

# The Maximum Sum-Balaban Index of Tree Graph with Given Vertices and Maximum Degree\*

Zhifu You<sup>1</sup>, Han Han<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Guangdong Polytechnic Normal University, Guangzhou

<sup>2</sup>South China Normal University, Guangzhou

Email: youzfh@hotmail.com, 583890363@qq.com

Received: Jul. 3<sup>rd</sup>, 2013; revised: Aug. 6<sup>th</sup>, 2013; accepted: Aug. 24<sup>th</sup>, 2013

Copyright © 2013 Zhifu You, Han Han. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

**Abstract:** In this paper, by using the graph operation, we determine the extremal graph which attains the maximum Sum-Balaban index among trees with given vertices and maximum degree.

**Keywords:** Sum-Balaban Index; Tree Graph; Greedy Tree

## 给定顶点和最大度树图的最大 Sum-Balaban 指标\*

游志福<sup>1</sup>, 韩 函<sup>2</sup>

<sup>1</sup>广东技术师范学院, 广州

<sup>2</sup>华南师范大学, 广州

Email: youzfh@hotmail.com, 583890363@qq.com

收稿日期: 2013 年 7 月 3 日; 修回日期: 2013 年 8 月 6 日; 录用日期: 2013 年 8 月 24 日

**摘 要:** 通过图的操作的方法, 本文给出了给定顶点和最大度树图中, 取得最大 Sum-Balaban 指标的极图。

**关键词:** Sum-Balaban 指标; 树图; Greedy 树

### 1. 引言

设  $G$  表示简单连通图, 其点集为  $V(G)$ 、边集为  $E(G)$ 。  $\Delta$  表示图  $G$  的最大度。  $G[X]$  表示由  $G$  的点子集  $X$  构成的诱导子图。图  $G$  的两个顶点  $u$  和  $v$  之间的距离, 定义为  $G$  中连接  $u$  和  $v$  的最短路的长度, 记为  $d_G(u, v)$ 。  $D_G(u) = \sum_{v \in V(G)} d_G(u, v)$  表示图  $G$  中顶点  $u$  的距离和。

记  $|V(G)| = n$  和  $|E(G)| = m$ 。图  $G$  的圈数  $\mu$  是从  $G$  中删去边, 使  $G$  成为无圈图的最小边数。众所周知,  $\mu = m - n + 1$ 。

连通图  $G$  的 Sum-Balaban 指标<sup>[1]</sup>定义为:

$$SJ(G) = \frac{m}{\mu + 1} \sum_{uv \in E(G)} \frac{1}{\sqrt{D_G(u) + D_G(v)}}$$

目前已有一些关于 Sum-Balaban 指标数学方面的结果<sup>[2-4]</sup>。

\*资助信息: 国家自然科学基金数学天元基金(11226283)。

设  $T$  表示一个有根点  $r$  的树。对于  $v \in V(T)$ , 称  $d(v, r)$  为  $v$  的深度。  $T$  中所有点最大深度称为  $T$  的高, 记为  $h(T)$ 。

**定义 1.1:** ([5]) 设树  $T$  有根点  $u$ , 标记  $u$  为  $u_{(0)}$ 。对于  $d = 1, 2, \dots$ ,  $T$  中具有  $d$  深度的点标记为  $u_{(0, x_1, \dots, x_d)}$ , 如果此顶点的父顶点已经标记为  $u_{(0, x_1, \dots, x_{d-1})}$ , 使得  $x_i (i = 1, 2, \dots, d)$  是一个正实数且两个子顶点  $u_{(0, x_1, \dots, x_d)}$ ,  $u_{(0, x_1, \dots, y_d)}$  满足  $x_d \neq y_d$ 。上述对  $V(T)$  的标号定义为  $T$  的根树标号, 且根树标号的下标集记为  $S(T)$ 。

**定义 1.2:** ([5]) 设  $n, \Delta \in \mathbb{Z}^+, \Delta \geq 3$ 。  $T(n, \Delta)$  是一个以  $v_0$  为根的树, 并按如下定义:  $T(1, \Delta)$  由标号为  $v_0$  的单元点构成。树  $T(n, \Delta)$  的顶点集为  $\{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ 。当  $2 \leq n \leq \Delta + 1$ ,  $T(n, \Delta)$  的边集为  $\{v_0 v_1, \dots, v_0 v_{n-1}\}$ 。当  $n > \Delta + 1$ ,  $T(n, \Delta)$  将一个叶子点  $v_{n-1}$ , 连接到  $T(n-1, \Delta)$  的点集  $\{v_0, v_1, \dots, v_{n-2}\}$  中度小于  $\Delta$  的点, 并使标号尽可能小。

## 2. 给定顶点和最大度树图的最大 Sum-Balaban 指标

树  $T_u$  的根点为  $u$ ,  $T_v$  的根点为  $v$ 。对  $V(T_u)$  和  $V(T_v)$  用根树的标号法, 分别得到标号集  $S(T_u)$  和  $S(T_v)$ 。显然  $S(T_u) \cap S(T_v) \neq \emptyset$ 。设  $U_0 = \{u_s | s \in S(T_u) \cap S(T_v)\}$ ,  $V_0 = \{v_s | s \in S(T_u) \cap S(T_v)\}$ , 则  $T[U_0]$  和  $T[V_0]$  都是树图, 且  $T[U_0] \cong T[V_0]$ 。

**定义 2.1:** ([5]) 设  $P$  是树  $T$  的以  $u$  和  $v$  为端点且  $d(u, v) = 1$  或  $2$  的一条路。  $T_u$  和  $T_v$  分别是  $T - E(P)$  的以  $u$  和  $v$  为根点的两个分支。用根树标号法对  $V(T_u)$  和  $V(T_v)$  进行标号, 分别得到  $S(T_u)$  和  $S(T_v)$ 。设

$$T' = T - \{u_s u_t | s \in S(T_u) \cap S(T_v), t \in S(T_u) \setminus S(T_v), u_s u_t \in E(T_u)\} \\ + \{v_s u_t | s \in S(T_u) \cap S(T_v), t \in S(T_u) \setminus S(T_v), u_s u_t \in E(T_u)\}.$$

从  $T$  到  $T'$  的变换, 称为  $(T_u, T_v)$ -变换。

**引理 2.2:** 设  $T'$  是由  $T$  通过  $(T_u, T_v)$ -变换得到的图, 则  $SJ(T') \geq SJ(T)$ , 且  $SJ(T') = SJ(T)$  成立当且仅当  $T' \cong T$ 。

**证明:** 设  $U_0 = \{u_s | s \in S(T_u) \cap S(T_v)\}$ ,  $U_1 = V(T_u) \setminus U_0$ ,  $V_0 = \{v_s | s \in S(T_u) \cap S(T_v)\}$  和  $V_1 = V(T_v) \setminus V_0$ 。若  $T \not\cong T'$ , 则  $U_1 \neq \emptyset$ ,  $V_1 \neq \emptyset$ 。

对任意的  $s$ , 若  $s \in S(T_u) \cap S(T_v)$ , 显然  $u_s \in U_0$ ,  $v_s \in V_0$ ,

$$D_T(u_s) = D_T(u_s, U_0) + D_T(u_s, U_1) + D_T(u_s, V_0) + D_T(u_s, V_1) \tag{1}$$

且

$$D_{T'}(v_s) = D_{T'}(v_s, V_0) + D_{T'}(v_s, U_1) + D_{T'}(v_s, U_0) + D_{T'}(v_s, V_1). \tag{2}$$

注意  $T'[U_0] \cong T[V_0]$ , 且  $T_u \cong T'[V_0 \cup U_1]$ , 因此

$$D_T(u_s, V_0) = D_{T'}(v_s, U_0), \quad D_T(u_s, U_0 + U_1) = D_{T'}(v_s, V_0 + U_1) \text{ 且}$$

$$D_T(u_s, U_1) = D_{T'}(v_s, U_1), \quad D_T(u_s, V_1) > D_{T'}(v_s, V_1).$$

$$\text{从而有 } D_T(u_s) - D_{T'}(v_s) = D_T(u_s, V_1) - D_{T'}(v_s, V_1) > 0. \tag{3}$$

类似地,

$$D_T(v_s) = D_T(v_s, U_0) + D_T(v_s, U_1) + D_T(v_s, V_0) + D_T(v_s, V_1), \tag{4}$$

$$D_{T'}(u_s) = D_{T'}(u_s, V_0) + D_{T'}(u_s, U_1) + D_{T'}(u_s, U_0) + D_{T'}(u_s, V_1). \tag{5}$$

因此,

$$D_{T'}(u_s) - D_T(v_s) = D_{T'}(u_s, V_1) - D_T(v_s, V_1) > 0. \tag{6}$$

注意到  $D_T(u_s, V_1) = D_{T'}(u_s, V_1)$  和  $D_{T'}(v_s, V_1) = D_T(v_s, V_1)$ , 由(3)和(6), 我们有

$$D_T(u_s) - D_{T'}(v_s) = D_{T'}(u_s) - D_T(v_s) = D_{T'}(u_s, V_1) - D_{T'}(v_s, V_1) > 0. \tag{7}$$

由(1), (2), (4)和(5), 我们有

$$D_{T'}(u_s) - D_T(u_s) = D_T(v_s) - D_{T'}(v_s) > 0. \tag{8}$$

设  $a = D_{T'}(u_s) - D_T(u_s)$ ,  $a' = D_{T'}(u_t) - D_T(u_t)$ ,  $b = D_T(v_s) - D_{T'}(v_s)$ ,  $b' = D_T(v_t) - D_{T'}(v_t)$ 。由(8), 则  $b = a > 0$ ,  $b' = a' > 0$ 。

设  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+a+a'}}$ , 由于  $f'(x) < 0$ , 则  $f(x)$  是关于  $x$  的单调递减函数, 并且

$$D_T(u_s) + D_T(u_t) > D_{T'}(v_s) + D_{T'}(v_t) = D_T(v_s) + D_T(v_t) - a - a', \text{ 则}$$

$$\frac{1}{\sqrt{D_T(v_s) + D_T(v_t) - a - a'}} - \frac{1}{\sqrt{D_T(v_s) + D_T(v_t)}} > \frac{1}{\sqrt{D_T(u_s) + D_T(u_t)}} - \frac{1}{\sqrt{D_T(u_s) + D_T(u_t) + a + a'}}.$$

因此

$$\frac{1}{\sqrt{D_{T'}(u_s) + D_{T'}(u_t)}} + \frac{1}{\sqrt{D_T(v_s) + D_T(v_t)}} > \frac{1}{\sqrt{D_T(u_s) + D_T(u_t)}} + \frac{1}{\sqrt{D_T(v_s) + D_T(v_t)}} \tag{9}$$

类似的, 对于任意顶点  $w \in U_1 \cup V_1$ , 可以证明:  $D_T(w) > D_{T'}(w)$ 。

这意味着下列(10)~(12)式成立:

对任意边  $e = xy \in E(T[U_1]) \cup E(T[V_1])$ , 有

$$\frac{1}{\sqrt{D_{T'}(x) + D_{T'}(y)}} > \frac{1}{\sqrt{D_T(x) + D_T(y)}}. \tag{10}$$

对任意边  $u_s w \in E(T_1) \subset E(T)$ ,  $u_s \in U_0$ ,  $s \in S(T_u) \cap S(T_v)$  且  $w \in U_1$ , 对应的边是  $v_s w \in E(T')$ , 则有

$$\frac{1}{\sqrt{D_{T'}(v_s) + D_{T'}(w)}} > \frac{1}{\sqrt{D_T(u_s) + D_T(w)}}. \tag{11}$$

对任意边  $v_s w \in E(T_2)$ ,  $v_s \in V_0$ ,  $s \in S(T_u) \cap S(T_v)$  且  $w \in V_1$ , 有

$$\frac{1}{\sqrt{D_{T'}(v_s) + D_{T'}(w)}} > \frac{1}{\sqrt{D_T(v_s) + D_T(w)}}. \tag{12}$$

若  $d(u, v) = 1$ , 对于边  $u_0 v_0$ , 由(8)有

$$\frac{1}{\sqrt{D_{T'}(u_0) + D_{T'}(v_0)}} = \frac{1}{\sqrt{D_T(u_0) + D_T(v_0)}}. \tag{13}$$

若  $d(u, v) = 2$ , 对任意  $w \in V(T) - V(T_u) - V(T_v)$ ,  $D_T(w) = D_{T'}(w)$ , 因此对边  $xy \in E(T - V(T_u) - V(T_v))$ , 有

$$\frac{1}{\sqrt{D_{T'}(x) + D_{T'}(y)}} = \frac{1}{\sqrt{D_T(x) + D_T(y)}}. \tag{14}$$

由(9)~(14)及 Sum-Balaban 指标的定义, 则  $SJ(T') > SJ(T)$ 。证毕。

**定义 2.3:** ([5])根点为  $r$ , 给定度序列的一个树图, 满足下列条件时, 称为 Greedy 树。

- 1) 对于  $h(T) > i > 0$ , 具有深度  $i$  的任何顶点的度大于或等于具有深度  $i+1$  的任何顶点的度。
- 2) 对于具有相同深度的不同顶点  $w$  和  $x$ , 且  $d(x) > d(w) \geq 2$  时,  $x$  的子顶点的度最小度大于或等于  $w$  的子顶点的最大度。
- 3) 对于具有相同深度的不同顶点  $w$  和  $x$ , 且  $d(x) = d(w) \geq 2$  时,  $x$  的子顶点的度最小度大于或等于  $w$  的子顶点的最大度。

点的最大度; 当  $x$  和  $w$  的位置交换时, 也具有一样的性质。

完全类似文献[5]中定理 11 及引理 12 的证明, 我们有以下引理 2.4 及引理 2.5:

**引理 2.4:** 具有给定度序列  $\pi = (d_1, d_2, \dots, d_n)$  的所有树图中, Greedy 树取得最大 Sum-Balaban 指标。

**证明:** 设  $T$  具有度序列  $\pi$ , 且根点为  $r$ 。

下面只需证明: 如果  $T$  不同构一个 Greedy 树, 则  $T$  可以用图的操作变为, 具有相同度序列  $\pi$  的树  $T'$ , 使得  $SJ(T) < SJ(T')$ 。

假设  $T$  不同构于一个 Greedy 树。由定义 2.3, 下列三个说明成立:

1) 存在  $x, y \in V(T)$  使得  $d(x, r) > d(y, r)$  且  $d(x) > d(y)$ 。

2) 存在具有相同深度的  $x', y' \in V(T)$ , 且  $d(y') > d(x') \geq 2$ , 并使得  $x'$  的一个子顶点  $x$  和  $y'$  的一个子顶点  $y$  满足  $d(x) > d(y)$ 。

3) 存在具有相同深度的  $x', y' \in V(T)$ , 且  $d(y') = d(x') \geq 2$ , 并使得  $x'$  的子顶点的最大度小于  $y'$  的子顶点的最大度, 和  $y'$  具有最小度的一个子顶点  $y$ ,  $x'$  具有最大度的一个子顶点  $x$ , 满足  $d(x) > d(y)$ 。

对上述三种情况之一, 设  $u, v \in V(P_{xy})$  使得  $d(u, x) = d(v, y)$  且  $d(x, v) - d(x, u) = 1$  或  $2$ 。设  $T_u$  和  $T_v$  分别是  $T - E(P_{uv})$  以  $u$  和  $v$  为根点的两个分支。给定  $V(T_u)$  (或  $V(T_v)$ ) 一个特定的有根树标号法使得:

1) 对于  $d \geq 0$ , 任意具有  $d(w) > 1$  且标号为  $u_{(0, x_1, \dots, x_d)}$  (或  $v_{(0, x_1, \dots, x_d)}$ ) 的顶点  $w$ , 其子顶点被标记为  $u_{(0, x_1, \dots, x_d, 1)}$ ,  $u_{(0, x_1, \dots, x_d, 2)}$ ,  $\dots$ ,  $u_{(0, x_1, \dots, x_d, d(w)-1)}$  (或  $v_{(0, x_1, \dots, x_d, 1)}$ ,  $v_{(0, x_1, \dots, x_d, 2)}$ ,  $\dots$ ,  $v_{(0, x_1, \dots, x_d, d(w)-1)}$ ), 且

2) 标记  $x$  为  $u_{(0, 1, \dots, 1)}$  和  $y$  为  $v_{(0, 1, \dots, 1)}$ 。

则  $T$  可由  $(T_u, T_v)$ -变换变为  $T'$ 。注意到由  $T$  到  $T'$  的变换, 将会减少满足上述三个说明的点对的个数。若  $T \not\cong T'$ , 则由引理 2.2, 结论成立。否则, 重复上面变换,  $T$  可以变成一个具有度序列  $\pi$  的新 greedy 树  $T''$ 。由于  $T \not\cong T''$ , 则由引理 2.2, 有  $SJ(T) < SJ(T'')$ , 矛盾!

从而结论成立。证毕。

**引理 2.5:** 设  $T$  和  $T'$  分别是以  $(d_1, d_2, \dots, d_n)$  和  $(d_1, \dots, d_i + 1, \dots, d_j - 1, \dots, d_n)$  为度序列的 Greedy 树, 其中  $(d_1 \geq \dots \geq d_i \geq \dots \geq d_j \geq \dots \geq d_n)$  且  $d_j \geq 1$ , 则  $SJ(T) < SJ(T')$ 。

**证明:**  $x$  和  $y$  分别是树  $T$  中具有度  $d_i$  和  $d_j$  的两个顶点。设  $u, v \in V(P_{xy})$ , 满足  $d(u, x) = d(v, y)$  且  $d(x, v) - d(x, u) = 1$  或  $2$ 。  $T_u$  和  $T_v$  分别是  $T - E(P_{uv})$  以  $u$  和  $v$  为根点的两个分支。给定  $V(T_u)$  (或  $V(T_v)$ ) 一个特定的有根树标号法使得:

1) 对于  $d \geq 0$ , 任意具有  $d(w) > 1$  且标号为  $u_{(0, x_1, \dots, x_d)}$  (或  $v_{(0, x_1, \dots, x_d)}$ ) 的顶点  $w \neq x$ , 其子顶点被标记为  $u_{(0, x_1, \dots, x_d, 1)}$ ,  $u_{(0, x_1, \dots, x_d, 2)}$ ,  $\dots$ ,  $u_{(0, x_1, \dots, x_d, d(w)-1)}$  (或  $v_{(0, x_1, \dots, x_d, 1)}$ ,  $v_{(0, x_1, \dots, x_d, 2)}$ ,  $\dots$ ,  $v_{(0, x_1, \dots, x_d, d(w)-1)}$ )。

2) 标记  $x$  为  $u_{(0, 1, \dots, 1)}$  和  $y$  为  $v_{(0, 1, \dots, 1)}$ 。

3) 标记  $x$  的子顶点为  $u_{(0, 1, \dots, 1, 1)}$ ,  $u_{(0, 1, \dots, 1, 2)}$ ,  $\dots$ ,  $u_{(0, x_1, \dots, x_d, d_i - 2)}$ ,  $u_{(0, x_1, \dots, x_d, d_i)}$ 。

4) 对于标号为  $u_{(0, 1, \dots, 1, d_i)}$  的顶点  $z$ , 和由顶点  $z$  和其后继顶点引导的子树  $T_z$ ,  $V(T_z) = V(T_u) \setminus U_0$ , 其中  $U_0 = \{u_s \mid s \in S(T_u) \cap S(T_v)\}$  (注意到在 Greedy 树  $T$  中,  $u$  的深度大于或等于  $v$  的深度, 因此在  $T_v$  中, 存在一个以  $v$  为根点的子树同构于  $T_u$ )。

则由  $(T_u, T_v)$ -变换,  $T$  可变为  $T''$ , 且  $T''$  具有度序列  $(d_1, \dots, d_i + 1, d_j - 1, \dots, d_n)$  和  $T \not\cong T''$ , 由引理 2.2 和 2.4, 则  $SJ(T) < SJ(T'') < SJ(T')$ 。证毕。

设  $\pi = (d_1, d_2, \dots, d_n)$  和  $\pi' = (d'_1, d'_2, \dots, d'_n)$  是两个非增  $r$  的图度序列。如果  $\pi \neq \pi'$ ,  $\sum_{i=1}^n d_i = \sum_{i=1}^n d'_i$ , 且对于  $j = 1, 2, \dots, n$ , 有  $\sum_{i=1}^j d_i \leq \sum_{i=1}^j d'_i$  成立, 则称  $\pi'$  优越于  $\pi$ 。

**推论 2.6:** 设  $T$  和  $T'$  分别是以  $\pi$  和  $\pi'$  为度序列的 Greedy 树, 并且  $\pi'$  优越于  $\pi$ , 则  $SJ(T) \leq SJ(T')$ , 等号成立当且仅当  $T \cong T'$ 。

由引理 2.4, 引理 2.5 及推论 2.6, 则下列定理成立:

**定理 2.7:** 设  $T$  是有  $n$  个顶点, 最大度为  $\Delta$  的树, 则  $SJ(T) \leq SJ(T(n, \Delta))$ , 等号成立当且仅当  $T \cong T(n, \Delta)$ 。

## 参考文献 (References)

- [1] Balaban, A.T., Khadikar, P.V. and Aziz, S. (2010) Comparison of topological indices based on iterated “sum” versus “product” operations. *Iranian Journal of Mathematical Chemistry*, **1**, 43-67.
- [2] Deng, H. (2011) On the Sum-Balaban index. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, **66**, 273-284.
- [3] Xing, R., Zhou, B. and Grovac, A. (2012) On Sum-Balaban index. *Ars Combinatoria*, **104**, 211-223.
- [4] You, L. and Han, H. (2013) The maximum Sum-Balaban index of trees with given diameter. *Ars Combinatoria*, Accepted.
- [5] Dong, H. and Guo, X. (2011) Character of trees with extreme Balaban index. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, **66**, 261-272.