \rightarrow X^d$ 满足

$$\begin{aligned} & \left(P^h u^n - u^n, v_h \right) + \frac{\tau}{2} \left(\nabla \left(P^h u^n - u^n \right), \nabla v_h \right) \\ & = \left(P^h u^{n-1} - u^{n-1}, v_h \right) - \frac{\tau}{2} \left(\nabla \left(P^h u^{n-1} - u^{n-1} \right), \nabla v_h \right), \forall v_h \in X_h \end{aligned} \quad (3.7)$$

其中 $u \in X$ 。由(3.7)易知投影 P^h 是有界的：

$$\left\| \nabla P^h u \right\|_0 \leq C \left\| \nabla u \right\|_0, \quad \forall u \in X \quad (3.8)$$

而且，还有下面结果成立^[2,3,4-6]。

引理 3： 对于每个 $d (1 \leq d \leq l)$ ，投影算子 P^d 满足

$$\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \left\| \nabla \left(u_h^i - P^d u_h^i \right) \right\|_0^2 \leq C \sum_{j=d+1}^l \lambda_j \quad (3.9)$$

$$\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \left\| u_h^i - P^d u_h^i \right\|_0^2 \leq Ch^2 \sum_{j=d+1}^l \lambda_j \quad (3.10)$$

其中 $u_h^i \in X_h (i=1, 2, \dots, L)$ 是问题 III 的解。

这样，利用 X^d 可以得到问题 II 基于 POD 的时间二阶精度的 CN 降阶外推有限元格式。

问题 IV： 求 $u_d^n \in X^d (n=1, 2, \dots, N)$ 满足

$$u_d^n = P^d u_h^n = \sum_{j=1}^d (\nabla u_h^n, \nabla \psi_j) \psi_j, \quad n=1, 2, \dots, L \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} 2 \left(u_d^n, v_d \right) + \tau a \left(u_d^n, v_d \right) &= 2 \left(u_d^{n-1}, v_d \right) - \tau a \left(u_d^{n-1}, v_d \right) + \tau \left(f^n + f^{n-1}, v_d \right), \\ \forall v_d \in X^d, n &= L+1, L+2, \dots, N \end{aligned} \quad (3.12)$$

由于(3.12)的左边是对称正定的有界双线性泛函，而对于给定的 u_d^{n-1} ，(3.12)的右边是有界的线性，因此，由 Lax-Milgram 定理^[2,3]可知：问题 IV 存在唯一的解 $u_d^n \in X^d (n=1, 2, \dots, N)$ 。利用(3.8)及在(3.12)中取 $v_d = u_d^n$ ，并利用 Hölder 不等式和 Cauchy 不等式可以得到

$$\left\| u_d^n \right\|_0 + \tau \sum_{i=1}^n \left\| \nabla u_d^i \right\|_0 \leq C \tau \sum_{i=1}^n \left\| f^i \right\|_0 \quad (3.13)$$

附注 2： 当 \mathfrak{T}_h 是三角形剖分，而且 X_h 是分片线性多项式空间时，问题 III 的总体自由度(即未知量总数)为 N_h (其中 N_h 为 \mathfrak{T}_h 中三角形顶点数目^[2,3])。如果 X_h 采用更高次数分片多项式空间，自由度更多。而问题 IV 的自由度为 $d (d \ll N)$ 。对于实际科学工程问题， \mathfrak{T}_h 中三角形定点数目是数以万计的，甚至上亿的。而 d 只是从 N 个瞬时解中取出很少的 $L (L \ll N)$ 个瞬像所对应的一些较大特征值个数是很小的(例如，在第 5 节中， $d = 5$ ，而 $N_h = 4 \times 10^4$)。因此，问题 IV 是问题 II 基于 POD 的时间二阶精度的 CN 降阶外推有限元格式。特别是，问题 IV 的最初 L 个时刻的降阶解是由经典 CN 有限元格式的样本解(即瞬像)直接投影到 POD 基获得的，

而后面的 $(N-L)$ 个时刻的解是用最初 L 个时刻的降阶解经过迭代外推得到的, 没有做重复计算, 这是与现有的 POD 降维模型^[4-8]的主要区别, 是对现有 POD 降阶方法的改进和创新。

3. 基于 POD 的 CN 降阶外推有限元格式的误差分析及算法实现

3.1. 基于 POD 的 CN 降阶外推有限元格式的误差分析

下面借助于经典有限元法的理论, 讨论基于 POD 的时间二阶精度的 CN 降阶外推有限元格式问题 IV 的收敛性。主要有下面的结论。

定理 5: 在定理 1 的条件下, 如果问题 II 的解 $u \in H^{m+1}(\Omega)$, 则当 $\tau = O(h)$ 和 $L^2 = O(N)$ 时, 问题 IV 的解 $u_d^n \in U^d$ ($n=1, 2, \dots, N$) 有下面的误差估计

$$\|u(t_n) - u_d^n\|_0 + \tau^{1/2} \|\nabla(u(t_n) - u_d^n)\|_0 \leq C \left(\tau^{1/2} \sum_{j=d+1}^l \lambda_j \right)^{1/2} + C(\tau^2 + h^{m+1}) \quad (4.1)$$

证明: 当 $n=1, 2, \dots, L = O(\sqrt{N})$ 和 $\tau = O(h)$ 时, 由引理 3 可有

$$\|u_h^n - u_d^n\|_0^2 + \tau \|\nabla(u_h^n - u_d^n)\|_0^2 = \|u_h^n - P^d u_h^n\|_0^2 + \tau \|\nabla(u_h^n - P^d u_h^n)\|_0^2 \leq C \tau^{1/2} \sum_{j=d+1}^l \lambda_j \quad (4.2)$$

当 $n=L+1, L+2, \dots, N$ 时, 由于 $X^d \subset X_h$, 在问题 III 中取 $v_h = v_d$ 并与问题 IV 的(3.12)相减得误差方程

$$\begin{aligned} 2(u_h^n - u_d^n, v_d) + \tau a(u_h^n - u_d^n, v_d) &= 2(u_h^{n-1} - u_d^{n-1}, v_d) - \tau a(u_h^{n-1} - u_d^{n-1}, v_d), \\ \forall v_d \in X^d, n=L+1, L+2, \dots, N \end{aligned} \quad (4.3)$$

设 $e^n = P^d u_h^n - u_d^n$, 则由(4.3)、(3.6)和(3.7)有

$$\begin{aligned} \|e^n\|_0^2 + \frac{\tau}{2} \|\nabla e^n\|_0^2 &= (e^n, e^n) + \frac{\tau}{2} (\nabla e^n, \nabla e^n) \\ &= (P^d u_h^n - u_h^n, e^n) + \frac{\tau}{2} (\nabla(P^d u_h^n - u_h^n), \nabla e^n) + (u_h^n - u_d^n, e^n) + \frac{\tau}{2} (\nabla(u_h^n - u_d^n), \nabla e^n) \\ &= (P^d u_h^n - u_h^n, e^n) + \frac{\tau}{2} (\nabla(P^d u_h^n - u_h^n), \nabla e^n) + (u_h^{n-1} - P^d u_h^{n-1}, e^n) + (e^{n-1}, e^n) \\ &\quad - \frac{\tau}{2} (\nabla(u_h^{n-1} - P^d u_h^{n-1}), \nabla e^n) - \frac{\tau}{2} (\nabla e_d^{n-1}, \nabla e^n) \\ &\leq (e^{n-1}, e^n) - \frac{\tau}{2} (\nabla e_d^{n-1}, \nabla e^n) \\ &\leq \|e^{n-1}\|_0 \|e^n\|_0 + \frac{\tau}{2} \|\nabla e_d^{n-1}\|_0 \|\nabla e^n\|_0 \\ &\leq \frac{\tau}{4} (\|\nabla e^{n-1}\|_0^2 + \|\nabla e^n\|_0^2) + \frac{1}{2} (\|e^{n-1}\|_0^2 + \|e^n\|_0^2) \end{aligned} \quad (4.4)$$

于是, 得到

$$\|e^n\|_0^2 + \frac{\tau}{2} \|\nabla e^n\|_0^2 \leq \frac{\tau}{2} \|\nabla e^{n-1}\|_0^2 + \|e^{n-1}\|_0^2 \quad (4.5)$$

对(4.5)从 $L+1$ 到 $n \leq N$ 求和, 并(4.2)有

$$\|e^n\|_0^2 + \tau \|\nabla e^n\|_0^2 \leq \frac{\tau}{2} \|\nabla e^L\|_0^2 + \|e^L\|_0^2 \leq C \tau^{1/2} \sum_{j=d+1}^l \lambda_j \quad (4.6)$$

当 $\tau = O(h)$ 时, 由引理 3 可得到

$$\|u_h^n - u_d^n\|_0^2 + \tau \|\nabla(u_h^n - u_d^n)\|_0^2 \leq Ch^{2m+2} + C\tau^{1/2} \sum_{j=d+1}^l \lambda_j \quad (4.7)$$

结合定理 1 与(4.2)和(4.7)即得(4.1)。定理 5 证毕。

附注 3: 定理 5 的误差估计给出了选取 POD 基数目的指导：只要选取 POD 基数目 d 使得 $k^{1/2} \sum_{j=d+1}^l \lambda_j \leq k^4 + h^{2m+2}$ 即可。

3.2. CN 降阶外推有限元格式的算法实现

求解 CN 降阶外推有限元格式问题 IV 可按下面的步骤实现。

步 1: 对所需要的计算精度 δ ，确定最初用经典 CN 有限元格式问题 III 的时间步长 τ 和空间网格尺寸 h 及插值次数 m 使得 $(\tau^2 + h^{m+1}) \leq \delta$ ，用问题 III 求出最初的 L 步的经典 CN 有限元解 $u_h^n \in X_h$ ($n=1, 2, \dots, L=O(\sqrt{N})$)，通常取 $L=20$ 即可)；

步 2: 组成相关矩阵 $A = ((\nabla W_i, \nabla W_j))_{L \times L}$ (其中 $W_i = u_h^i$)，解特征值问题 $A\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}$ 求出正特征值，并排列为 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_l > 0$ ，对应的标准正交特征向量为 $\mathbf{w}_i = (a_1^i, a_2^i, \dots, a_l^i)^T$ ($i=1, 2, \dots, l$)；

步 3: 确定 POD 基的数目 d 使得 $\tau^{1/2} \sum_{j=d+1}^l \lambda_j \leq \delta^2$ ，并求出 POD 基 $\psi_j = \frac{1}{\sqrt{L\lambda_j}} \sum_{i=1}^L a_i^j u_h^i$ ($j=1, 2, \dots, d$)；

步 4: 令 $X^d = \text{span}\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_d\}$ ，解基于 POD 方法的 CN 降阶外推有限元格式问题 IV 求出 $u_d^n \in X^d$ ($n=1, 2, \dots, N$)；

步 5: 如果 $\|u_d^n - u_d^{n-1}\|_0 \leq \|u_d^{n-1} - u_d^{n-2}\|_0$ ($n=L+1, L+2, \dots, N$)，则 $u_d^n \in X^d$ ($n=1, 2, \dots, N$) 就是满足精度要求的数值解。否则，即若 $\|u_d^n - u_d^{n-1}\|_0 > \|u_d^{n-1} - u_d^{n-2}\|_0$ ($n=L+1, L+2, \dots, N$)，需更新 POD 基，这时令 $W_i = u_d^{n-1}$ ($i=1, 2, \dots, L$)，返回步 2。

4. 数值实验

下面给出数值实验说明抛物方程基于 POD 方法的 CN 降阶外推有限元格式的优越性。

计算域取为 $\bar{\Omega} = [0, 2] \times [0, 2]$ ，源函数 $f = 0$ ， $T = 2$ ，初始函数取为 $g(x, y) = \sin \pi x \sin \pi y$ 和边值函数取为 $s(x, y, t) = 0$ 。

将计算域 $\bar{\Omega} = [0, 2] \times [0, 2]$ 剖分为 200×200 个边长 $\Delta x = \Delta y = 0.01$ 小正方形，然后在同一方向连结其对角线将每个小正方形剖分成为两个小三角形构成 $h = \sqrt{2} \times 0.01$ 的三角形剖分 \mathfrak{S}_h ，节点数目 $N_h = 4 \times 10^4$ 。时间步长 $\tau = 0.01$ 。为了使得 CN 降阶外推有限元解的误差为最优阶，有限元空间取为分片一次插值。

利用经典 CN 降阶外推有限元格式问题 III 算出 $t = 2$ 时的解画在图 1 中。

首先用经典 CN 有限元格式最初 20 时间步求出的经典有限元解 u_h^n ($n=1, 2, \dots, L=20$) 作为瞬像，取精度为 $\delta = \tau^2 + h^2 = 2 \times 10^{-4}$ 。经计算得到 $(\tau^{1/2} \sum_{j=6}^{20} \lambda_j)^{1/2} \leq 3 \times 10^{-4}$ ，这样只需取最初的 5 个 POD 基张成子空间 X^5 。按照 3.2 节的 5 个步骤求 POD 基，及求 $t = 2$ 的 CN 降阶外推有限元解过程中，当 $t = 1$ 时更新了一次 POD 基，最后算出的 $t = 2$ 时的 CN 降阶外推有限元解画在图 2 中。

比较图 1 和图 2 可看出，它们很相像。但是经典 CN 有限元格式在每个时间层有 40,000 个自由度，而基于 POD 方法的 CN 降阶外推有限元格式在每个 ($n > L$) 时间层仅有 5 个自由度，即经典 CN 有限元方法的计算量是 CN 降阶外推有限元格式的 8000 倍。这样，利用 CN 降阶外推有限元格式计算抛物方程的数值解可以极大地减少计算量，从而减少计算过程中截断误差的积累。因此，基于 POD 方法的 CN 降阶外推有限元格式效果要比经典 CN 有限元格式好(从图 1 和图 2 可以看到)。这也说明了基于 POD 方法的 CN 降阶外推有限元格式在求解二维抛物方程的数值解是可行有效的。

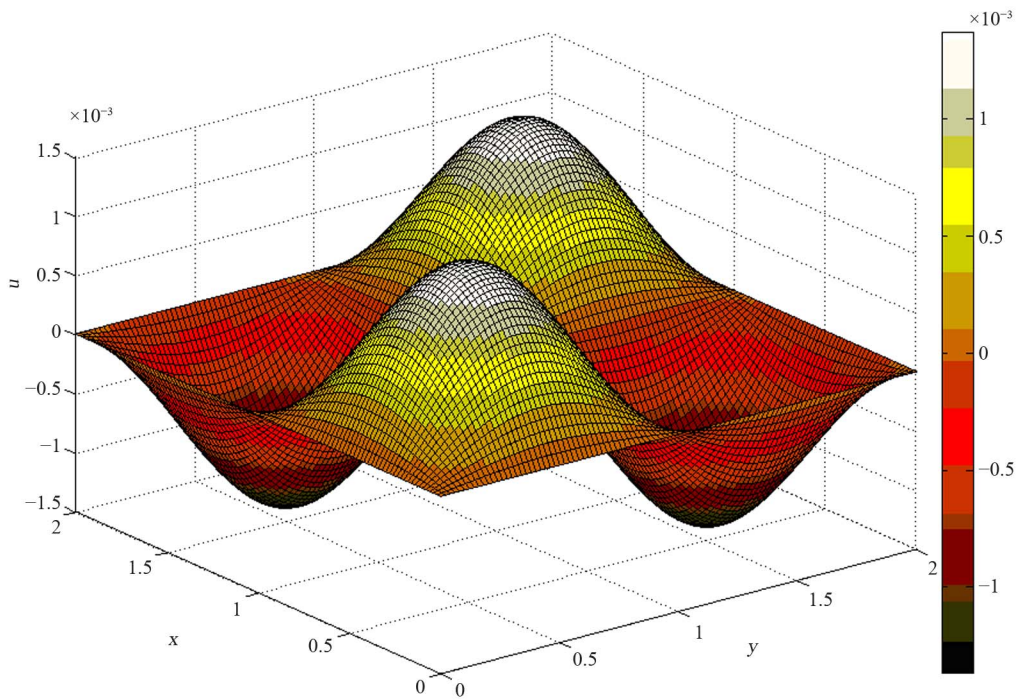


Figure 1. Classical CN finite element solution at $t = 2$
图 1. 在 $t = 2$ 处的经典 CN 有限元解

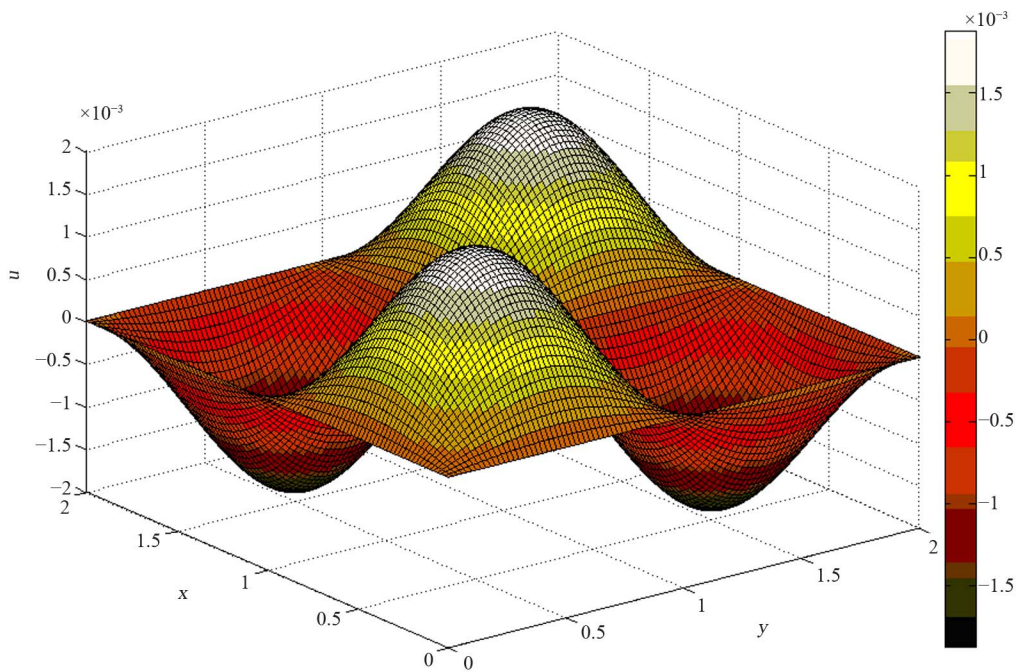


Figure 2. Reduced-order CN finite element solution at $t = 2$
图 2. 在 $t = 2$ 处的 CN 降阶有限元解

图 3 是在 $t = 2$ 时的经典 CN 有限元解与 CN 降阶外推有限元格式取不同 POD 数目的解之间的误差。由此可见，当 $d = 5$ 时，误差不超过 3×10^{-4} ，这与定理 5 的理论结果相吻合，这进一步说明了数值结果是与理论结果相吻合的。

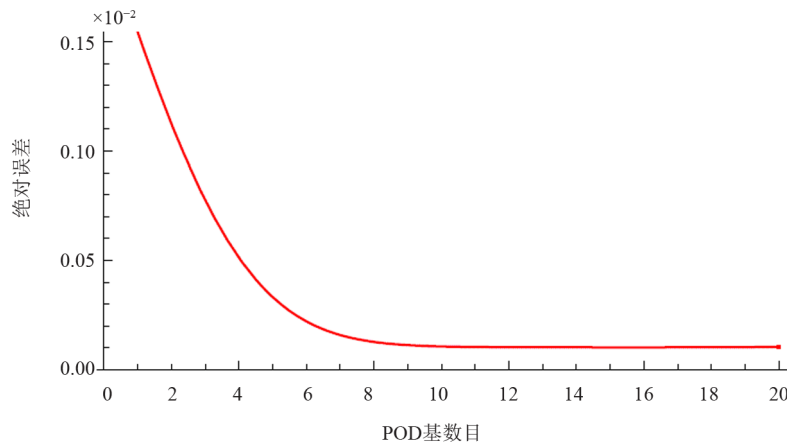


Figure 3. The absolute errors at $t = 2$ between the classical CN finite element solution and the reduced-order CN finite element solutions with different number of POD basis

图 3. 当 $t = 2$ 时经典 CN 有限元解与取不同 POD 基数目的 CN 降阶有限元解之间的绝对误差

5. 结论和讨论

本文利用 POD 方法建立了二维抛物方程的 CN 降阶外推有限元格式，分析了 CN 降阶外推有限元解与经典的 CN 有限元解和广义解之间的误差，用误差估计建立了 POD 基数目选取的准则，给出了 CN 降阶外推有限元格式的算法实现步骤。最后，用数值实验说明 CN 降阶外推有限元格式对于求解二维抛物方程的数值解是有效和可靠的。

虽然二维抛物方程基于 POD 方法的一种 CN 降阶有限元格式^[6]已经被建立，但是没有采用外推，相当于重复计算经典 CN 有限元方法在相同时段的解。而本文只用很短时段上的经典 CN 有限元解作为瞬像，构造 POD 基和建立基于 POD 方法的 CN 降阶外推有限元格式，这相当于用已有的信息去预测预报未来物理现象，这是更具有实际应用前景的方法，这也是对现有基于 POD 方法的降阶格式^[4-7]的改进和创新。

参考文献 (References)

- [1] F. D'Andrea, R. Vautard. Extratropical low-frequency variability as a low-dimensional problem, I: A simplified model. Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, 2001, 127(574): 1357-1374.
- [2] V. Thomee. Partial differential equations with numerical methods. Berlin: Springer-Verlag, 2003.
- [3] 罗振东. 混合有限元方法基础及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2006.
- [4] K. Kunisch, S. Volkwein. Galerkin proper orthogonal decomposition methods for parabolic problems. Numerische Mathematik, 2001, 90(1): 117-148.
- [5] 腾飞, 孙萍, 罗振东. 抛物型方程基于 POD 方法的时间二阶中心差的二阶精度简化有限元格式[J]. 计算数学, 2011, 33(4): 373-386.
- [6] 罗振东, 陈静, 谢正辉, 安静, 孙萍. 抛物型方程基于 POD 方法的时间二阶精度 CN 有限元降维格式[J]. 中国科学 A 辑: 数学, 2011, 41(5): 447-460.
- [7] P. Sun, Z. D. Luo and Y. J. Zhou. Some reduced finite difference schemes based on a proper orthogonal decomposition technique for parabolic equations. Applied Numerical Mathematics, 2010, 60(1-2): 154-164.
- [8] W. Rudin. Functional and analysis (2nd Edition). New York: McGraw-Hill Companies, 1973.