

A Computational Analysis for First Mean Exit Time under Symmetrical Levy Multiplicative Noise

Huiqin Chen

School of Mathematics and Computer Science and Technology, Jiangnan University, Wuhan
Email: chenhuiqin111@aliyun.com

Received: Jul. 24th, 2013; revised: Aug. 29th, 2013; accepted: Sep. 10th, 2013

Copyright © 2013 Huiqin Chen. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

Abstract: Complex dynamical systems are often subject to non-Gaussian random fluctuations. The exit phenomenon, *i.e.*, escaping from a bounded domain in state space, has a great impact on the stochastic evolution of such dynamical systems. In the present paper, the author analyzes mean exit time for arbitrary noise intensity under multiplicative noise, via numerical investigation. A numerical approach for solving this non-local problem is proposed. A computational analysis is conducted to investigate the relative importance of jump measure coefficient and the effect of α value on first exit time.

Keywords: Stochastic Dynamical Systems; Non-Gaussian Levy Motion; Levy Jump Measure; First Exit Time

对称 Levy 乘性噪声下平均首次逃逸时问题的计算分析

陈慧琴

江汉大学数学与计算机科学与技术学院, 武汉
Email: chenhuiqin111@aliyun.com

收稿日期: 2013 年 7 月 24 日; 修回日期: 2013 年 8 月 29 日; 录用日期: 2013 年 9 月 10 日

摘要: 复杂的动力系统常常受到非高斯的随机扰动。首次逃离现象, 即从一个状态空间的有界区域中逃逸出来, 对动力系统的随机演化有很大的影响。在本文中, 我通过计算分析了在乘性 Levy 噪声下的首次逃离时问题。一个数值的方法去求解这个非局部的问题, 计算分析出不同的跳测度系数和 α 值对系统的首次逃离时间的影响。

关键词: 随机动力系统; 非高斯 Levy 运动; 跳测度; 首次逃离时

1. 引言

考虑一个标量下的确定性常微分方程 $\dot{Y}_t = f(Y_t), Y_0 = x \in [a, b]$, U 为光滑的位势函数。满足: $f(Y_t) = -U'(Y_t)$, 在这里 0 是一个渐近稳定的平衡点。即对从区间 $[a, b]$ 中的任意点 x 出发, 当时间 $t \rightarrow \infty$ 时, Y_t 的任一轨道趋于 0。在文本中, $U(\cdot)$ 在 0 处有一个最小值。在文献[1]中, 我们考虑加性噪声驱动随机动力系统的平均首次逃逸时问题。在本章中, 我们计算分析在乘性 Levy 噪声驱动的方程中的平均首次逃逸时。现在我们考虑这个确定性常微分方程受到非高斯噪声 Levy 噪声扰动的情况, 即考虑一个随机常微分方程:

$$dX_t = f(X_t)dt + \varepsilon X_t dL_t, X_0 = x \in [a, b] \quad (1)$$

其中, L_t 是定义在一个概率空间 (Ω, F, P) 下的 Levy 标量过程。方程(1)的扩散项是 $\varepsilon X_t dL_t$ 。逃逸现象, 即逃

逸出一个状态空间的有界域, 是一些动力系统演化中的一个随机冲击, 研究扩散行为的许多性质的重要方法是建立在平均首次逃逸时的基础上的。

定义 $\tau_{(a,b)} = \text{Einf} \{t \geq 0, X(t, \omega) \notin (a,b)\}$ 为逃逸出一个空间域 $D = [a,b]$ 的首次逃逸时间。在乘性 Levy 噪声驱动的一个动力系统的平均逃逸时由一个非局部的奇异积分-微分方程来描绘的。本文仍用数值分析的方法来求解这个非局部的问题, 在文中, 算法的设计与文献[1]中会有所不同。计算分析仍然是在 α 稳定下研究这个跳测度, 扩散系数对平均逃逸时有多大的相对影响。这章的内容组织如下: 先回顾 Levy 过程的生成元和考虑由对称 α 稳定 Levy 过程驱动的随机常微分方程(SDEs); 接着, 数值离散化的方法处理带奇异项的积分-微分方程; 数值计算结果在最后被呈现。

2. Levy 过程的生成元和平均逃逸时

从文献[2](第 182 页)中查到方程, $dX_t = f(X_t)dt + g(X_t)dL_t$, $X_0 = x \in [a,b]$, 在某些适宜的条件下, 推出 $A\varphi(x) = \langle f(x), D\varphi(x) \rangle + A_0\varphi(x)$ 。

$$\text{这里 } A_0\varphi(x) = \int_{R \setminus \{0\}} [\varphi(x + g(x)y) - \varphi(x) - I_{\{|y|<1\}} \langle D\varphi(x), g(x)y \rangle] \nu(dy)$$

其中 A 被定义为 $A = \lim_{t \downarrow 0} (P_t\varphi - \varphi)/t$, 其中 $P_t\varphi = E_x\varphi(L_t)$, φ 是定义在算子 A 域上的任意函数, I_s 是定义在集合 s 上的示性函数: $I_s(y) = \begin{cases} 1, & \text{当 } y \in s; \\ 0, & \text{当 } y \notin s. \end{cases}$ L_t 的算子 A 的定义见文献[3,4]。

注 1: 在文献[2]中考虑的是一种特殊的 Levy 过程, 没有示性函数, 而在这里, 补上了。

因此方程(1)中的随机过程 X_t 的生成元是

$$A\varphi = f(x)\varphi'(x) + \int_{R \setminus \{0\}} (\varphi(x+xy) - \varphi(x) - I_{\{|y|<1\}}(y)xy\varphi'(x))\nu(dy)。$$

在这一节, 我们关注的是从一个有界区间 D 上的任一点 x 出发的轨道的平均逃逸时 $u(x) \geq 0$ 。对马氏过程的 Dynkin 公式^[3,5,6]满足下列积分-微分方程方程:

$$\begin{aligned} Au &= -1, x \in D \\ u(x) &= 0, x \in D^c \end{aligned}$$

其中生成元 A 是: $Au = f(x)u'(x) + \int_{R \setminus \{0\}} (u(x+xy) - u(x) - I_{\{|y|<1\}}(y)xyu'(x))\nu(dy)$ 。

D^c 是 D 的补集。在这篇文章里, 研究的是在 α 稳定下 Levy 过程^[7-9], 因此跳测度 $\nu(dy) = \frac{dy}{|dy|^{1+\alpha}}$, 其中 $\alpha \in (0,2)$ 。把它写成下面的形式: 对任意的 $x \in D$ 有:

$$f(x)u'(x) + \varepsilon \int_{R \setminus \{0\}} \frac{u(x+xy) - u(x) - I_{\{|y|<1\}}(y)xyu'(x)}{|y|^{1+\alpha}} dy = -1 \quad (2)$$

当 $x \in D^c, u(x) = 0$ 。方程中的积分是 Riemann 意义下的积分, 对 $\alpha \in (0,2)$ 。

3. 数值方法的设计

3.1. 逐项分析

因为这个积分-微分方程的准确解是未知的, 仍然依靠数值方法来求近似解。方程(2)中的第一项, 数值近似是使用中心差分公式: $u'(x) = (u(x+h) - u(x-h))/2h$, 其中 h 是离散化的空间步长。我们主要的工作是近似处理方程中的奇异积分项。

对任意的 $0 < h_1 < 1$, 由于被积函数的对称性, 积分项 $\int_{R[-h_1, h_1]} \frac{I_{\{|y|<1\}}(y)y}{|y|^{1+\alpha}} dy$

的值等于 0。我们把积分项分成三部分：

$$\begin{aligned} & \int_{R \setminus \{0\}} \frac{u(x+xy) - u(x) - I_{\{|y|<1\}}(y)xyu'(x)}{|y|^{1+\alpha}} dy \\ &= \int_{-\infty}^{-h_1} \frac{u(x+xy) - u(x)}{|y|^{1+\alpha}} dy + \int_{-h_1}^{h_1} \frac{u(x+xy) - u(x) - xyu'(x)}{|y|^{1+\alpha}} dy + \int_{h_1}^{+\infty} \frac{u(x+xy) - u(x)}{|y|^{1+\alpha}} dy \end{aligned} \tag{3}$$

对 $\alpha \in (0, 2)$, $x \in [a, b]$ 取较小的常数 h_1 , 使用 Taylor 展式去计算下列这个不适定的积分, 从下的分析知当 $\alpha \in (0, 2)$ 时, 它是收敛的。

$$\begin{aligned} & \int_0^{h_1} \frac{u(x+xy) - u(x) - xyu'(x)}{|y|^{1+\alpha}} dy \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{h_1} \frac{\frac{(xy)^2}{2}u''(x) + \frac{(xy)^3}{6}u'''(x) + \frac{(xy)^4}{24}u^{(4)}(\xi_1)}{|y|^{1+\alpha}} dy \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{x^2u''(x)}{2} \frac{y^{2-\alpha}}{2-\alpha} + \frac{x^3u'''(x)}{6} \frac{y^{3-\alpha}}{3-\alpha} + \frac{1}{24}x^4u^{(4)}(\eta_1) \frac{y^{4-\alpha}}{4-\alpha} \right]_{\varepsilon}^{h_1} \\ &= \frac{x^2u''(x)}{2} \frac{h_1^{2-\alpha}}{2-\alpha} + \frac{x^3u'''(x)}{6} \frac{h_1^{3-\alpha}}{3-\alpha} + \frac{1}{24}x^4u^{(4)}(\eta_1) \frac{h_1^{4-\alpha}}{4-\alpha} \end{aligned}$$

当 $0 < a < 1, 1 < b < 2$ 时, $\xi_1 \in (x, x + xh_1) \subset (x, x + h_1)$, $\eta_1 \in (x, x + xh_1) \subset (x, x + h_1)$ 。

类似有: $\int_{-h_1}^0 \frac{u(x+xy) - u(x) - xyu'(x)}{|y|^{1+\alpha}} dy = \frac{x^2u''(x)}{2} \frac{h_1^{2-\alpha}}{2-\alpha} - \frac{x^3u'''(x)}{6} \frac{h_1^{3-\alpha}}{3-\alpha} + \frac{1}{24}x^4u^{(4)}(\eta_2) \frac{h_1^{4-\alpha}}{4-\alpha}$

其中 $\eta_2 \in (x - h_1, x)$ 。

合并后有: $\int_{-h_1}^{h_1} \frac{u(x+xy) - u(x) - xyu'(x)}{|y|^{1+\alpha}} dy = x^2u''(x) \frac{h_1^{2-\alpha}}{2-\alpha} + R_1$

局部误差:

$$R_1 = \left| \frac{1}{24}x^4u^{(4)}(\eta_1) \frac{h_1^{4-\alpha}}{4-\alpha} + \frac{1}{24}x^4u^{(4)}(\eta_2) \frac{h_1^{4-\alpha}}{4-\alpha} \right| < \left| \frac{1}{24}u^{(4)}(\eta_1) \frac{h_1^{4-\alpha}}{4-\alpha} + \frac{1}{24}u^{(4)}(\eta_2) \frac{h_1^{4-\alpha}}{4-\alpha} \right| \leq \frac{1}{12}M_1 \frac{h_1^{4-\alpha}}{4-\alpha}$$

其中 $M_1 = \max_{x \in D} |u^{(4)}(x)|$, M_1 的上限没有超过文献[1]中对应的误差值。

下一步, 考虑方程(3)右边第一项和第三项的积分, 它们的形式是

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{-h_1} \frac{u(x+xy) - u(x)}{|y|^{1+\alpha}} dy + \int_{h_1}^{+\infty} \frac{u(x+xy) - u(x)}{|y|^{1+\alpha}} dy \\ &= \int_{-\infty}^{-h_1} \frac{u(x+xy)}{|y|^{1+\alpha}} dy + \int_{h_1}^{+\infty} \frac{u(x+xy)}{|y|^{1+\alpha}} dy - \frac{2}{\alpha h_1^\alpha} u(x) \end{aligned}$$

在 $x > 0$ 上,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{-h_1} \frac{u(x+xy)}{|y|^{1+\alpha}} dy + \int_{h_1}^{+\infty} \frac{u(x+xy)}{|y|^{1+\alpha}} dy \\ &= \int_{-\infty}^{x-xh_1} \frac{|x|^{1+\alpha} u(y)}{x|y-x|^{1+\alpha}} dy + \int_{x+xh_1}^{+\infty} \frac{|x|^{1+\alpha} u(y)}{x|y-x|^{1+\alpha}} dy \\ &= |x|^\alpha \int_a^{x-xh_1} \frac{u(y)}{|y-x|^{1+\alpha}} dy + |x|^\alpha \int_{x+xh_1}^b \frac{u(y)}{|y-x|^{1+\alpha}} dy \end{aligned}$$

方程(3)中的积分是非奇异且光滑的, 使用复合梯形公式对这项进行数值积分, 有二阶截断误差, 具体的过程见下节。

3.2. 方程的离散化

现在, 让 $D=(a,b)$, $0 < a < b < 2$ 取步长 h , 划分数值解的网格 $N = \frac{b-a}{h}$, 且定义节点

$x_k = a + kh, k = 0, 1, 2, \dots, N$ 。记节点数 $N_1 = \frac{1-a}{h}$, $x_{N_1} = 1$ 。

在 $x \in (a,b)$ 上, 令 $x_k + x_k h_1 = a + \left(k + a \frac{h_1}{h} + kh_1\right)h$, $x_k - x_k h_1 = a + \left(k - a \frac{h_1}{h} - kh_1\right)h$ 。

令 $L_1 = \text{int}\left(k - a \frac{h_1}{h} - kh_1\right)$, $L_2 = \text{int}\left(k + a \frac{h_1}{h} + kh_1\right)$, $y_l = a + lh$, $\text{int}(x)$ 为取整函数。

$$u'(x) = (u(x+h) - u(x-h))/2h + R_2,$$

局部截断误差: $R_2 = \frac{h}{2} \max_{x \in D} |u^{(2)}(x)|$ 。

$$u''(x) = (u(x+h) + u(x-h) - 2u(x))/h^2 + R_3,$$

局部截断误差: $R_3 = \frac{h}{3} \max_{x \in D} |u^{(3)}(x)|$ 。

下面是应用复合梯形求积公式来处理方程(3)中的积分项, 方程(3)中的积分是非奇异且光滑的, 使用复合梯形公式对这项进行数值积分^[10]有二阶截断误差。其具体的过程如下:

$$\begin{aligned} & |x|^\alpha \int_a^{x-xh} \frac{u(y)}{|y-x|^{1+\alpha}} dy + |x_k|^\alpha \int_{x+xh}^b \frac{u(y)}{|y-x|^{1+\alpha}} dy \\ &= h|x|^\alpha \sum_{l=1}^{L_1} \frac{u(y_l)}{|y_l-x|^{1+\alpha}} + h|x|^\alpha \sum_{l=L_2+1}^{N-1} \frac{u(y_l)}{|y_l-x|^{1+\alpha}} + \frac{h}{2}|x|^\alpha \left(\frac{u(y_{L_1+1})}{|y_{L_1+1}-x|^{1+\alpha}} + \frac{u(y_{L_2})}{|y_{L_2}-x|^{1+\alpha}} \right) + R_4 \end{aligned}$$

$$\text{局部截断误差: } R_4 = \left| -\frac{h^2}{12}(x-xh-a) \left(\frac{1}{x^{1+\alpha}} \right)'' \right|_{\zeta_1} - \left| \frac{h^2}{12}(b-x-xh) \left(\frac{1}{x^{1+\alpha}} \right)'' \right|_{\zeta_2},$$

由于 $x \in (a,b)$, 化简后得 $R_4 < \frac{h^2}{6h_1^{3+\alpha}}(1+\alpha)(2+\alpha)(\max(a,b) - h_1)$ 。

将方程(2)的左边离散化, 并令 $f(x) = -x+1$ 得:

$$\begin{aligned} & (-x+1)u'(x) + \varepsilon \left(\int_{-\infty}^{-h} \frac{u(x+xy) - u(x)}{|y|^{1+\alpha}} dy + \int_{-h}^h \frac{u(x+xy) - u(x) - xyu'(x)}{|y|^{1+\alpha}} dy + \int_{h_1}^{+\infty} \frac{u(x+xy) - u(x)}{|y|^{1+\alpha}} dy \right) \\ &= (-x+1)u'(x) + \varepsilon \int_{-\infty}^{-h} \frac{u(x+xy)}{|y|^{1+\alpha}} dy + \varepsilon x^2 u''(x) \frac{h_1^{2-\alpha}}{2-\alpha} + \varepsilon \int_{h_1}^{+\infty} \frac{u(x+xy)}{|y|^{1+\alpha}} dy - \varepsilon \frac{2}{\alpha h_1^\alpha} u(x) \\ &= (-x+1) \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} + \varepsilon x^2 \frac{u(x+h) + u(x-h) - 2u(x)}{h^2} \frac{h_1^{2-\alpha}}{2-\alpha} - \varepsilon \frac{2}{\alpha h_1^\alpha} u(x) \\ &+ h|x_k|^\alpha \sum_{l=1}^{L_1} \frac{u(y_l)}{|y_l-x|^{1+\alpha}} + h|x_k|^\alpha \sum_{l=L_2+1}^{N-1} \frac{u(y_l)}{|y_l-x|^{1+\alpha}} + \frac{h}{2}|x_k|^\alpha \left(\frac{u(y_{L_1+1})}{|y_{L_1+1}-x|^{1+\alpha}} + \frac{u(y_{L_2})}{|y_{L_2}-x|^{1+\alpha}} \right) + R \end{aligned}$$

$$\text{全局误差: } R = \varepsilon R_1 + (-x+1)R_2 + x \frac{h_1^{2-\alpha}}{2-\alpha} R_3 + \varepsilon R_4。$$

3.3. 全局误差分析

从上节的全局误差 R 中看到, 我们应该看到 h 和 h_1 都应该足够小, 才能使前三个误差项小。为让后一项误差项足够小, h 和 h_1 的比值应该足够小, 如果取 $h_1 = 0.2$, 则按上面分析空间步长 $h = h_1^{3+2} = 0.00032$, 因为上节中的 $R_4 < \frac{h^2}{6h_1^{3+\alpha}}(1+\alpha)(2+\alpha)(\max(a,b)-h_1)$ 。在实际的计算中, 当 $h_1 = 0.2$ 时, $h = 0.01$ 即可, 此时计算出的数据已经很稳定了。

把 $x_k = a + kh, k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ 带入到方程(2), 记 $u(x_k) = u_k$, 得代数方程:

$$\begin{aligned} & (-x_k + 1) \frac{u_{k+1} - u_{k-1}}{2h} + \varepsilon x_k^2 \frac{u_{k+1} + u_{k-1} - 2u_k}{h^2} \frac{h_1^{2-\alpha}}{2-\alpha} - \varepsilon \frac{2}{\alpha h_1^\alpha} u_k + \varepsilon h |x_k|^\alpha \sum_{l=1}^{L_1} \frac{u_l}{|y_l - x_k|^{1+\alpha}} \\ & + \varepsilon h |x_k|^\alpha \sum_{l=L_2+1}^{N-1} \frac{u_l}{|y_l - x_k|^{1+\alpha}} + \varepsilon \frac{h}{2} |x_k|^\alpha \left(\frac{u_{L_1+1}}{|y_{L_1+1} - x_k|^{1+\alpha}} + \frac{u_{L_2}}{|y_{L_2} - x_k|^{1+\alpha}} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

$$= -1$$

由于 u_j 的有界性, 当 $u_j \notin (a, b)$, u_j 的值为 0。方程(4)的确定项 $f(x) = -x+1$ 在 $x=1$ 上有一个稳定平衡点, 方程(4)对应一个线性方程组, 求解后的结果见下节。

4. 结果分析

作为对应的确定性系统 $\dot{x}_t = -1+x_t, a < 0, b > 0$, $\{1\}$ 是它唯一的吸引点(一个稳定平衡点)即几乎所有的解轨道随时间的增加, 最终都会被吸引到这一点 $\{1\}$ 。然而当这个确定性系统被非高斯 α 稳定 Levy 过程驱动时, 解轨道可能逃逸出在吸引点 $\{1\}$ 附近区域 $D = (0.5, 1.5)$ 。

现在计算这些解轨道的平均逃逸时(或平均首次逃逸时)。

图 1 和图 2 是分别在乘性噪声和加性噪声下计算平均逃逸时间的例子。

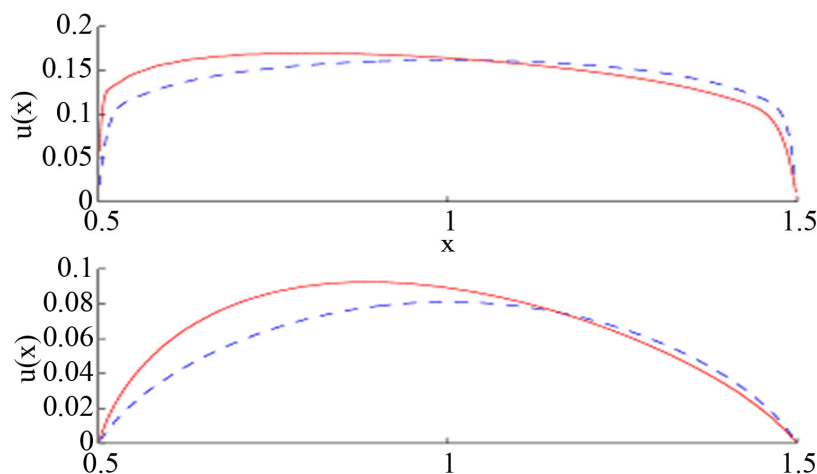


Figure 1. The mean exit time $u(x)$ for the domain $(0.5, 1.5)$; for fixed $\varepsilon = 1$, the graphs from top to bottom correspond to $\alpha = 0.5, 1.5$ respectively. The solid curve is the numerical solution under the multiplicative noises and the dashed curve is the numerical solution under the additive noises

图 1. 平均逃逸时 $u(x)$ 的曲线: 实线和虚线分别是乘性噪声下和加性噪声下的逃逸出区间 $(0.5, 1.5)$ 的平均时间, 其中跳跃度系数 $\varepsilon = 1$, 上图在 $\alpha = 0.5$ 下, 下图在 $\alpha = 1.5$ 下

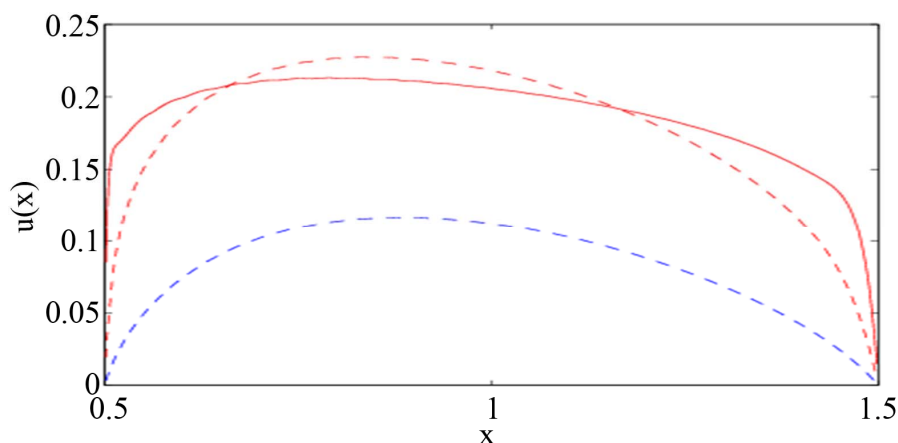


Figure 2. The mean exit time $u(x)$ for the domain $(0.5, 1.5)$: for fixed $\varepsilon = 0.2$, the red solid graph, the red dashed graph and the blue dashed graph correspond to $\alpha = 0.5, 1.0, 1.5$ respectively

图 2. 乘性噪声下的逃逸出区间 $(0.5, 1.5)$ 的平均时间 $u(x)$ 的曲线: 其中跳测度系数 $\varepsilon = 0.2$, 红色实线在 $\alpha = 0.5$ 下, 红色虚线在 $\alpha = 1.0$ 下, 蓝色虚线在 $\alpha = 1.5$ 下

注记 2: 在文章中, 主要讨论的不再是双井函数 $f(x) = -x + x^3$, 而是有一个稳定平衡点在 $x = 1$ 处的函数 $f(x) = -1 + x$ 选用平衡点在 $x = 0$ 的函数如 $f(x) = -x + x^3$ 在乘性噪声下是不可能跳出包含平衡点 $x = 0$ 的区间。这一点从方程(3)中可以看到。当 $x = 0$, 方程左边 0, 而右边是 1, 因此在乘性噪声下讨论的方程不能选用包含平衡点为 $x = 0$ 的函数, 但可以讨论平衡点不在原点的其它函数。

参考文献 (References)

- [1] Chen, H., Duan, J., Li, X., et al. (2011) A computational analysis for mean exit time under non-Gaussian Levy noises. *Applied Mathematics and Computation*, **218**, 1845-1856.
- [2] Peszat, S. and Zabczyk, J. (2007) Stochastic partial differential equations with levy processes. Cambridge University Press, Cambridge.
- [3] Applebaum, D. (2004) Levy processes and stochastic calculus. Cambridge University Press, Cambridge.
- [4] Peszat, S. and Zabczyk, J. (2007) Stochastic partial differential equations with levy processes. Cambridge University Press, Cambridge.
- [5] Sato, K.I. (1999) Levy processes and infinitely divisible distributions. Cambridge University Press, Cambridge.
- [6] Gettoor, R.K. (1961) First passage times for symmetric stable processes in space. *Transactions of the American Mathematical Society*, **101**, 75-90.
- [7] Oksendal, B. (2005) Applied stochastic control of jump diffusions. Springer-Verlag, New York.
- [8] Schuss, Z. (1980) Theory and applications of stochastic differential equations. Wiley & Sons, New York.
- [9] Naeh, T., Klosek, M.M., Matkowsky, B.J., et al. (1990) A direct approach to the exit problem. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **50**, 595-627.
- [10] Apostol, T.M. (1974) Mathematical analysis. 2nd Edition, Addison-Wesley, Boston.