

Integrable Discretization of the Coupled AKNS Equation

Jia Wang, Lihua Zhang, Desheng Li

School of Mathematics and System Science, Shenyang Normal University, Shenyang
Email: 2456953692@qq.com

Received: Sep. 13th, 2013; revised: Oct. 8th, 2013; accepted: Oct. 16th, 2013

Copyright © 2013 Jia Wang et al. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

Abstract: This paper mainly studied the integrable discretization of the second order coupled AKNS equation. First of all, some new N soliton solutions of the semi-discrete double linear derivative equation of the second order coupled AKNS equation are got by using the Hirota method and Maple. Then, the full discrete bilinear derivative equation is obtained through the method of discrete time of the semi-discrete double linear derivative equation and its N soliton solutions are found out. Finally, the difference-difference AKNS equation is obtained by an appropriate transformation.

Keywords: AKNS Equation; The Hirota Method; Interable Discretization; Soliton Solution

耦合的 AKNS 方程的可积离散化

王 佳, 张丽华, 李德生

沈阳师范大学数学与系统科学学院, 沈阳
Email: 2456953692@qq.com

收稿日期: 2013 年 9 月 13 日; 修回日期: 2013 年 10 月 8 日; 录用日期: 2013 年 10 月 16 日

摘 要: 本文主要研究了耦合的二阶 AKNS 方程的可积离散化。首先对耦合的二阶 AKNS 方程的半离散双线性导数方程运用 Hirota 方法和 Maple 求出了其新的 N-孤子解; 然后通过对半离散的双线性导数方程中的时间变量进行离散化, 得到全离散的双线性导数方程并对其进行了求解; 最后通过适当的变换得出差分 - 差分 AKNS 方程。

关键词: AKNS 方程; Hirota 方法; 可积离散化; 孤子解

1. 引言

在孤子理论中, AKNS 方程主要用来描述非一致媒质波, 因此具有重要的物理背景, 它的解也可以描述一类耗散波, 因此对于 AKNS 方程的研究具有重要的实际意义^[1]。到目前为止人们对连续的 AKNS 方程已经有了诸多研究^[2-4], 对于离散的 AKNS 方程, 陈守婷等人给出了半离散 AKNS 系统的对称与代数结构^[5], 丁大军曾在文献[6]给出这类 AKNS 方程的半离散形式及其孤子解。本文在这些工作的基础上首先用 Hirota 方法求出了 AKNS 方程的半离散形式的其它 N-孤子解, 接着将该 AKNS 方程的半离散形式进行全离散化并求出了其孤子解, 最后通过适当的变换得到差分 - 差分的 AKNS 方程。因这类方程在流体力学, 非线性光学和等离子体物理中有大量的实践和理论应用^[7], 因此对其进行研究具有重要的理论和现实意义。

2. AKNS 方程的离散化

考虑一般的一阶向量谱问题: AKNS 谱问题

$$\phi_x = M\phi, M = \begin{pmatrix} -\mu & q \\ r & \mu \end{pmatrix}, \phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix},$$

与本征函数随 t 的时间发展式

$$\phi_t = N\phi, N = \begin{pmatrix} R & S \\ T & -R \end{pmatrix},$$

其中 $q = q(t, x), r = r(t, x)$ 是一对光滑的位势函数, μ 是谱参数, 而 R, S 和 T 是关于变量 (t, x) 以及 q, r 和谱参数 μ 的待定函数。将矩阵 M, N 带入相容性条件, 即零曲率方程

$$M_t - N_x + [M, N] = 0, [M, N] = MN - NM。$$

通过复杂的幂级数展开, 可以得到等谱的 AKNS 微分方程族:

$$\begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix}_t = L^n \begin{pmatrix} -q \\ r \end{pmatrix}, (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$L = \kappa \partial + 2(q, -r)^T \partial^{-1} (r, q), \kappa = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

令 $n = 2$, 可以得到非平凡的方程

$$\begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} -q_{xx} + 2q^2 r \\ r_{xx} - 2qr^2 \end{pmatrix}。$$

称上述方程为二阶的 AKNS 方程, 对其进行有理变换 $q = \frac{g}{f}, r = \frac{h}{f}$ 以及双线性算子运算得到了该二阶 AKNS 方程的双线性形式:

$$(D_t + D_x^2) g \cdot f = \frac{g}{f} (D_x^2 f \cdot f + 2g \cdot f) \tag{1}$$

$$(D_t - D_x^2) h \cdot f = -\frac{h}{f} (D_x^2 f \cdot f + 2g \cdot f) \tag{2}$$

由此可以得到下列连续的双线性导数方程:

$$(D_t + D_x^2) g \cdot f = 0 \tag{3}$$

$$(D_t - D_x^2) h \cdot f = 0 \tag{4}$$

$$D_x^2 f \cdot f + 2g \cdot f = 0 \tag{5}$$

对方程(3)~(5)进行离散化, 令: $D_x^2 = 2(\cosh D_n - 1)$, 方程(3)~(5)可改写成如下的形式^[6](也就是方程(3)~(5)的半离散双线性形式):

$$(D_t + 2 \cosh D_n - 2) g_n \cdot f_n = 0 \tag{6}$$

$$(D_t - 2 \cosh D_n + 2) h_n \cdot f_n = 0 \tag{7}$$

$$(2 \cosh D_n - 2) f_n \cdot f_n + 2g_n \cdot f_n = 0 \tag{8}$$

即:

$$g_{n,t} \cdot f_n - g_n \cdot f_{n,t} + g_{n+1} \cdot f_{n-1} + g_{n-1} \cdot f_{n+1} - 2g_n \cdot f_n = 0 \tag{9}$$

$$h_{n,t} \cdot f_n - h_n \cdot f_{n,t} - h_{n+1} \cdot f_{n-1} - h_{n-1} \cdot f_{n+1} + 2h_n \cdot f_n = 0 \tag{10}$$

$$f_{n+1} \cdot f_{n-1} - f_n \cdot g_n - g_n \cdot g_n - f_n \cdot f_n = 0 \tag{11}$$

这里 $f(n)$ 与 $g(n)$ 是关于离散变量 n 的函数, 定义微分算子 $e^{\varepsilon D_n}$, 即

$$e^{\varepsilon D_n} f(n) \cdot g(n) = f(n + \varepsilon) \cdot g(n - \varepsilon) \tag{12}$$

其逆算子 $e^{-\varepsilon D_n}$ 作用在积 $f(n) \cdot g(n)$ 时, 有

$$e^{-\varepsilon D_n} f(n) \cdot g(n) = f(n - \varepsilon) \cdot g(n + \varepsilon) \tag{13}$$

之后运用 Hirota 方法以及 Maple 可求出方程(9)~(11)的 N-孤子解, 限于篇幅这里仅列出 2-孤子解:

$$g_n = e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + a(1,1',2')e^{\xi_1 + \eta_1 + \eta_2} + a(2,1',2')e^{\xi_2 + \eta_1 + \eta_2} \tag{14}$$

$$h_n = e^{\xi_1} + e^{\xi_2} + a(1,2,1')e^{\xi_1 + \xi_2 + \eta_1} + a(1,2,2')e^{\xi_1 + \xi_2 + \eta_2} \tag{15}$$

$$f_n = 1 + a(1,1')e^{\xi_1 + \eta_1} + a(2,1')e^{\xi_2 + \eta_1} + a(1,2')e^{\xi_1 + \eta_2} + a(2,2')e^{\xi_2 + \eta_2} + a(1,2,1',2')e^{\xi_1 + \xi_2 + \eta_1 + \eta_2} \tag{16}$$

其中:

$$e^{\eta_i} = P_i^{(n-n_0)} e^{-\omega_i t} \tag{17}$$

$$e^{\xi_i} = M_i^{(n-n_0)} e^{-\sigma_i t} \tag{18}$$

$$\omega_i = \frac{(P_i - 1)^2}{P_i} \tag{19}$$

$$\sigma_i = -\frac{(M_i - 1)^2}{M_i} \tag{20}$$

$$a(1,1',2') = -\frac{M_1^2 (P_1 - P_2)^2}{(M_1 P_1 - 1)^2 (M_1 P_2 - 1)^2} \tag{21}$$

$$a(2,1',2') = -\frac{M_2^2 (P_1 - P_2)^2}{(M_2 P_1 - 1)^2 (M_2 P_2 - 1)^2} \tag{22}$$

$$a(1,2,1') = -\frac{P_1^2 (M_1 - M_2)^2}{(P_1 M_1 - 1)^2 (P_1 M_2 - 1)^2} \tag{23}$$

$$a(1,2,2') = -\frac{P_2^2 (M_1 - M_2)^2}{(P_2 M_2 - 1)^2 (P_2 M_1 - 1)^2} \tag{24}$$

$$a(1,1') = -\frac{P_1 M_1}{(P_1 M_1 - 1)^2} \tag{25}$$

$$a(2,1') = -\frac{P_1 M_2}{(P_1 M_2 - 1)^2} \tag{26}$$

$$a(1,2') = -\frac{P_2 M_1}{(P_2 M_1 - 1)^2} \tag{27}$$

$$a(2,2') = -\frac{P_2 M_2}{(P_2 M_2 - 1)^2} \tag{28}$$

$$a(1, 2, 1', 2') = \frac{(P_1 - P_2)^2 (M_1 - M_2)^2 M_1 M_2 P_1 P_2}{(M_1 P_1 - 1)^2 (M_2 P_1 - 1)^2 (M_1 P_2 - 1)^2 (M_2 P_2 - 1)^2} \quad (29)$$

注意到方程(3)~(5)在下列变换下是保持不变的:

$$f \rightarrow f \cdot e^{\alpha x + \beta t} \quad (30)$$

$$g \rightarrow g \cdot e^{\alpha x + \beta t} \quad (31)$$

$$h \rightarrow h \cdot e^{\alpha x + \beta t} \quad (32)$$

这里 α, β 是常数, 而方程(6)~(8)在下列变换下也是不变的:

$$f_n \rightarrow f_n \cdot e^{\alpha n + \beta t} \quad (33)$$

$$g_n \rightarrow g_n \cdot e^{\alpha n + \beta t} \quad (34)$$

$$h_n \rightarrow h_n e^{\alpha n + \beta t} \quad (35)$$

因此假设关于时间离散的双线性方程在下列变换下也是不变的:

$$f_n^m \rightarrow f_n^m \cdot e^{\alpha n + \beta m} \quad (36)$$

$$g_n^m \rightarrow g_n^m \cdot e^{\alpha n + \beta m} \quad (37)$$

$$h_n^m \rightarrow h_n^m e^{\alpha n + \beta m} \quad (38)$$

这里 $t = m\delta$, m 是整数。

定义两个算子: $D_t g_n \cdot f_n = \frac{dg}{dt} f - \frac{df}{dt} g$, $D_t h_n \cdot f_n = \frac{dh}{dt} f - \frac{df}{dt} h$, 并用下面的差分算子代替它们中的微分算子^[8]:

$$\frac{df}{dt} \rightarrow \delta^{-1} [f_n^{m+1} - f_n^m] \quad (39)$$

$$\frac{dg}{dt} \rightarrow \delta^{-1} [g_n^{m+1} - g_n^m] \quad (40)$$

$$\frac{dh}{dt} \rightarrow \delta^{-1} [h_n^{m+1} - h_n^m] \quad (41)$$

由此得到关于时间差分的双线性算子:

$$D_t g_n \cdot f_n \rightarrow \delta^{-1} [g_n^{m+1} \cdot f_n^m - g_n^m \cdot f_n^{m+1}] \quad (42)$$

$$D_t h_n \cdot f_n \rightarrow \delta^{-1} [h_n^{m+1} \cdot f_n^m - h_n^m \cdot f_n^{m+1}] \quad (43)$$

对方程(6)~(7)使用(42)和(43)可得到如下全离散的双线性方程:

$$g_n^{m+1} \cdot f_n^m - g_n^m \cdot f_n^{m+1} + \delta [g_{n+1}^m \cdot f_{n-1}^m + g_{n-1}^m \cdot f_{n+1}^m - 2g_n^m \cdot f_n^m] = 0 \quad (44)$$

$$h_n^{m+1} \cdot f_n^m - h_n^m \cdot f_n^{m+1} - \delta [h_{n+1}^m \cdot f_{n-1}^m - h_{n-1}^m \cdot f_{n+1}^m - 2h_n^m \cdot f_n^m] = 0 \quad (45)$$

由于方程(44)~(45)在变换(36)~(38)下是改变的, 所以下面考虑方程(44)~(45)的耦合方程(46)~(49):

$$g_n^{m+1} \cdot f_n^m - g_n^m \cdot f_n^{m+1} + \delta [g_{n+1}^m \cdot f_{n-1}^{m+1} + g_{n-1}^{m+1} \cdot f_{n+1}^m - 2g_n^{m+1} \cdot f_n^m] = 0 \quad (46)$$

$$g_n^{m+1} \cdot f_n^m - g_n^m \cdot f_n^{m+1} + \delta [g_{n+1}^{m+1} \cdot f_{n-1}^m + g_{n-1}^m \cdot f_{n+1}^{m+1} - 2g_n^m \cdot f_n^{m+1}] = 0 \quad (47)$$

$$h_n^{m+1} \cdot f_n^m - h_n^m \cdot f_n^{m+1} - \delta [h_{n+1}^m \cdot f_{n-1}^{m+1} - h_{n-1}^{m+1} \cdot f_{n+1}^m - 2h_n^{m+1} \cdot f_n^m] = 0 \quad (48)$$

$$h_n^{m+1} \cdot f_n^m - h_n^m \cdot f_n^{m+1} - \delta [h_{n+1}^{m+1} \cdot f_{n-1}^m - h_{n-1}^m \cdot f_{n+1}^{m+1} - 2h_n^m \cdot f_n^{m+1}] = 0 \quad (49)$$

方程(46)~(49)在方程变换(36)~(38)下是不变的,且方程(46)和方程(47)、方程(48)和方程(49)通过适当的坐标变换可以互相转化,在文献[8]中已引用过相同的结论,又方程(8)在变换(36)~(38)下也是保持不变的,由此我们得到(6)~(8)的全离散的双线性形式如下:

$$g_n^{m+1} \cdot f_n^m - g_n^m \cdot f_n^{m+1} + \delta [g_{n+1}^m \cdot f_{n-1}^{m+1} + g_{n-1}^{m+1} \cdot f_{n+1}^m - 2g_n^{m+1} \cdot f_n^m] = 0 \quad (50)$$

$$h_n^{m+1} \cdot f_n^m - h_n^m \cdot f_n^{m+1} - \delta [h_{n+1}^m \cdot f_{n-1}^{m+1} - h_{n-1}^{m+1} \cdot f_{n+1}^m - 2h_n^{m+1} \cdot f_n^m] = 0 \quad (51)$$

$$f_{n+1}^m \cdot f_{n-1}^m - f_n^m \cdot f_n^m + g_n^m \cdot h_n^m = 0 \quad (52)$$

运用 Hirota 方法求出方程(50)~(52)的 N-孤子解,这里给出 2-孤子解:

$$g_n = e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + a(1,1',2')e^{\xi_1 + \eta_1 + \eta_2} + a(2,1',2')e^{\xi_2 + \eta_1 + \eta_2} \quad (53)$$

$$h_n = e^{\xi_1} + e^{\xi_2} + a(1,2,1')e^{\xi_1 + \xi_2 + \eta_1} + a(1,2,2')e^{\xi_1 + \xi_2 + \eta_2} \quad (54)$$

$$f_n = 1 + a(1,1')e^{\xi_1 + \eta_1} + a(2,1')e^{\xi_2 + \eta_1} + a(1,2')e^{\xi_1 + \eta_2} + a(2,2')e^{\xi_2 + \eta_2} + a(1,2,1',2')e^{\xi_1 + \xi_2 + \eta_1 + \eta_2} \quad (55)$$

其中:

$$e^{\eta_i} = \frac{P_i^{(n-n_0)}}{\Omega_i^m} \quad (56)$$

$$e^{\xi_i} = \frac{M_i^{(n-n_0)}}{\Psi_i^m} \quad (57)$$

$$\Omega_i^m = \frac{P_i - 2P_i\delta + \delta}{P_i(1 - \delta P_i)} \quad (58)$$

$$\Psi_i^m = \frac{M_i - \delta + 2\delta M_i}{M_i(1 + \delta M_i)} \quad (59)$$

其系数与前面半离散双线性导数方程(6)~(8)的 2 孤子解的相应系数相同。

现在通过下面的变换把全离散双线性方程(50)~(52)转化成非线性差分 - 差分方程,为此令:

$$g_n^m = v_n^m \cdot f_n^m \quad (60)$$

$$h_n^m = u_n^m \cdot f_n^m \quad (61)$$

把变换(60)~(61)带入到变换(50)~(52)中,有:

$$v_n^{m+1} - v_n^m + \delta \frac{f_{n+1}^m - f_{n-1}^{m+1}}{f_n^{m+1} - f_n^m} [v_{n+1}^m + v_{n-1}^{m+1}] - 2\delta \cdot v_n^{m+1} = 0 \quad (62)$$

$$u_n^{m+1} - u_n^m - \delta \frac{f_{n+1}^m - f_{n-1}^{m+1}}{f_n^{m+1} - f_n^m} [u_{n+1}^m - u_{n-1}^{m+1}] - 2\delta \cdot u_n^{m+1} = 0 \quad (63)$$

$$\frac{f_{n+1}^m \cdot f_{n-1}^m}{f_n^m \cdot f_n^m} = 1 - v_n^m \cdot u_n^m \quad (64)$$

令:

$$\Gamma_n^m = \frac{\frac{f_{n+1}^m \cdot f_{n-1}^{m+1}}{f_n^{m+1} \cdot f_n^m}}{\frac{f_{n+1}^m \cdot f_{n-1}^m}{f_n^{m+1} \cdot f_n^m}} = \frac{f_n^m \cdot f_{n-1}^{m+1}}{f_n^{m+1} \cdot f_{n-1}^m} \quad (65)$$

由此方程(62)~(63)可变成如下形式:

$$v_n^{m+1} - v_n^m + \delta [1 - v_n^m \cdot u_n^m] \Gamma_n^m [v_{n+1}^m + v_{n-1}^{m+1}] - 2\delta \cdot v_n^{m+1} = 0 \quad (66)$$

$$u_n^{m+1} - u_n^m + \delta [1 - v_n^m \cdot u_n^m] \Gamma_n^m [v_{n+1}^m + v_{n-1}^{m+1}] - 2\delta \cdot v_n^{m+1} = 0 \quad (67)$$

令 Γ_{n+1}^m 与 Γ_n^m 相比将得到:

$$\frac{\Gamma_{n+1}^m}{\Gamma_n^m} = \frac{\frac{f_{n+1}^m \cdot f_n^{m+1}}{f_{n+1}^{m+1} \cdot f_n^m}}{\frac{f_n^m \cdot f_{n-1}^{m+1}}{f_n^{m+1} \cdot f_{n-1}^m}} = \frac{1 - v_n^m \cdot u_n^m}{1 - v_n^{m+1} \cdot u_n^{m+1}} \quad (68)$$

由此得到差分 - 差分 AKNS 方程:

$$v_n^{m+1} - v_n^m + \delta [1 - v_n^m \cdot u_n^m] \Gamma_n^m [v_{n+1}^m + v_{n-1}^{m+1}] - 2\delta \cdot v_n^{m+1} = 0 \quad (69)$$

$$u_n^{m+1} - u_n^m + \delta [1 - v_n^m \cdot u_n^m] \Gamma_n^m [v_{n+1}^m + v_{n-1}^{m+1}] - 2\delta \cdot v_n^{m+1} = 0 \quad (70)$$

$$\frac{\Gamma_{n+1}^m}{\Gamma_n^m} = \frac{\frac{f_{n+1}^m \cdot f_n^{m+1}}{f_{n+1}^{m+1} \cdot f_n^m}}{\frac{f_n^m \cdot f_{n-1}^{m+1}}{f_n^{m+1} \cdot f_{n-1}^m}} = \frac{1 - v_n^m \cdot u_n^m}{1 - v_n^{m+1} \cdot u_n^{m+1}} \quad (71)$$

3. 小结

本文主要做了下列工作: 1) 对耦合的二阶 AKNS 方程的半离散双线性形式用 Hirota 方法进行求解, 得到了它的新的 N 孤子解; 2) 对耦合的二阶 AKNS 方程的半离散双线性形式进行了全离散化, 并用 Hirota 方法求得了全离散双线性方程的 N 孤子解; 3) 通过适当的变换求出差分 - 差分 AKNS 方程, 但未对其进行求解。由于这类方程有很强的实际背景, 因此对其进行研究很有意义, 所以我们将另文中对最后得到差分 - 差分 AKNS 方程可积性质进行研究。

参考文献 (References)

- [1] Bi, J.-B., Sun, Y.-P. and Chen, D.-Y. (2006) Soliton solutions for nonisospectral AKNS equation by Hirota method. *Communications in Theoretical Physics (Beijing, China)*, **45**, 398-400.
- [2] Sun, Y.-P. and Chen, D.-Y. (2006) Integrable couplings and new exact solutions for the nonisospectral AKNS equation. *International Journal of Modern Physics B*, **20**, 925-935.
- [3] 姚玉芹 (2007) (2+1)维孤子方程的精确解与可积系统. 上海大学, 上海.
- [4] 季杰 (2007) 若干离散可积系统的对称与反向 AKNS 方程的精确解. 上海大学, 上海.
- [5] 陈守婷 (2011) 半离散 AKNS 系统的对称与代数结构. 上海大学, 上海.
- [6] 丁大军 (2011) 一类孤子方程的可积离散化. 浙江师范大学, 浙江.
- [7] 孙玉娟, 丁琦, 梅建琴, 张鸿庆 (2013) D-AKNS 方程的代数几何解. *数学物理学报*, **2**, 276-284.
- [8] Hirota, R. (2000) Discretization of coupled modified KdV equations. *Chaos, Solitons and Fractals*, **11**, 77-84.