Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2014, 3, 49-53
Published Online May 2014 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2014.32008

Upper Bound for the Number of Vertices of Color-Critical Graphs on Surfaces

Qingqing Li, Fugang Chao, Weihua Lu, Han Ren

Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai
Email: chaofugang@126.com, hren@math.ecnu.edu.cn

Received: Mar. 18th, 2014; revised: Apr. 16th, 2014; accepted: Apr. 22nd, 2014

Abstract

Dirac observed that, for each fixed surface and each natural number $k \geq 8$, there are only finitely many k-color-critical graphs on S. Mohar and Thomassen proved that for a surface S of genus $g \geq 2$, every 7-color-critical graph on S has less than $138(g - 1)$ vertices. Using Euler formula and the critical-graphs methods of Gallai, we improve this result and give a simple proof that the number of 7-color-critical graphs is finite. We also give unified expression for an upper bound of vertices of k-color-critical graphs ($k \geq 7$) on surfaces.

Keywords

Embedding, Genus, Coloring, Color-Critical Graph

曲面上色临界图点数的上界

李青青，晁福刚，路伟华，任　韩

华东师范大学数学系，上海
Email: chaofugang@126.com, hren@math.ecnu.edu.cn

收稿日期：2014年3月18日；修回日期：2014年4月16日；录用日期：2014年4月22日

摘　要

Dirac观察到：对每个固定的曲面S和每个固定的自然数$k \geq 8$，曲面S上仅有有限多个k-色临界图。Mohar

和Thomassen证明了：对于亏格$g \ge 2$的曲面S，曲面S上的7-色临界图的点数少于$138(g-1)$。我们借助于Euler公式和Gallai所发展起来的研究色临界图的方法，改进了这个结果，给出了曲面S上的7-色临界图的个数是有限的一个比较简洁的证明。除此以外，我们还给出曲面S上的每一个k-色临界图($k \ge 7$)的点数上界的一个统一的表达式。

关键词

嵌入，亏格，着色，色临界图

1. 引言

图 G 是由有限的点集 $V(G)$ 和称之为边的无序的点对的集合 $E(G)$构成。如果边 xy 表现，我们称 x 和 y 相邻或者相连，x 和 y 是邻点。点 x 的度是指其邻点的数目，记作 $d(x)$。如果所有的点的度数都是 r，那么 G 是 r-正则的。如果 H 是 G 的一个子图，称 $G(H)$是 H 的诱导子图，它是由 H 及 G 中连接 H 的两个点的所有边组成。我们定义 $G-H=G\big(V(G)-V(H)\big)$。如果 v 是图 G 中的一个点，那么或 $N(v)$ 是 G 的由 v 的邻点诱导的子图。K_n 是 n 个点的完全图；也就是说，K_n 的所有点的度数都是 $n-1$。

曲面 S 是一个没有边界的、紧的、连通的 2-维流形。曲面分类定理告诉我们：每个曲面或者同胚于 S_g，添加了 g 个手柄的球，或者同胚于 N_k，添加了 k 个叉帽的球。这个定理是由 Möbius[1]和 Jordan[2]最早提出的。Thomassen[3]给出了它的一个简单而又严格的证明。令 S_g 和 N_k 表示亏格为 g(或叉帽数为 k)的可定向(或不可定向)曲面。一个图 G 的亏格 $g(G)$(或不可定向亏格(G)，也称叉帽数)是最小的整数 g(或 k)，使得 G，可以嵌入到 S_g (或 N_k)上，且边为两两不交的简单闭曲线。G 在 $S_{g(G)}$ 上的嵌入总是 2-胞腔嵌入(见[3])。当 $S=S_g$ 时，曲面 S 的 Euler 亏格为 γ=2g，当 $S=N_k$ 时，曲面 S 的 Euler 亏格为 $\gamma=k$。特别地，$S_0=N_0$ 是球，S_1 是环面，N_1 是射影平面，N_2 是 Klein 瓶。

记 n，e，f 分别为图 G 的边数、点数和面数。经典的 Euler 公式[4]告诉我们：$n-e+f=2-\gamma$，其中 γ 为图 G 的 Euler 亏格。更一般地，我们可以分成可定向和不可定向曲面来考虑。设一个连通图 G 是曲面 S 上的一个 2-胞腔嵌入，其中 $S=S_g$ 或 $S=N_k$。称一个面的边界为一条面迹。分别记面的数目为 f，$|V(G)|=n$ 和 $|E(G)|=e$，Euler 公式可以写成如下形式：$n-e+f$ 等于 $2-2g$ (当 $S=S_g$)或 $2-k$ (当 $S=N_k$)。

图 G 的一个嵌入是一个有序对 $\Pi=(\pi,\lambda)$，其中 $\pi=\{\pi_v | v\in V(G)\}$ 是一个旋转系统(这意味着，对每个点 v，π_v 是与 v 关联的边的一个轮换)，λ 是分配给每条边 $e\in E(G)$ 一个符号 $\lambda(e)\in\{-1,1\}$ 的一个符号映射。给定 G 的一个嵌入 Π，我们说 G 是 Π-嵌入的。Edmonds[5]和 Heffter[6]的结果表明：图 G 在某个曲面 S 上一个嵌入是由它的旋转系统确定。

图 G 的一个 k-着色是一个映射 $f: V(G)\to\{1,2,\cdots,k\}$，(称 $1,2,\cdots,k$ 为颜色)，使得任意两个相邻的顶点都分配到不同的颜色。称图 G 是可 k-着色的，如果 G 有一个 k-着色。图 G 的色数，记作$\chi(G)$，是最小的数 k，使得 G 有一个 k-着色，但没有 $(k-1)$-着色。曲面嵌入图的色数，是指嵌入到某个曲面上的图的最大色数。在研究曲面嵌入图的着色问题时，色临界图起着重要的作用。称一个图 G 为 k-色临界的，如果 G 不是 $(k-1)$-色的，但它的每个真子图都是 $(k-1)$-色的。

当研究曲面嵌入图的着色问题时，因为许多的信息隐藏在了亏格的后面，所以问题就变得有些扑朔迷离。在平面图的四色猜想还未解决的时候，数学家为了研究这个猜想，对曲面嵌入图的色数进行了探究。Heawood[7]证明了：如果 S 不是球，那么嵌入到 S 上的每个图至多使用 $h(\gamma)=\frac{1}{2}\left(7+\sqrt{1+49g}\right)$

种不同的颜色，其中 g 为 S 的亏格。Ringel 和 Youngs[8]证明了这个结果对除了 Klein 瓶以外的所有曲面都是最好可能的。嵌入到 Klein 瓶上的图仅需 6 种颜色，而 Heawood 的界告诉我们 Klein 瓶上的嵌入图的最大色数为 7，这个结果是由 Franklin[9]得到的。Dirac[10]，Albertson 和 Hutchinson[11]证明了：曲面 S 上的一个图可以用少于 $h(\gamma)$种颜色着色，除非它包含一个 $h(\gamma)$个点的完全图作为子图。

研究曲面上的色临界图，既要探讨它的组合特征，又要考虑它在曲面上的嵌入行为，所以有一定的难度。1997 年，Gimbel 和 Thomassen[12]提出了曲面色临界图猜想：令 S 是任意一个固定的曲面，令 k，q 是两个>2 的固定的自然数，曲面 S 上是否存在无限多围长为 q 的 k-色临界图。这是一个富有创造力的设想。Erdös 关于大围长同时有大色数的存在性结果为这个想法提供了基本依据。

如果在上述的猜想中，令 q=3，我们可以得到一个弱版本的曲面色临界图猜想：曲面 S 上是否存在无限多的 k-色临界图。这个问题是由 Dirac[13]最先开始研究的。他观察到：对每个固定的曲面 S，和每个固定的自然数 k≥8，曲面 S 上仅有有限多个 k-色临界图。Mohar 和 Thomassen[14]证明了：对于亏格 $g \ge 2$ 的曲面 S，曲面 S 上的 7-色临界图的点数少于 $138(g-1)$。Gallai[15]给出了 k-色临界图中所有度数为 $k-1$ 的点诱导子图的一个优美的刻画：k-色临界图中所有度数为 $k-1$ 的点诱导出一个子图，它的块或者是奇圈或者是完全图。我们借助于 Euler 公式和 Gallai 所发展起来的研究色临界图的方法，改进了 Mohar 和 Thomassen 的这个结果，给出了曲面 S 上的 7-色临界图的个数是有限的一个比较简洁的证明。除此以外，我们还给出曲面 S 上的每一个 k-色临界图 $(k \ge 7)$ 的点数上界的一个统一的表达式。

2. 主要定理及其证明

定理 1.1：曲面 S 上的 7-色临界图 G 的点数至多为 $120(g-1)$，其中 $g \ge 2$。

证明：反证法。假定曲面 S 上的 7-色临界图 G 有多于 $120(g-1)$ 个点。Euler 公式结合平均度的方法，可以推出对固定的曲面 S 和嵌入到 S 上一个足够大的图 G，G 一定有一个度数至多为 6 的点。事实上，由 Euler 公式可知，曲面嵌入图的边数 $e \le 3n+6(g-1)$，进而 $2e/n \le 6+12(g-1)/n$，曲面 S 上的 7-色临界图有多于 $120(g-1)$ 个点，所以 G 一定有一个度数至多为 6 的点。

下证曲面 S 上的 7-色临界图 G 有多于 $120(g-1)$ 个点时，一定有一个 6 度点，使得这个 6 度点的 6 个邻点全是 6 度点且这个 6 度点关联的面全是三角形。

令 v，e，f 分别表示图 G 的点数、边数和面数，v_i 表示度数为 i 的点数，f_i 表示度数为 i 的面数。我们有 $v=\sum_i v_i$，$f=\sum_i f_i$ 和 $2e=\sum_i iv_i=\sum_i f_i$ 成立。由 Euler 公式，$v-e+f=2-2g$ 得

$$6(2-2g)=6v-6e+6f=(6v-2e)+(6f-4e)=\sum_{i\ge 6}(i-6)v_i+\sum_{i\ge 4}(i-3)f_i。$$

又因为曲面 S 上的 7-色临界图 G 的所有点的度数均≥6。上式可以变形为

$$\sum_{i\ge 7}(i-6)v_i+2\sum_{i\ge 4}(i-3)f_i=12(g-1)$$

这个等式左边的两项均是非负的，有 $\sum_{i\ge 7}(i-6)v_i \le 12(g-1)$ 和 $\sum_{i\ge 4}(i-3)f_i \le 6(g-1)$ 成立。

先考查 $\sum_{i\ge 7}(i-6)v_i \le 12(g-1)$，将其展开，即

$$v_7+2v_8+3v_9+4v_{10}+\cdots \le 12(g-1).$$

注意到

$$v_7+v_8+v_9+v_{10} \le v_7+2v_8+3v_9+4v_{10}+\cdots \le 12(g-1).$$

等号成立当且仅当 $v_8=v_9=v_{10}=\cdots=0$，即不存在 8 度及其以上的点。

由以上的分析知，

$$(v_7+2v_8+3v_9+4v_{10}+\cdots)+7(v_7+v_8+v_9+v_{10}+\cdots)=8v_7+9v_8+10v_9+11v_{10}+\cdots \le 96(g-1)$$

这个式子告诉我们，在曲面 S 上的 7-色临界图 G 中所有的 7 度以上的点及其关联的点数至多为 $96(g-1)$。而总点数 $>120(g-1)$，所以一定存在一个 6 度点，使得这个 6 度点的 6 个邻点全是 6 度点。.

再考查 $\sum_{i\geq 4}(i-3)f_i \leq 6(g-1)$，将其展开，即

$$f_4+2f_5+3f_6+4f_7+\cdots \leq 6(g-1).$$

注意到

$$f_4+f_5+f_6+f_7+\cdots \leq f_4+2f_5+3f_6+4f_7+\cdots \leq 6(g-1).$$

等号成立当且仅当 $f_5=f_6=f_7=\cdots=0$，即不存在包含 5 个点以上的面。由以上的分析知，

$(f_4+2f_5+3f_6+4f_7+\cdots)+3(f_4+f_5+f_6+f_7+\cdots)=4f_4+5f_5+6f_6+7f_7+\cdots \leq 24(g-1)$。

这个式子告诉我们，在曲面 S 上的 7-色临界图 G 中所有的 4 度以上的面所覆盖的点至多为 $24(g-1)$。而总点数 $>120(g-1)=96(g-1)+24(g-1)$，所以一定有一个 6 度点，使得这个 6 度点的 6 个邻点全是 6 度点且这个 6 度点关联的面全是三角形。

因此 v 及其邻点属于由度数为 6 的点诱导子图中的一个块。因为这个块不是一个奇圈，所以它是一个完全图。进而 G 包含 K_7，矛盾。这是因为一个 7-色临界图不包含一个 7-色临界图作为其真子图。证毕。

曲面 S 上的 7-色临界图有至多 $120(g-1)$ 个点，也就是说曲面 S 上的 7-色临界图的个数是有限的。因此理论上我们可以设计一个多项式算法，来检验一个给定的曲面嵌入图是否有 6-着色。对于一般可定向曲面上的 k-色临界图，我们下面的定理给出了曲面 S_g 上的每一个 k-色临界图 $(k\geq 7)$ 的点数上界的一个统一的表达式。

定理 1.2： 曲面 S_g 上的每一个 k-色临界图的点数不超过 $12(k+3)(g-1)$，其中 $k\geq 7$，$g>2$。

证明： 记 n,e,f 分别为图 G 的边数、点数和面数，v_k 为度数为 k 的点数，由 Euler 公式 $n-e+f=2-2g$，有

$$v_k+v_{k+1}+\cdots \leq (k-6)v_k+(k-5)v_{k+1}+\cdots \leq 12(g-1),$$

进而

$$k(v_k+v_{k+1}+\cdots)\leq 12(g-1)。$$

由

$$v_k+2v_{k+1}+\cdots \leq (k-6)v_k+(k-5)v_{k+1}+\cdots \leq 12(g-1),$$

得，

$$(k+1)v_k+(k+2)v_{k+1}+\cdots \leq 12(k+1)(g-1),$$

进而，

$$kv_k+v_{k+1}+\cdots \leq 12(g-1)-(v_k+v_{k+1}+\cdots)。$$

由以上的分析知，图 G 中所有度数大于 k 的点和它们的邻域中的点数总和至多是 $12(k+1)(g-1)$。

如果设图的点数上界为 $M(g-1)$，即，有一个 S_g 上的 k-临界图的点数超过 $M(g-1)$。那么重复前面关于面的处理过程后可知：图中被度数大于 3 的面所覆盖的点数至多是 $24(g-1)$。于是，图中被三角形所覆盖(同时没有被面数大于 3 的面所覆盖)的点集合 B 的阶数大于 $(M-1)-24(g-1)$。所以，图 G 当中所有度数为 $k-1$，且其邻域的点(没有被度数大于 $k-1$ 的点及其领域覆盖)的全体 A 的阶数大于 $M(g-1)-96(g-1)=(M-96)(g-1)$。只要 M 适当地大，即 $M>24+12(k+1)$，那么这两个集合 A，B 的交集 $A\cap B\neq\varnothing$。于是存在一点 $x\in A\cap B$，使得 $d(x)=k-1$，而且 x 被三角形所覆盖，同时其领域中的点都是 $k-1$ 度点：$x_1,x_2,\cdots,x_{k-1}$。不妨设这个次序就是它们在嵌入方案中的局部旋转次序。容易看出，

这 k 个点 $x_1,x_2,\cdots,x_{k-1}$ 诱导出图的一个完全子图 K_k，它是图 G 的一个真子图。这与 G 是 k-色临界图相违背。证毕。

图 G 和图 H 的联图 $G+H$ 是由图 $G\cup H$ 添加图 G 和图 H 的所有点之间的边得到的图。如果 G_1 和 G_2 是有公共点 v_0，和 G_1 中的一条边 v_0v_1 和 G_2 中的一条边 v_0v_2 的图，由这两个图经过 Hajós 构造得到的图是指是具有顶点集 $V(G_1)\cup V(G_2)$ 和边集 $E(G_1)\cup E(G_2)\cup\{v_1v_2\}\setminus\{v_0v_1,v_0v_2\}$ 的图。Thomassen[16]证明了：环面上的嵌入图是可 5-着色的，除非它包含 K_6，六个点的完全图，或者 C_3+C_5，长度为 3 和 5 的两个圈的联图，或者 K_2+H_7， K_2 和 H_7 的联图，其中 H_7 是由在 K_4 的两个拷贝上应用 Hajós 构造得到的，或者环面上有 11 个点的三角剖分图 T_{11}，它是由长度为 11 的圈添加圈上的距离为 2 和 3 点之间的边得到的图。Chenette，Postle，Streib，Thomas 和 Yerger[17]使用上述 Thomassen 所发展起来的方法，给出了 Klein 瓶上的 6-色临界图完全列表。Kawarabayashi，Král，Kynčl 和 Lidický[18]借助于计算机也得到了 Klein 瓶上的 6-色临界图完全列表。

使用 Hajós 构造，我们可以很容易地找到某个固定曲面上的一些 k-色临界图。但是要找到某个固定曲面上的所有的色临界图是一件很困难的事。到目前为止，仅知道射影平面、环面和 Klein 瓶这三个小亏格曲面上 6-色临界图的确切数目。

项目基金

国家自然科学基金项目(11171114)。

参考文献 (References)

[1] Möbius, A.F. (1861) Zur theorie der polyëder und elementarverwandtschaft. *Qeuvres Complètes*, **2**, 519-559.

[2] Jordan, C. (1866) Sur la déormation des surfaces. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **11**, 105-109.

[3] Thomassen, C. (1992) The Jordan-Schönflies theorem and the classification of surfaces. *The American Mathematical Monthly*, **99**, 116-130.

[4] Euler, L. (1752) Elementa doctrinae solidorum. Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum. *Novi Comment Acad. Sc. Imp. Petropol.*, **4**, 109-160.

[5] Edmonds, J.R. (1960) A combinatorial representation for polyhedral surfaces. *Notices of the AMS—American Mathematical Society*, **7**, 646.

[6] Heffter, L. (1891) Über das problem der nachbargebiete. *Mathematische Annalen*, **38**, 477-508.

[7] Heawood, P.J. (1890) Map colour theorem. *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, **24**, 332-338.

[8] Ringel, G. and Youngs, J.W.T. (1968) Solution of the Heawood map-coloring problem. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, **60**, 438-455.

[9] Franklin, P. (1934) A six color problem. *Journal of Mathematical Physics*, **13**, 363-369.

[10] Dirac, G.A. (1952) Map color theorem. *Canadian Journal of Mathematics*, **4**, 480-490.

[11] Albertson, M.O. and Hutchinson, J.P. (1977) The independence ratio and genus of a graph. *Transactions of the American Mathematical Society*, **226**, 161-173.

[12] Gimbel, J. and Thomassen, C. (1997) Coloring graphs with fixed genus and girth. *Transactions of the American Mathematical Society*, **349**, 4555-4564.

[13] Dirac, G.A. (1953) The coloring of maps. *Journal of the London Mathematical Society*, **28**, 476-480.

[14] Mohar, B. and Thomassen, C. (2001) Graphs on surfaces. Johns Hopkins University Press, London.

[15] Gallai, T. (1963) Kritische graphen I, II. *Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences*, **8**, 165-192,373-395.

[16] Thomassen, C. (1994) Five-coloring graphs on the torus. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **62**, 11-33.

[17] Chenette, N., Postle, L., Streib, N. and Thomas, R. (2012) Five-colorings graphs on the Klein bottle. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **102**, 1067-1098.

[18] Kawarayabashi, K.I., Král, D., Kynčl, J. and Lidický, B. (2009) 6-critical graphs on the Klein bottle. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, **23**, 372-383.