

The Dynamical Analysis of a Fishery Ecosystem Diffusion Model

Caixia Duan, Peng Du, Xinyuan Liao*

School of Mathematics and Physics, University of South China, Hengyang
Email: *xinyuanliao88@yahoo.com

Received: May 13th, 2013; revised: May 27th, 2013; accepted: Jun. 7th, 2013

Copyright © 2013 Caixia Duan et al. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

Abstract: In this work, we introduce the bio-economic harvesting of a prey-predator fishery diffusion model with toxicity in which both the species are infected by some toxicants released by some other species. We obtain some results for the locally asymptotical stability of the nonnegative constant equilibria, and the global stability of the unique positive equilibrium is also obtained by constructing suitable Lyapunov function. Numerical simulations are illustrated to confirm our rigorous results. Finally, via the upper and lower solution method, we also show the existence of traveling wave fronts connecting the zero solution with the positive equilibrium of this system.

Keywords: Prey-Predator Fishery Model; Stability; Linearized Method; Traveling Wavefront; Upper and Lower Solution

一类渔业生态扩散系统的动力性分析

段彩霞, 杜 鹏, 廖新元*

南华大学数理学院, 衡阳
Email: *xinyuanliao88@yahoo.com

收稿日期: 2013 年 5 月 13 日; 修回日期: 2013 年 5 月 27 日; 录用日期: 2013 年 6 月 7 日

摘 要: 本文研究一类带有病毒的捕食与被捕食渔业扩散生物经济收获模型, 得到了非负平衡点的局部渐近稳定性的一些结果, 并且通过构建适当的 Lyapunov 函数, 得到了唯一正平衡点的全局稳定性的充分条件, 并通过数值模拟验证了所得到结果的正确性。最后, 利用上下解方法, 证明了连接两个平衡点的行波解的存在性。

关键词: 捕食与被捕食渔业模型; 稳定性; 线性化方法; 波前解; 上下解方法

1. 引言

最近, 文献[1]与[2]讨论了从一些释放病毒的物种那感染的捕食与被捕食渔业生物经济收获模型:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = r_1x \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \alpha xy - c_1Ex - \gamma_1x^3, \\ \frac{dy}{dt} = -r_2y + \beta xy - c_2Ey - \gamma_2y^2, \end{cases} \quad (1.1)$$

*通讯作者。

的动力学行为研究, 得到了稳定性的充分条件。

在实际的生态环境中, 生物种群总是从密集地向种群稀少的集中地扩散, 这种生态群体的种群扩散对环境的影响研究已成为生态环境学主要课题, 许多作者(详见文献[3-10]及其中的引用文献)通过引进扩散方程或常微分方程对这种种群扩散现象进行了讨论。这种包含自由扩散的模型或相似模型越来越多的被应用到实际问题当中, 例如: 传染病动力系统, 多孔介质, 化学反应, 工程控制理论及其他领域。在本文中, 我们将讨论系统(1.1)的反应扩散系统模型:

$$\begin{aligned} u_t - d_1 u_{xx} &= r_1 u \left(1 - \frac{u}{k}\right) - \alpha uv - c_1 E u - \gamma_1 u^3, & \Omega \times (0, +\infty), \\ u_t - d_2 u_{xx} &= -r_2 v + \beta uv - c_2 E v - \gamma_2 v^2, & \Omega \times (0, +\infty), \\ \partial_\eta u &= \partial_\eta v = 0, & \partial\Omega \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) &= u_0(x) > 0, v(x, 0) = v_0(x) > 0, & \bar{\Omega}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

其中, $u = u(x, t)$ 和 $v = v(x, t)$ 分别表示被捕食种群和捕食种群在点 $x(x \in \Omega \in R^n)$, 时间 t 的空间密度。 d_1 和 d_2 分别表示扩散率(或者扩散系数); r_1 是被捕食者种群的生长率; r_2 是捕食者离开被捕食者独立生存时的相对死亡率; k 表示被捕食种群的环境容量; 这里捕食者与被捕食者都服从同一捕捞强度 E ; c_1, c_2 为两种群的捕捞能力系数; $\gamma_1 u^3$ 是被捕食者从外界一些携带病毒的物种那直接感染的病毒。 γ_1 为被捕食者所含有的病毒系数。 $\gamma_2 u^2$ 是捕食者感染的病毒少于被捕食者的影响, γ_2 为捕食者所含有的病毒系数。以上所有的参数都是正的。

本文将通过线性化方法讨论系统(1.2)的非负平衡点的局部渐近稳定, 得到了局部稳定的条件; 通过构建适当的 Lyapunov 函数研究唯一正平衡点的全局稳定性。我们还证明了连接两个平衡点的波前解的存在性。最后, 通过数值仿真验证结果的正确性。

2. 非负平衡点的局部稳定性

在这一部分, 我们通过线性化方法来讨论系统(1.2)的非负常数平衡点的局部渐近稳定性。容易算出系统(1.2)有三个非负常数平衡点: $E_1(0, 0)$ 、 $E_2(c_0^*, 0)$ 、 $E_3(c_1^*, c_2^*)$, 其中,

当 $r_1 > c_1 E$ 时,

$$c_0^* = \frac{-\frac{r_1}{k} + \left[\left(\frac{r_1}{k} \right)^2 + 4\gamma_1 (r_1 - c_1 E) \right]^{\frac{1}{2}}}{2\gamma_1} > 0,$$

当假设(H) $(r_2 + c_2 E)(\gamma_1 k (r_2 + c_2 E) + r_1 \beta) < (r_1 - c_1 E) \beta^2 k$ 成立时,

$$\begin{aligned} c_1^* &= \frac{-\left(\frac{r_1}{k} + \frac{\alpha\beta}{\gamma_2} \right) + \left[\left(\frac{r_1}{k} + \frac{\alpha\beta}{\gamma_2} \right)^2 + 4\gamma_1 \left(r_1 + \frac{\alpha(r_2 + c_2 E)}{\gamma_2} - c_1 E \right) \right]^{\frac{1}{2}}}{2\gamma_1} > 0, \\ c_2^* &= \frac{\beta c_1^* - r_2 - c_2 E}{\gamma_2} > 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

易知, 当 $r_1 > c_1 E$, 原点 $(0, 0)$ 不稳定, 因此, 我们只需考虑平衡点 E_2 和 E_3 的渐近稳定性。

令 $u(x, t) = u^*(x, t) + c_1^*$, $v(x, t) = v^*(x, t) + c_2^*$, 将系统(1.2)关于 (c_1^*, c_2^*) 线性化得到

$$\begin{aligned} u_t &= d_1 u_{xx} + \left(r_1 - \frac{2r_1 c_1^*}{k} - \alpha c_2^* - c_1 E - 3\gamma_1 (c_1^*)^2 \right) u - \alpha c_1^* v, \\ v_t &= d_2 v_{xx} + \beta c_2^* u - (r_2 - \beta c_1^* + c_2 E + 2\gamma_2 c_2^*) v. \end{aligned} \quad (2.2)$$

当且仅当

$$\begin{vmatrix} \lambda + d_1\sigma^2 - r_1 + \frac{2r_1c_2^*}{k} + \alpha c_2^* + c_1E + 3\gamma_1(c_1^*)^2 & \alpha c_1^* \\ -\beta c_2^* & \lambda + d_2\sigma^2 + r_2 - \beta c_1^* + c_2E + 2\gamma_2c_2^* \end{vmatrix} = 0$$

线性化系统(2.2)满足非平凡解 $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t + i\sigma x}$ 的形式, 因此得到

$$\left(\lambda + d_1\sigma^2 - r_1 + \frac{2r_1c_1^*}{k} + \alpha c_2^* + c_1E + 3\gamma_1(c_1^*)^2 \right) (\lambda + d_2\sigma^2 + r_2 - \beta c_1^* + c_2E + 2\gamma_2c_2^*) + \alpha\beta c_1^*c_2^* = 0, \quad (2.3)$$

其中 λ 是复数, σ 是实数。

2.1. 平衡点 E_2 的渐近稳定性

由式(2.3)得

$$\left(\lambda + d_1\sigma^2 - r_1 + \frac{2r_1c_0^*}{k} + c_1E + 3\gamma_1(c_0^*)^2 \right) (\lambda + d_2\sigma^2 + r_2 - \beta c_0^* + c_2E) = 0. \quad (2.4)$$

由(2.4)得

$$\lambda = -d_1\sigma^2 + r_1 - \frac{2r_1c_0^*}{k} - c_1E - 3\gamma_1(c_0^*)^2 = -d_1\sigma^2 - \left(2\gamma_1(c_0^*)^2 + \frac{r_1c_0^*}{k} \right) < 0. \quad (2.5)$$

当 $c_0^* < \frac{r_2 + c_2E}{\beta}$,

$$\lambda = -d_2\sigma^2 - r_2 + \beta c_0^* - c_2E = -d_2\sigma^2 - (r_2 - \beta c_0^* + c_2E) < 0. \quad (2.6)$$

2.2. 平衡点 E_3 的渐近稳定性

由式(2.3)得

$$\left(\lambda + d_1\sigma^2 - r_1 + \frac{2r_1c_1^*}{k} + \alpha c_2^* + c_1E + 3\gamma_1(c_1^*)^2 \right) (\lambda + d_2\sigma^2 + r_2 - \beta c_1^* + c_2E + 2\gamma_2c_2^*) + \alpha\beta c_1^*c_2^* = 0, \quad (2.7)$$

当 $\lambda + d_2\sigma^2 + r_2 - \beta c_1^* + c_2E + 2\gamma_2c_2^* \neq 0$, 由(2.7)得

$$\lambda = -d_1\sigma^2 + r_1 - \frac{2r_1c_1^*}{k} - \alpha c_2^* - c_1E - 3\gamma_1(c_1^*)^2 - \frac{\alpha\beta c_1^*c_2^*}{\lambda + d_2\sigma^2 + r_2 - \beta c_1^* + c_2E + 2\gamma_2c_2^*}. \quad (2.8)$$

利用反证法证明特征根有负实部。假设 $\lambda = x + iy$ 且实部 $x \geq 0$, 直接计算实部 x 得

$$\begin{aligned} x &= -d_1\sigma^2 + r_1 - \frac{2r_1c_1^*}{k} - \alpha c_2^* - c_1E - 3\gamma_1(c_1^*)^2 - \frac{\alpha\beta c_1^*c_2^*(x + d_2\sigma^2 + r_2 - \beta c_1^* + c_2E + 2\gamma_2c_2^*)}{(x + d_2\sigma^2 + r_2 - \beta c_1^* + c_2E + 2\gamma_2c_2^*) + y^2} \\ &\leq r_1 - \frac{2r_1c_1^*}{k} - \alpha c_2^* - c_1E - 3\gamma_1(c_1^*)^2 - \frac{\alpha\beta c_1^*c_2^*(r_2 - \beta c_1^* + c_2E + 2\gamma_2c_2^*)}{(x + d_2\sigma^2 + r_2 - \beta c_1^* + c_2E + 2\gamma_2c_2^*) + y^2} \\ &= -\frac{r_1c_1^*}{k} - 2\gamma_1(c_1^*)^2 - \frac{\alpha\beta c_1^*c_2^*r_2c_2^*}{(x + d_2\sigma^2 + r_2 - \beta c_1^* + c_2E + 2\gamma_2c_2^*) + y^2} < 0 \end{aligned}$$

矛盾, 因此, 正平衡点 $E_3(c_1^*, c_2^*)$ 是局部渐近稳定的。

从上面的讨论我们可以得到如下定理:

定理 2.1 1) 当 $c_0^* < \frac{r_2 + c_2 E}{\beta}$, 平衡点 $E_2(c_0^*, 0)$ 是局部渐近稳定的。

2) 当假设(H)成立时, 正平衡点 $E_3(c_1^*, c_2^*)$ 是局部渐近稳定的。

3. 正平衡点 (c_1^*, c_2^*) 的全局稳定性

现在, 我们通过构建 Lyapunov 函数的方法来讨论系统(1.2)平衡点的全局稳定性。

定理 3.1 当(H)成立时, 系统(1.2)的正平衡点 $E_3(c_1^*, c_2^*)$ 是全局稳定的。

证明 构造系统(1.2)的 Lyapunov 函数 $E(t) = E(u)(t) + \frac{\alpha}{\beta} E(v)(t)$, 其中

$$E(u)(t) = \int_{\Omega} \left\{ u - c_1^* - c_1^* \ln \frac{u}{c_1^*} \right\} dx, \quad E(v)(t) = \int_{\Omega} \left\{ v - c_2^* - c_2^* \ln \frac{v}{c_2^*} \right\} dx.$$

则

$$\begin{aligned} \frac{dE(u)}{dt} &= \int_{\Omega} \left\{ 1 - \frac{c_1^*}{u} u_t \right\} dx = \int_{\Omega} \left\{ -d_1 \frac{c_1^* |\nabla u|^2}{u^2} + (u - c_1^*) \left[r_1 \left(1 - \frac{u}{k} \right) - \alpha v - c_1 E - \gamma_1 u^2 \right] \right\} dx \\ &= \int_{\Omega} \left\{ -d_1 \frac{c_1^* |\nabla u|^2}{u^2} + (u - c_1^*) \left[-\frac{r_1}{k} (u - c_1^*) - \alpha (v - c_2^*) - \gamma_1 (u - c_1^*) (u + c_1^*) \right] \right\} dx \\ &= \int_{\Omega} \left\{ -d_1 \frac{c_1^* |\nabla u|^2}{u^2} - \frac{r_1}{k} (u - c_1^*)^2 - \alpha (u - c_1^*) (v - c_2^*) - \gamma_1 (u - c_1^*)^2 (u + c_1^*) \right\} dx, \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} \frac{dE(v)}{dt} &= \int_{\Omega} \left\{ 1 - \frac{c_2^*}{v} v_t \right\} dx = \int_{\Omega} \left\{ -d_2 \frac{c_2^* |\nabla v|^2}{v^2} + (v - c_2^*) (r_2 - \beta u + c_2 E + \gamma_2 v) \right\} dx \\ &= \int_{\Omega} \left\{ -d_2 \frac{c_2^* |\nabla v|^2}{v^2} - (v - c_2^*) (-\beta (u - c_1^*) + \gamma_2 (v - c_2^*)) \right\} dx \\ &= \int_{\Omega} \left\{ -d_2 \frac{c_2^* |\nabla v|^2}{v^2} + \beta (u - c_1^*) (v - c_2^*) - \gamma_2 (v - c_2^*)^2 \right\} dx. \end{aligned} \tag{3.2}$$

因此, $E(t)$ 的全导数为

$$\frac{dE}{dt} = \int_{\Omega} \left\{ -d_1 \frac{c_1^* |\nabla u|^2}{u^2} - d_2 \frac{c_2^* |\nabla v|^2}{v^2} - \frac{r_1}{k} (u - c_1^*)^2 - \gamma_1 (u - c_1^*)^2 (u + c_1^*) - \frac{\alpha \gamma_2}{\beta} (v - c_2^*)^2 \right\} dx.$$

当 $t \in (0, \infty)$ 时, $E'(t) < 0$ 且 $E(t) > 0$, 除了 (c_1^*, c_2^*) , 所以系统(1.2)的解 $E_3(c_1^*, c_2^*)$ 是全局渐近稳定的。

为了说明渐近稳定性结果的正确性, 下面我们用软件 MATLAB 进行了数值仿真。考虑以下系统

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 2u \left(1 - \frac{u}{10} \right) - \frac{1}{10} uv - 1.4u - \frac{1}{5} u^3, \\ v_t - v_{xx} &= -\frac{1}{10} v + \frac{1}{2} uv - \frac{1}{10} v - \frac{1}{2} v^2, \\ \partial_{\eta} u &= \partial_{\eta} v = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x) = 0.6, v(x, 0) = v_0(x) = 0.4, \end{aligned} \tag{3.3}$$

容易验证上面这个系统满足定理 3.1 的条件(H):

$$(r_2 + c_2 E)(\gamma_1 k(r_2 + c_2 E) + r_1 \beta) < (r_1 - c_1 E)\beta^2 k.$$

因此系统(1.2)的正解 $E_3(c_1^*, c_2^*)$ 是全局稳定的(如图 1, 2)。

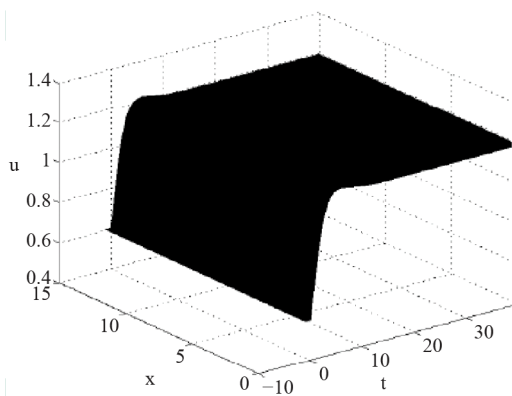


Figure 1. $c_1^* = 1.1897$

图 1. $c_1^* = 1.1897$

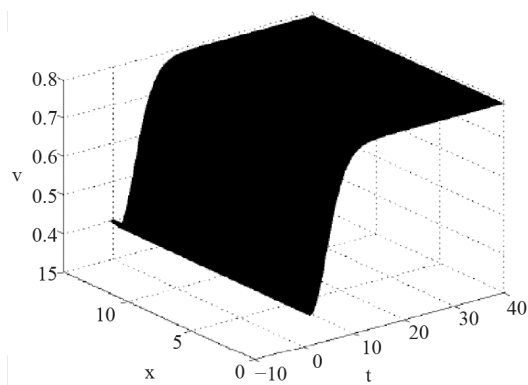


Figure 2. $c_2^* = 0.7897$

图 2. $c_2^* = 0.7897$

4. 波前解的存在性

令 $u(x,t) = \phi_1(s)$, $v(x,t) = \phi_2(s)$, 其中 $s = x + ct$, c 是波速, 代入系统(1.2)得

$$d_1 \phi_1''(s) - c \phi_1'(s) + r_1 \phi_1(s) \left(1 - \frac{1}{k} \phi_1(s)\right) - \alpha \phi_1(s) \phi_2(s) - c_1 E \phi_1(s) - \gamma_1 \phi_1^3(s) = 0, \quad (4.1)$$

$$d_2 \phi_2''(s) - c \phi_2'(s) - r_2 \phi_2(s) + \beta \phi_1(s) \phi_2(s) - c_2 E \phi_2(s) - \gamma_2 \phi_2^2(s) = 0, \quad \phi_i(-\infty) = 0, \phi_i(+\infty) = c_i^*, i = 1, 2.$$

接下来, 我们根据文献[11]的方法, 研究了系统(1.2)波前解的存在性。假设 c 足够大, 令 $\varepsilon = \frac{1}{c^2}$, 则 ε 是一个很小的参数。不妨设

$$\begin{pmatrix} \phi_1(s) \\ \phi_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1(\eta) \\ \psi_2(\eta) \end{pmatrix}, \quad \eta = \sqrt{\varepsilon} s = \frac{s}{c}. \quad (4.2)$$

则系统(4.1)化为

$$\begin{aligned} \varepsilon d_1 \psi_1''(\eta) - \psi_1'(\eta) + r_1 \psi_1(\eta) - \frac{r_1}{k} \psi_1^2(\eta) - c_1 E \psi_1(\eta) - \alpha \psi_1(\eta) \psi_2(\eta) - \gamma_1 \psi_1^3(\eta) &= 0, \\ \varepsilon d_2 \psi_2''(\eta) - \psi_2'(\eta) - r_2 \psi_2(\eta) + \beta \psi_1(\eta) \psi_2(\eta) - c_2 E \psi_2(\eta) - \gamma_2 \psi_2^2(\eta) &= 0, \\ \psi_i(-\infty) = 0, \psi_i(+\infty) = c_i^*, i = 1, 2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

令

$$\psi_i(\eta, \varepsilon) = \psi_{i0}(\eta) + \varepsilon \psi_{i1}(\eta) + \varepsilon^2 \psi_{i2}(\eta) + \dots, i = 1, 2. \quad (4.4)$$

同样按 ε 的幂排列, 将(4.4)代入(4.3), 我们得到 $\psi_{10}(\eta)$, $\psi_{20}(\eta)$ 满足

$$\begin{aligned} \psi_{10}'(\eta) &= r_1 \psi_{10}(\eta) - \frac{r_1}{k} \psi_{10}^2(\eta) - c_1 E \psi_{10}(\eta) - \alpha \psi_{10}(\eta) \psi_{20}(\eta) - \gamma_1 \psi_{10}^3(\eta), \\ \psi_{20}(\eta) &= -r_2 \psi_{20}(\eta) + \beta \psi_{10}(\eta) \psi_{20}(\eta) - c_2 E \psi_{20}(\eta) - \gamma_2 \psi_{20}^2(\eta), \\ \psi_{i0}(-\infty) &= 0, \psi_{i0}(+\infty) = c_i^*, i = 1, 2. \end{aligned} \quad (4.5)$$

为了记数方便, 令 $\psi_{10}(\eta) = \phi_1(s)$, $\psi_{20}(\eta) = \phi_2(s)$ 则系统(4.5)化为

$$\begin{aligned} \phi_1'(s) &= r_1 \phi_1(s) - \frac{r_1}{k} \phi_1^2(s) - c_1 E \phi_1(s) - \alpha \phi_1(s) \phi_2(s) - \gamma_1 \phi_1^3(s), \\ \phi_2'(s) &= -r_2 \phi_2(s) + \beta \phi_1(s) \phi_2(s) - c_2 E \phi_2(s) - \gamma_2 \phi_2^2(s), \\ \phi_i(-\infty) &= 0, \phi_i(+\infty) = c_i^*, i = 1, 2. \end{aligned} \quad (4.6)$$

接下来, 我们将利用文献[9]中的定理来证明我们的定理 4.1。

定理 4.1 如果假设(H)成立, 那么系统(1.2)有连接两平衡点 $(0, 0)$ 与 (c_1^*, c_2^*) 的波前解。

证明 为了证明定理, 我们需要验证文献[9]中的拟单调条件(H₂)成立, 则存在一组上下解 $(\phi_1(s), \phi_2(s))^T$, $(\psi_1(s), \psi_2(s))^T$ 。

第一步: 验证拟单调条件成立. 定义 $f_c(\phi) = (f_{c1}(\phi), f_{c2}(\phi))^T$,

$$\begin{aligned} f_{c1}(\phi) &= (r_1 - c_1 E) \phi_1(0) - \frac{r_1}{k} \phi_1^2(0) - \alpha \phi_1(0) \phi_2(0) - \gamma_1 \phi_1^3(0), \\ f_{c2}(\phi) &= -(r_2 + c_2 E) \phi_2(0) + \beta \phi_1(0) \phi_2(0) - \gamma_2 \phi_2^2(0). \end{aligned} \quad (4.7)$$

假设

- 1) $0 \leq \psi(0) \leq \phi(0) \leq c^*$ (其中 $c^* = (c_1^*, c_2^*)$)
- 2) $\exists \theta > 0$, 使得 $\phi_2(0) - \psi_2(0) < \theta(\phi_1(0) - \psi_1(0))$ 成立。

则

$$\begin{aligned} f_{c1}(\phi) - f_{c1}(\psi) &= (r_1 - c_1 E)(\phi_1(0) - \psi_1(0)) - \frac{r_1}{k}(\phi_1(0) + \psi_1(0))(\phi_1(0) - \psi_1(0)) \\ &\quad - \alpha(\phi_1(0)\phi_2(0) - \psi_1(0)\psi_2(0)) - \gamma_1(\phi_1^3(0) - \psi_1^3(0)) \\ &\geq \left(r_1 - c_1 E - \frac{2r_1 c_1^*}{k} - \alpha c_2^* - \alpha c_1^* \theta - 3\gamma_1 (c_1^*)^2 \right) (\phi_1(0) - \psi_1(0)), \end{aligned} \quad (4.8)$$

那么

$$f_{c1}(\phi) - f_{c1}(\psi) + \delta_1(\phi_1(0) - \psi_1(0)) \geq \left(\delta_1 + r_1 - c_1 E - \frac{2r_1 c_1^*}{k} - \alpha c_2^* - \alpha c_1^* \theta - 3\gamma_1 (c_1^*)^2 \right) (\phi_1(0) - \psi_1(0)),$$

其中 $\delta_1 > -r_1 + c_1 E + \frac{2r_1 c_1^*}{k} + \alpha c_2^* + \alpha c_1^* \theta + 3\gamma_1 (c_1^*)^2$ 。

同理

$$\begin{aligned} f_{c_2}(\phi) - f_{c_2}(\psi) &= -(r_2 + c_2 E)(\phi_2(0) - \psi_2(0)) + \beta(\phi_1(0)\phi_2(0) - \psi_1(0)\psi_2(0)) - \gamma_2(\phi_2^2(0) - \psi_2^2(0)) \\ &\geq -(r_2 + c_2 E + 2\gamma_2 c_2^*)(\phi_2(0) - \psi_2(0)), \end{aligned} \quad (4.9)$$

因此

$$f_{c_2}(\phi) - f_{c_2}(\psi) + \delta_2(\phi_2(0) - \psi_2(0)) \geq (\delta_2 - r_2 - c_2 E - 2\gamma_2 c_2^*)(\phi_2(0) - \psi_2(0)),$$

其中 $\delta_2 > r_2 + c_2 E + 2\gamma_2 c_2^*$ 。

第二步：上下解的存在性。

为了求出(1.2)的波前解，作如下集合：

$$\Gamma = \left\{ \phi = \begin{pmatrix} \phi_1(s) \\ \phi_2(s) \end{pmatrix} \in C(R, R^2) : \begin{array}{l} (i) \phi \text{ 在 } R \text{ 上是非递减的,} \\ (ii) \lim_{s \rightarrow -\infty} \phi(s) = 0, \lim_{s \rightarrow \infty} \phi(s) = c^* = (c_1^*, c_2^*) \end{array} \right\}.$$

定义

$$\phi_1(s) = \min\{c_1^* e^{\lambda s}, c_1^*\}, \phi_2(s) = \min\{c_2^* e^{\lambda s}, c_2^*\} \quad (4.10)$$

其中 $\lambda > \max\{r_1 - c_1 E, \beta c_1^* - r_2 - c_2 E\}$ 。由(2.1)知 $r_1 - c_1 E > 0$ ， $\beta c_1^* - r_2 - c_2 E > 0$ ，则易得 $\phi = (\phi_1(s), \phi_2(s))^T \in \Gamma$ 。

接下来，分两种情形来验证 $(\phi_1(s), \phi_2(s))^T$ 是(4.6)的一组上解。

1) 当 $s < 0$ 时

$$\begin{aligned} \phi_1'(s) - r_1 \phi_1(s) + \frac{r_1}{k} \phi_1^2(s) + c_1 E \phi_1(s) + \alpha \phi_1(s) \phi_2(s) + \gamma_1 \phi_1^3(s) \\ = c_1^* e^{\lambda s} \left[\lambda - r_1 + \frac{r_1}{k} e^{\lambda s} + c_1 E + \alpha c_2^* e^{\lambda s} + \gamma_1 (c_1^*)^2 e^{2\lambda s} \right] \geq c_1^* e^{\lambda s} (\lambda - r_1 - c_1 E) > 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \phi_2'(s) + r_2 \phi_2(s) - \beta \phi_1(s) \phi_2(s) + c_2 E \phi_2(s) + \gamma_2 \phi_2^2(s) \\ = c_2^* e^{\lambda s} (\lambda + r_2 - \beta c_1^* e^{\lambda s} + c_2 E + \gamma_2 c_2^* e^{\lambda s}) \geq c_2^* e^{\lambda s} (\lambda + r_2 - \beta c_1^* + c_2 E) > 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

2) 当 $s \geq 0$ 时，则 $\phi_i(s) = c_i^*$ ($i = 1, 2$)，因此

$$\begin{aligned} \phi_1'(s) - r_1 \phi_1(s) + \frac{r_1}{k} \phi_1^2(s) + c_1 E \phi_1(s) + \alpha \phi_1(s) \phi_2(s) + \gamma_1 \phi_1^3(s) &= 0, \\ \phi_2'(s) + r_2 \phi_2(s) - \beta \phi_1(s) \phi_2(s) + c_2 E \phi_2(s) + \gamma_2 \phi_2^2(s) &= 0. \end{aligned} \quad (4.13)$$

综上所述， $(\phi_1(s), \phi_2(s))^T$ 为(4.6)的一组上解。

定义

$$\psi_1(s) = \begin{cases} \varepsilon e^{\lambda s}, & s < 0, \\ \varepsilon, & s \geq 0, \end{cases} \text{ 且 } \psi_2(s) = 0, \quad (4.14)$$

其中

$$0 < \varepsilon < \min\left\{c_1^*, \frac{k}{r_1}(r_1 - \lambda_1 - c_1 E)\right\}, \quad (4.15)$$

$$0 < \lambda_1 < r_1 - c_1 E. \quad (4.16)$$

接下来，分两种情形来验证 $(\psi_1(s), \psi_2(s))^T$ 是(4.6)的一组下解。

1) 当 $s \geq 0$ 时，由(4.14)~(4.16)得

$$\psi_1'(s) - r_1\psi_1(s) + \frac{r_1}{k}\psi_1^2(s) + c_1E\psi_1(s) + \alpha\psi_1(s)\psi_2(s) + \gamma_1\psi_1^3(s) = \varepsilon \left(-r_1 + \frac{r_1}{k}\varepsilon + c_1E \right) < 0. \quad (4.17)$$

2) 当 $s < 0$ 时, 由(4.14)~(4.16)得

$$\begin{aligned} & \psi_1'(s) - r_1\psi_1(s) + \frac{r_1}{k}\psi_1^2(s) + c_1E\psi_1(s) + \alpha\psi_1(s)\psi_2(s) + \gamma_1\psi_1^3(s) \\ & = \varepsilon e^{\lambda_1 s} \left(\lambda_1 - r_1 + \frac{r_1}{k}\varepsilon e^{\lambda_1 s} + c_1E \right) \leq \varepsilon e^{\lambda_1 s} \left(\lambda_1 - r_1 + \frac{r_1}{k}\varepsilon + c_1E \right) < 0. \end{aligned} \quad (4.18)$$

因此, 从文献[9]所得定理知道, 如果正解 (c_1^*, c_2^*) 满足条件(H), 则集合 Γ 至少存在一个解, 也就是系统(1.2)存在连接两个平衡点 $(0, 0)$ 和 (c_1^*, c_2^*) 的波前解。

参考文献 (References)

- [1] T. Das, R. N. Mukherjee and K. S. Chaudhuri. Harvesting of a prey-predator fishery in the presence of toxicity. *Applied Mathematical Modeling*, 2009, 33(5): 2282-2292.
- [2] T. K. Kar, K. S. Chaudhuri. On non-selective harvesting of two competing fish species in the presence of toxicity. *Ecological Modeling*, 2003, 161(1-2): 125-137.
- [3] G. Lin, Y. Hong. Travelling wave fronts in a vector disease model with delay. *Applied Mathematical Modeling*, 2008, 32(12): 2831-2838.
- [4] J. W. H. So, X. Zou. Traveling waves for the diffusive Nicholson's blowflies equation. *Applied Mathematical Computation*, 2001, 122(3): 385-392.
- [5] J. Huang, X. Zou. Traveling wavefronts in diffusive and cooperative Lotka-Volterra system with delays. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2002, 271(2): 455-466.
- [6] Z. Ge, Y. He. Traveling wavefronts for a two-species predator-prey system with diffusion terms and stage structure. *Applied Mathematical Modeling*, 2009, 33(3): 1356-1365.
- [7] X. Hou, Y. Li. Local stability of traveling-wave solutions of nonlinear reaction-diffusion equations. *Discrete Continuous Dynamical System*, 2006, 15(2): 681-701.
- [8] H. Smith, X. Zhao. Global asymptotic stability of traveling waves in delayed reaction-diffusion equations. *SIAM: SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 2001, 31(3): 514-534.
- [9] J. Wu, X. Zou. Traveling wave fronts of reaction-diffusion systems with delay. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 2001, 13(3): 651-687.
- [10] X. Liao, X. Tang and S. Zhou. Existence of traveling wavefronts in a cooperative systems with discrete delays. *Applied Mathematical Computation*, 2009, 215(5): 1806-1812.
- [11] X. Y. Liao, Y. M. Chen and S. F. Zhou. Traveling wavefronts of a prey-predator diffusion system with stage-structure and harvesting. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2011, 235(8): 2560-2568.