Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2014, 3, 78-84
Published Online May 2014 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2014.32012

Hans汉斯

The Eigenvalues Problem for Complex *Hamilton* Matrix

Yue Shen, Zhihui Wang, Kun Yan, Deyu Wu*

School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot
Email: *wudeyu2585@163.com

Received: Feb. 27th, 2014; revised: Mar. 29th, 2014; accepted: Apr. 9th, 2014

Abstract

In this paper, we focus on the conditions under which the eigenvalues of complex Hamiltonian matrices are symmetric with respect to the real and imaginary axis, and the sufficient conditions that the eigenvalues of complex Hamiltonian matrices are the real or the pure imaginary number are obtained. In the end, a class of complex Hamiltonian matrices whose eigenvalues are symmetric with respect to the real and the imaginary axis are obtained.

Keywords

Eigenvalue, Eigenvector, *Hamilton* Matrix

复*Hamilton*矩阵的特征值问题

沈　玥，王智慧，闫　琨，吴德玉*

内蒙古大学数学科学学院，呼和浩特
Email: *wudeyu2585@163.com

收稿日期：2014年2月27日；修回日期：2014年3月29日；录用日期：2014年4月9日

摘　要

在本文中，我们主要研究复*Hamilton*矩阵的特征值关于实轴和虚轴的对称性，以及复*Hamilton*矩阵的特

*通讯作者。

征值是实的或纯虚数的充分条件。最后，通过证明得到一类特征值是关于实轴和虚轴对称的复*Hamilton*矩阵。

关键词

特征值，特征向量，*Hamilton*矩阵

1. 引言

关于 *Hamilton* 矩阵的特征值问题在数学及力学的很多方面都有重要的应用，如谱的计算以及相关的不变子空间刻画等等，于是得到了诸多学者的广泛关注，如文献[1]-[3]。此外。引进连续时间变量的代数 Riccati 方程：

$$C + A^{*}V + VA - VBV = 0$$

其中 $A,B,C \in M_n(C)$，则可以证明该方程的解 $V \in M_n(R)$ 且是对称矩阵[4] [5]。

令 $M_n(C)$ 表示 $n \times n$ 阶复矩阵，$M_n(R)$ 表示 $n \times n$ 阶实矩阵，则形如

$$H = \begin{bmatrix} A & B \\ C & -A^{*} \end{bmatrix}$$

的 $2n \times 2n$ 阶矩阵称为 *Hamilton* 矩阵[6]，其中矩阵 $A,B,C \in M_n(C)$，$B^{*} = B$，$C^{*} = C$ 其中 A^{*} 表示矩阵 A 的共轭转置。如果定义 $2n \times 2n$ 阶矩阵 $J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$，其中 I_n 是 n 阶单位矩阵，则 *Hamilton* 矩阵显然满足关系

$$(JH)^{*} = JH.$$

已经知道，实 *Hamilton* 矩阵的特征值关于实轴和虚轴是对称的[7] [8]，也就是说当 $\lambda \in \sigma(H)$，如果 $\mathrm{Re}(\lambda)$ 和 $\mathrm{Im}(\lambda)$ 均不为零，则 $\bar{\lambda}$，$-\lambda$，$-\bar{\lambda}$ 也是该 *Hamilton* 矩阵的特征值。但是这种情况对于复 *Hamilton* 矩阵不一定成立。例如，令复 *Hamilton* 矩阵为

$$H = \begin{bmatrix} \mathrm{i} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \mathrm{i} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \mathrm{i} \end{bmatrix}$$

则 H 的特征值是 0，2i，±1+i，并不关于实轴对称。我们知道，如线性二次型最优控制，H_∞ 控制等问题中常常用到 *Hamilton* 矩阵的特征值关于实轴和虚轴对称这一性质，甚至要求其特征值是实数或纯虚数，即其在实轴或虚轴上。因此，在本文中，我们着重讨论复 Hamilton 矩阵有实特征值或纯虚特征值的充分条件，还求得了一类特殊的复 *Hamilton* 矩阵，其特征值并不一定在实轴或虚轴上，但是关于实轴和虚轴是对称的。

在本文中，符号 X,Y,F,G 表示 n 维列向量。J 表示矩阵 $\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$。$R$，$iR$ 和 C 分别表示实数，纯虚数和复数。A^{*} 表示矩阵 A 的共轭转置，A^{T} 表示矩阵 A 的转置，$\mathrm{Re}(\lambda)$ 和 $\mathrm{Im}(\lambda)$ 分别表示复数 λ 的实部和虚部，$\sigma(A)$ 表示矩阵 A 的谱集，即全体特征值的集合。

2. 预备知识

首先，我们引入以下引理：

引理 2.1：设 $H=\begin{bmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{bmatrix}$ 是复 *Hamilton* 矩阵，则

1) H 的特征值关于虚轴对称；

2) 若 $A=0$。则有 $\sigma(H)=\sigma(H^*)=\sigma(-H)$，即 H 的特征值关于实轴和虚轴对称。

证明：1) 设 $\lambda\in\sigma(H)$， X 是对应于 λ 的特征向量，即成立 $HX=\lambda X$，给该式两边取共轭得到

$$X^*H^*=\bar{\lambda}X^*$$

又 $H^*=JHJ$，代入上式得 $X^*JHJ=\bar{\lambda}X^*$，然后等式两边右乘 JX，结合 $JJ=-I_{2n}$，得到

$$X^*JJHX=-\bar{\lambda}X^*JX\ ,$$

进而有

$$X^*J\left(H+\bar{\lambda}\right)X=0\ ,$$

据引理 2.2，得 $J\left(H+\bar{\lambda}\right)X=0$，又 J 可逆，进而有 $-\bar{\lambda}\in\sigma(H)$。故结论成立。

2) 当 $A=0$ 时，$H=\begin{bmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$，由于

$$H=J_1(-H)J_1,\ H=J_2\left(H^*\right)J_2.$$

其中

$$J_1=\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{bmatrix},\ J_2=\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix},$$

且 $J_1=J_1^{-1},J_2=J_2^{-1}$，故矩阵 H 与 H^* 和 $-H$ 相似，进而 $\sigma(H)=\sigma(H^*)=\sigma(-H)$。再考虑到

$$\sigma(H)^*=\sigma\left(H^*\right),$$

即得 H 的特征值关于实轴和虚轴对称。

定义：设 $A\in M_n(C)$ 是对称矩阵，如果对任意的向量 $X=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$，都有 $X^*AX\geq 0$ 成立，则称 A 是非负矩阵。

引理 2.2：设 A 是非负矩阵，则 $X_0^*AX_0=0$ 当且仅当 $AX_0=0$。

证明：充分性显然成立，我们只需证明必要性。利用 Schwarz 不等式，很容易证明下列不等式

$$\left(\mathrm{Re}\left(X^*AY\right)\right)^2\leq X^*AX\cdot Y^*AY\ ,$$

对于任意向量 $X=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$， $Y=[y_1,y_2,\cdots,y_n]^{\mathrm{T}}$ 都成立。故不妨令 $Y=X_0$， $X=AX_0$，则有

$$\left(\left(AX_0\right)^*AX_0\right)^2=\left(\mathrm{Re}\left(X_0^*AY\right)\right)^2\leq X_0^*AX_0\cdot Y^*AY=0\ .$$

从而可得 $AX_0=0$，结论成立。

3. 主要结果

定理 3.1：设 $H=\begin{bmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{bmatrix}$ 是复 *Hamilton* 矩阵，如果矩阵 B 非负可逆，且 $\left(B^{-1}A\right)^*=B^{-1}A$，则有下面结论：

1) 矩阵 H 的特征值是实数或纯虚数，即 $\sigma(H)\subset R\cup \mathrm{i}R$；

2) $\lambda\in\sigma(H)$ 当且仅当 $-\lambda\in\sigma(H)$，即 H 的特征值关于原点对称。

证明： 设 $\lambda \in \sigma(H)$，$[F \quad G]^{\mathrm{T}}$ 是对应于 λ 的特征向量，即成立

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix}$$

整理可得

$$\begin{cases} AF + BG = \lambda F \\ CF - A^* G = \lambda G \end{cases}$$

由于 B 是可逆的，所以有

$$\begin{cases} G = \lambda B^{-1}F - B^{-1}AF \\ \lambda^2 B^{-1}F - \lambda B^{-1}AF = CF - \lambda A^* B^{-1}F + A^* B^{-1}AF \end{cases}$$

已知

$$\left(B^{-1}A\right)^* = B^{-1}A,$$

进而有

$$\lambda^2 F^* B^{-1}F = F^* CF + (AF)^* B^{-1}AF .$$

据引理 2.2：假设 $F^* B^{-1}F = 0$，则 $B^{-1}F = 0$,而 B 非负可逆，从而得 $F = 0$，则 $G = 0$，显然矛盾。故 $F^* B^{-1}F \neq 0$，从而

$$\lambda^2 = \frac{F^* CF + (AF)^* B^{-1}AF}{F^* B^{-1}F} \in R$$

即 $\sigma(H) \subset R \cup \mathrm{i}R$。

接下来，我们证明 $\sigma(H)$ 是关于原点对称的。令 $\lambda \in \sigma(H)$，向量 $[F \quad G]^{\mathrm{T}}$ 是对应 λ 的特征向量，取向量 $U = \left[-F \quad \lambda B^{-1}F + B^{-1}AF\right]^{\mathrm{T}}$，则 $U \neq 0$ 且

$$(H + \lambda)U = 0$$

从而可知 $-\lambda \in \sigma(H)$。

故当 $-\lambda \in \sigma(H)$ 时，类似地，可以证明 $\lambda \in \sigma(H)$。

类似地，由定理 3.1 也可得下面推论。

推论 3.2： 设 $H = \begin{bmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{bmatrix}$ 是复 *Hamilton* 矩阵，如果 C 是非负可逆矩阵，且 $\left(C^{-1}A^*\right)^* = C^{-1}A^*$，则有

1) 矩阵 H 的特征值是实数或纯虚数，即 $\sigma(H) \subset R \cup \mathrm{i}R$；

2) $\lambda \in \sigma(H)$ 当且仅当 $-\lambda \in \sigma(H)$，即 H 的特征值关于原点对称。

注： 定理 3.1 和 3.2 表明，在 $B^{-1}A$ 或 $C^{-1}A^*$ 是对称矩阵的条件下，复 *Hamilton* 矩阵的上述性质类似于实 *Hamilton* 矩阵，即 *Hamilton* 矩阵的特征值关于实轴和虚轴对称。

推论 3.3: 设 $H = \begin{bmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{bmatrix}$ 是复 *Hamilton* 矩阵，若 $B > 0$，$C \geq 0$ (或 $B < 0$，$C \leq 0$)且 $\left(B^{-1}A\right)^* = B^{-1}A$，则 $\sigma(H) \subset R$。

证明： 当 $B > 0$， $C \geq 0$，或 $B < 0$， $C \leq 0$ 时

$$\lambda^2 = \frac{F^*CF + (AF)^* B^{-1}AF}{F^*B^{-1}F} \geq 0$$

从而 $\sigma(H) \subset R$。

推论 3.4：设 $H = \begin{bmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{bmatrix}$ 是复 *Hamilton* 矩阵，若 $B \geq 0$，$C \leq 0$。且对任意的向量 X，Y，满足 $\mathrm{Re}(X^*AY) \geq 0$ (或 $B \leq 0$，$C \geq 0$ 且 $\mathrm{Re}(X^*AY) \leq 0$)，则 $\sigma(H) \subset \mathrm{i}R$。

证明：不失一般性，不妨假设 $B \leq 0$，$C \geq 0$，且对任意的向量 X，Y，有 $\mathrm{Re}(X^*AY) \leq 0$，则有

$$JH \geq 0$$

令 $\lambda \in \sigma(H)$，U 是对应 λ 的特征向量，即有 $HU = \lambda U$，则有

$$U^*JHU = \lambda U^*JU \geq 0$$

又由于 $U^*JU \in \mathrm{i}R$，则由上式可得

$$\mathrm{Re}(\lambda) = 0$$

即 $\sigma(H) \subset \mathrm{i}R$。证明完毕。

类似地，可以得出下面的推论。

推论 3.5：设 $H = \begin{bmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{bmatrix}$ 是复 *Hamilton* 矩阵。若 $B \geq 0$，$C > 0$ ($B \leq 0$，$C < 0$)，且 $(C^{-1}A^*)^* = C^{-1}A^*$，那么 $\sigma(H) \subset R$。

以上结论说明在某些特定的条件下，复 *Hamilton* 矩阵的特征值关于实轴和虚轴对称。

定理 3.6：设 $H = \begin{bmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{bmatrix}$ 是复 *Hamilton* 矩阵。如果 A 是一个斜对角分块矩阵，B，C 是对角分块矩阵，那么 H 的特征值关于实轴和虚轴对称。

证明：当 A 是斜对角分块矩阵，B，C 是对角块矩阵时，不妨令 $A = \begin{bmatrix} 0 & A_1 \\ A_2 & 0 \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}$，$C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}$，$\lambda \in \sigma(H)$，且令向量 $U = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 & G_1 & G_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 是对应 λ 的特征向量，即

$$HU = \lambda U$$

整理可得

$$A_1F_2 + B_1G_1 = \lambda F_1,$$

$$A_2F_1 + B_2G_2 = \lambda F_2,$$

$$C_1F_1 - A_2^*G_2 = \lambda G_1,$$

$$C_2F_2 - A_1^*G_1 = \lambda G_2.$$

令 $V = \begin{bmatrix} F_1 & -F_2 & -G_1 & G_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，我们同样可以得到

$$(H+\lambda)V = \begin{bmatrix} \lambda F_1 - A_1F_2 - B_1G_1 \\ B_2G_2 + A_2F_1 - \lambda F_2 \\ C_1F_1 - A_2^*G_2 - \lambda G_1 \\ -C_2F_2 + A_1^*G_1 + \lambda G_2 \end{bmatrix} = 0,$$

从而得，$\lambda \in \sigma(H)$ 当且仅当 $-\lambda \in \sigma(H)$。

又由引理 2.1 知，H 的特征值关于虚轴对称，因此 H 的特征值关于实轴和虚轴对称。证明完毕。

定理 3.7： 设 $H=\begin{bmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{bmatrix}$ 是复 *Hamilton* 矩阵，令 $A=\begin{bmatrix} 0 & A_1 \\ A_2 & 0 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}$。$C=\begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}$，如果 $B_1>0$，$C_2<0$，且对于任意的向量 X，Y，$\mathrm{Re}\left(X^*A_1Y\right)\ge 0$ (或 $B_1<0$，$C_2>0$，且 $\mathrm{Re}\left(X^*A_1Y\right)\le 0$)，那么 $\sigma(H)\subset R\cup \mathrm{i}R$。

证明： 显然 H 满足 $H=PH_0P^{-1}$，其中

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 0 & I_n & 0 \\ 0 & I_n & 0 & 0 \\ I_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_n \end{bmatrix},\quad H_0=\begin{bmatrix} 0 & 0 & C_1 & -A_2^* \\ 0 & 0 & A_2 & B_2 \\ B_1 & A_1 & 0 & 0 \\ -A_1^* & C_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & S_1 \\ S_2 & 0 \end{bmatrix}$$

因此，矩阵 H 与矩阵 H_0 相似，从而有 $\sigma(H)=\sigma(H_0)$。任取 $\lambda\in\sigma(H_0)$，且令 $U=\begin{bmatrix} F_1 & F_2 & G_1 & G_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 是对应 λ 的特征向量，则有

$$\begin{bmatrix} S_1S_2 & 0 \\ 0 & S_2S_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix}=\lambda^2\begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix}$$

其中 $F=\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$，$G=\begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}$，整理可得

$$\begin{cases} \left(C_1B_1+A_2^*A_1^*\right)F_1+\left(C_1A_1-A_2^*C_2\right)F_2=\lambda^2F_1 \\ \left(A_2B_1-B_2A_1^*\right)F_1+\left(A_2A_1+B_2C_2\right)F_2=\lambda^2F_2 \end{cases},$$

给第一式左乘 B_1，第二式左乘 A_1，然后两式相加得

$$\begin{aligned} &\left(B_1C_1B_1+A_1A_2B_1+B_1A_2^*A_1^*-A_1B_2A_1^*\right)F_1 \\ &+\left(B_1C_1A_1+A_1A_2A_1-B_1A_2^*C_2+A_1B_2C_2\right)F_2 \\ &=\lambda^2\left(B_1F_1+A_1F_2\right) \end{aligned}\tag{1}$$

再给第一式左乘 $-A_1^*$，第二式左乘 C_2，然后两式相加得

$$\begin{aligned} &\left(-A_1^*C_1B_1+C_2A_2B_1-A_1^*A_2^*A_1^*-C_2B_2A_1^*\right)F_1 \\ &+\left(-A_1^*C_1A_1+C_2A_2A_1+A_1^*A_2^*C_2+C_2B_2C_2\right)F_2 \\ &=\lambda^2\left(-A_1^*F_1+C_2F_2\right) \end{aligned}\tag{2}$$

方程(2)两边取共轭转置可得

$$\begin{aligned} &F_1^*\left(-B_1C_1A_1+B_1A_2^*C_2-A_1A_2A_1-A_1B_2C_2\right) \\ &+F_2^*\left(-A_1^*C_1A_1+A_1^*A_2^*C_2+C_2A_2A_1+C_2B_2C_2\right) \\ &=\overline{\lambda}^2\left(-F_1^*A_1+F_2^*C_2\right) \end{aligned}\tag{3}$$

给方程(1)左乘 F_1^*，给方程(3)右乘 F_2，然后两式相加得

$$\begin{aligned} &F_1^*\left(B_1C_1B_1+A_1A_2B_1+B_1A_2^*A_1^*-A_1B_2A_1^*\right)F_1+F_2^*\left(-A_1^*C_1A_1+A_1^*A_2^*C_2+C_2A_2A_1+C_2B_2C_2\right)F_2 \\ &=\lambda^2F_1^*\left(B_1F_1+A_1F_2\right)+\overline{\lambda}^2\left(-F_1^*A_1+F_2^*C_2\right)F_2 \end{aligned}$$

这意味着

$$\operatorname{Im}\left(\lambda^2\right)\left(-F_2^*C_2F_2+F_1^*B_1F_1+2\operatorname{Re}\left(F_1^*A_1F_2\right)\right)=0.$$

如果 $B_1>0$，$C_2<0$，且对于任意的向量 X，Y，$\operatorname{Re}\left(X^*A_1Y\right)\ge 0$ (或 $B_1<0$，$C_2>0$ 且 $\operatorname{Re}\left(X^*A_1Y\right)\le 0$)，则 $-F_2^*C_2F_2+F_1^*B_1F_1+2\operatorname{Re}\left(F_1^*A_1F_2\right)\ne 0$。从而 $\operatorname{Im}\left(\lambda^2\right)=0$，故 $\sigma(H)\subset R\cup \mathrm{i}R$，证明完毕。

项目基金

国家自然科学基金(批准号：11101200)，内蒙古大学校级本科生创新培养基金(批准号：2012128)。

参考文献 (References)

[1] Bunse-Gerstner, A., Byers, R. and Mehrmann, V. (1992) A chart of numerical methods for structured eigenvalue problems. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **13**, 419-453.

[2] Bunse-Gerstner, A. and Fabbender, H. (1997) A Jacobi-like method for solving algebraic Riccati equations on parallel computers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **42**, 1071-1084.

[3] Mehrmann, V. (1991) The autonomous linear quadratic control problem: Theory and numerical solution, lecture notes in control and information sciences. Vol. 163, Springer, Berlin.

[4] Lancasyer, P. and Rodman, L. (1995) The algebraic Riccati equation. Oxford University Press, Oxford.

[5] Rosen, I. and Wang, C. (1992) A multilevel technique for the approximate solution of operator Lyapunov and algebraic Riccati equations. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **32**, 514-541.

[6] Benner, P., Byers, R., Mehrmann, V. and Xu, H. (2002) Numerical computation of deflating sub-spaces of embedded Hamiltonian pencils. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **24**, 160-190.

[7] Wu, D.Y. and Chen, A. (2011) Invertibility of nonnegative Hamiltonian operator with unbounded entries. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **373**, 410-413.

[8] Wu, D.Y. and Chen, A. (2011) Spectral inclusion properties of the numerical range in a space with an indefinite metric. *Linear Algebra and Its Applications*, **435**, 1131-1136.