Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2014, 3, 112-118
Published Online May 2014 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2014.32017

Hans汉斯

An Insurance Model with Sparse Process Considering Some Factors of the Proportional Reinsurance

Pengfei Zhang, Xinmei Chen

School of Mathematics and Computing Science, Changsha University of Science and Technology, Changsha
Email: 836355062@qq.com

Received: Apr. 3rd, 2014; revised: May 1st, 2014; accepted: May 9th, 2014

Copyright © 2014 by authors and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

Abstract

In view of the increasingly complex and changeful insurance business situation, a sparse process was established considering interference and lower limit for the bankruptcy of the proportional reinsurance risk model, and at the same time, the dividend payment was introduced to make the model reflect the operation mode of the insurance company more practically.

Keywords

Ruin Probability, Sparse Process, Proportional Reinsurance, Dividend Payments

稀疏过程下考虑多因素的比例再保险风险模型

张鹏飞，陈新美

长沙理工大学数学与计算科学学院，长沙
Email: 836355062@qq.com

收稿日期：2014年4月3日；修回日期：2014年5月1日；录用日期：2014年5月9日

摘　要

本文针对目前日益复杂多变的保险业务情况，建立了一种在稀疏过程下考虑干扰和破产下限的比例再保

险风险模型，同时引入了红利支付，试着使模型能更实际的反映保险公司的运营模式。

关键词

破产概率，稀疏过程，比例再保险，红利

1. 引言

经典风险模型的研究已经取得了大量的成果，但在实际问题研究中由于存在着许多干扰因素，使模型的应用不是很理想.在文献[1]中，将经典模型推广得到一带稀疏过程的风险模型。保险公司在收取保费的同时也伴随着一定的风险，再保险是有效的分散风险的一个途径，文献[2] [3]从变破产下限、干扰、随机利率和比例再保险等方面将其进行了推广，文献[4]加入了支付红利因素。本文在此基础上考虑了多因素模型的建立，给出了模型的破产概率的 Lundberg 不等式与最终破产概率的一般表达式。

2. 模型的建立和符号

在完备的概率空间(Ω, F, P)上，考虑了保险公司向投保人支付红利的盈余过程可以表示成

$$U(t)=\left[u+(c-d)(1-\beta)M(t)\right]-\sum_{i=1}^{N(t)}(1-\beta)X_i+\sigma\omega(t)-f(t)$$

对此模型我们做如下假设：

1) $u>0$为初始财富值(即初始准备金)；$c>0$为每张保单的平均保费到达率；β为再保险比例系数，$0<\beta<1$；d为保险公司向投保人支付的红利，$(0<d\ll c)$；σ为扰动系数，$\omega(t)$为标准的维纳过程；$f(t)$为破产下限，这里假设$f(t)=a+bt$，$(a>0,b>0,(c-d)(1-\beta)\gg b)$。

2) 比例再保险通常有下列表示

X_I：表示原保险公司自留保险；X_α：表示再保险公司分出风险；

X：表示原保险公司责任风险；β：比例再保险系数。

则$X_I=(1-\beta)\cdot X$，$X_\alpha=\beta\cdot X$。

3) $M(t)$为保险公司在时刻t为止售出的保单总数；$N(t)$为保险公司到时刻t为止理赔的保单总数；假设$\{M(t),t\ge 0\}$是参数为λ的齐次 Possion 过程，$\{N(t),t\ge 0\}$是$\{M(t),t\ge 0\}$的p-稀疏过程，其中$0<p<1$，不妨记$\{N(t),t\ge 0\}$这一过程为$\{M(t,p),t\ge 0\}$

则有，

$$U(t)=\left[u+(c-d)(1-\beta)M(t)\right]-\sum_{i=1}^{M(t,p)}(1-\beta)X_i+\sigma\omega(t)-f(t)$$

$$S(t)=(c-d)(1-\beta)M(t)-\sum_{i=1}^{M(t,P)}(1-\beta)X_i+\sigma\omega(t)-f(t)$$

4) X_i表示第i次的索赔额，且$\{X_i,i=1,2,\cdots\}$是非负独立同分布随机变量序列，$X_i\sim F(x)$；$\{X_i,i=1,2,\cdots\}$的期望$E(X_i)=\mu$。

3. 主要引理

引理 3.1： 1) 盈利过程$\{S(t),t\ge 0\}$具有平稳独立增量性。

2) $\{S(t),t\ge 0\}$为保险公司在$[0,t]$内的利润，这里一般假设$E\left[S(t)\right]>0$，得到相对安全系数

$\rho = \dfrac{\lambda(c-d)(1-\beta)-b}{\lambda p(1-\beta)\mu} - 1$。

1) 证明：令 $0 < t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$，

则

$$
\begin{aligned}
&S(t_n) - S(t_{n-1}) \\
&= \left(\left[(c-d)(1-\beta)\right] M(t_n) - \sum_{i=1}^{M(t_n,p)} (1-\beta) X_i + \sigma\omega(t) - f(t) \right) \\
&\quad - \left(\left[(c-d)(1-\beta)\right] M(t_{n-1}) - \sum_{i=1}^{M(t_{n-1},p)} (1-\beta) X_i + \sigma\omega(t) - f(t) \right) \\
&= (1-\beta)\left\{ \left[(c-d)\left(M(t_n) - M(t_n,p)\right) - (c-d)\left(M(t_{n-1}) - M(t_{n-1},p)\right)\right] \right. \\
&\quad \left. + \left[\left((c-d) M(t_n,p) - \sum_{i=1}^{M(t_n,p)} X_i \right) - \left((c-d) M(t_{n-1},p) - \sum_{i=1}^{M(t_{n-1},p)} X_i \right) \right] \right\}
\end{aligned}
$$

注：由随机点过程的知识可知 $N(t,p)$ 与 $N(t)$ 一般是不独立的，但是 $N(t,p)$ 与 $N(t,q)$ 是一定相互独立的。

所以，$M(t_n) - M(t_n,p)$、$M(t_n,p)$ 是相互独立的，

而 $(c-d)M(t_n,p) - \sum_{i=1}^{M(t_n,p)} X_i = \sum_{i=1}^{M(t_n,p)} \left((c-d) - X_i\right)$

所以

$$
\begin{aligned}
&\left((c-d) M(t_n,p) - \sum_{i=1}^{M(t_n,p)} X_i \right) - \left((c-d) M(t_{n-1},p) - \sum_{i=1}^{M(t_{n-1},p)} X_i \right), \\
&= \sum_{i=1}^{M(t_n,p)} \left((c-d) - X_i\right) - \sum_{i=1}^{M(t_{n-1},p)} \left((c-d) - X_i\right),
\end{aligned}
$$

又因为

$$
\begin{aligned}
&\left[(c-d)\left(M(t_1) - M(t_1,p)\right) - (c-d)\left(M(t_0) - M(t_0,p)\right)\right], \\
&\left[(c-d)\left(M(t_2) - M(t_2,p)\right) - (c-d)\left(M(t_1) - M(t_1,p)\right)\right], \\
&\cdots, \left[(c-d)\left(M(t_n) - M(t_n,p)\right) - (c-d)\left(M(t_{n-1}) - M(t_{n-1},p)\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{M(t_1,p)} \left((c-d) - X_i\right) - \sum_{i=1}^{M(t_0,p)} \left((c-d) - X_i\right), \\
&\sum_{i=1}^{M(t_2,p)} \left((c-d) - X_i\right) - \sum_{i=1}^{M(t_1,p)} \left((c-d) - X_i\right), \\
&\cdots, \sum_{i=1}^{M(t_n,p)} \left((c-d) - X_i\right) - \sum_{i=1}^{M(t_{n-1},p)} \left((c-d) - X_i\right)
\end{aligned}
$$

均相互独立，

所以 $\{S(t), t \ge 0\}$ 是独立增量过程。

又因

$$\begin{aligned}
&S(t_n+\Delta)-S(t_n)\\
&=\left((c-d)(1-\beta)M(t_n+\Delta)-\sum_{i=1}^{M(t_n+\Delta,p)}(1-\beta)X_i+\sigma\omega(t)-f(t)\right)\\
&\quad-\left((c-d)(1-\beta)M(t_n)-\sum_{i=1}^{M(t_n,p)}(1-\beta)X_i+\sigma\omega(t)-f(t)\right)\\
&=(1-\beta)\Bigg\{\Big[(c-d)\big(M(t_n+\Delta)-M(t_n+\Delta,p)\big)-(c-d)\big(M(t_n)-M(t_n,p)\big)\Big]\\
&\quad+\left[\left((c-d)M(t_n+\Delta,p)-\sum_{i=1}^{M(t_n+\Delta,p)}X_i\right)-\left((c-d)M(t_n,p)-\sum_{i=1}^{M(t_n,p)}X_i\right)\right]\Bigg\}
\end{aligned}$$

因 $\forall t\geq 0$ 均有 $(c-d)\big(M(t_n+\Delta)-M(t_n+\Delta,p)\big)-(c-d)\big(M(t_n)-M(t_n,p)\big)$、

$$\left[\left((c-d)M(t_n+\Delta,p)-\sum_{i=1}^{M(t_n+\Delta,p)}X_i\right)-\left((c-d)M(t_n,p)-\sum_{i=1}^{M(t_n,p)}X_i\right)\right]$$

的分布都只依赖于 Δ,所以 $\{S(t),t\geq 0\}$ 具有平稳增量性。

综上可知，盈余过程 $\{S(t),t\geq 0\}$ 具有平稳独立增量性。

2)
$$\begin{aligned}
E\big[S(t)\big]&=E\left[(c-d)(1-\beta)M(t)-\sum_{i=1}^{N(t)}(1-\beta)X_i+\sigma\omega(t)-f(t)\right]\\
&=\big(\lambda(c-d)(1-\beta)-\lambda p(1-\beta)\mu-b\big)t-a>0
\end{aligned}$$

即 $\big(\lambda(c-d)(1-\beta)-\lambda p(1-\beta)\mu-b\big)t>0$

$$\lambda(c-d)(1-\beta)-b>\lambda p(1-\beta)\mu$$

令 $\rho=\dfrac{\lambda(c-d)(1-\beta)-b}{\lambda p(1-\beta)\mu}-1$，则 ρ 为相对安全系数。

注：数值 ρ 越大表示保险公司的运营稳定性越好，ρ 越小则表示保险公司之间的竞争越强。当 $\rho>0$，则 $S(t)\to+\infty\ (t\to+\infty)$。

引理 3.2： 对于赔付盈余过程 $\{S(t)+a,t\geq 0\}$，存在一函数 $g(r)$，使得 $E\Big[\exp\big(-r\big(S(t)+a\big)\big)\Big]=\exp\big(tg(r)\big)$

证明： 由于 $\{S(t),t\geq 0\}$ 具有平稳独立增量，则

$$\begin{aligned}
&E\Big[\exp\big(-r\big(S(t)+a\big)\big)\Big]\\
&=E\left[\exp\left[-r(c-d)(1-\beta)M(t)+r\sum_{i=1}^{M(t,p)}(1-\beta)X_i-r\sigma\omega(t)+rf(t)-ra\right]\right]\\
&=E\Big[\exp\big(-r(c-d)(1-\beta)M(t)\big)\Big]\cdot E\left[\exp\left(r\sum_{i=1}^{M(t,p)}(1-\beta)X_i\right)\right]\\
&\quad\cdot E\Big[\exp\big(-r\sigma\omega(t)\big)\Big]\cdot E\Big[\exp\big(rf(x)-ra\big)\Big]\\
&=\exp\big(-r(c-d)(1-\beta)\lambda t\big)\cdot\exp\big(\lambda pt\big(M_X(1-\beta)r-1\big)\big)\cdot\exp\left(\frac{\sigma^2r^2t}{2}\right)\cdot\exp(rbt)\\
&=\exp\left(-r(c-d)(1-\beta)\lambda t+\lambda pt\big(M_X(1-\beta)r-1\big)+\frac{\sigma^2r^2t}{2}+rbt\right)
\end{aligned}$$

其中 $M_X(\cdot)$ 表示索赔额 X 的矩母函数，令

$$g(r)=-r(c-d)(1-\beta)\lambda+\lambda p\left(M_X\left((1-\beta)r-1\right)+\frac{\sigma^2r^2}{2}+rb\right.,$$

则 $E\left[\exp\left(-r\left(S(t)+a\right)\right)\right]=\exp\left(tg(r)\right)$

定义 3.1： 方程 $g(r)=0$ 的非零正解记为 R，称其为调节系数，相应地，方程 $g(r)=0$ 叫做调节系数方程。

引理 3.3： 方程 $g(r)=0$ 有唯一正解 R。

证明：1) 当 $r=0$ 时，可知 $g(0)=\lambda p\left(M_X(0)-1\right)$，

由矩母函数的定义可得：$M_X(0)=1$,所以有 $g(0)=0$。

2) $g(r)=-r(c-d)(1-\beta)\lambda+\lambda p\left(M_X\left((1-\beta)r-1\right)+\frac{\sigma^2r^2}{2}+rb\right.$

所以 $g'(r)=-(c-d)(1-\beta)\lambda+\lambda pE\left((1-\beta)X\mathrm{e}^{(1-\beta)rX}\right)+\sigma^2r+b$

$$\begin{aligned}g'(0)&=-(c-d)(1-\beta)\lambda+\lambda pE\left((1-\beta)X\right)+b\\&=-(c-d)(1-\beta)\lambda+\lambda p(1-\beta)\mu+b\end{aligned}$$

又因为

$$E\left[S(t)\right]=\left(\lambda(c-d)(1-\beta)-\lambda p(1-\beta)\mu-b\right)t-a>0$$

$$E\left[S(t)\right]=\left(\lambda(c-d)(1-\beta)-\lambda p(1-\beta)\mu+b\right)t=-g'(0)t-a>0$$

所以 $g'(0)<0$

3) $g''(r)=\lambda pE\left((1-\beta)^2X^2\mathrm{e}^{(1-\beta)rX}\right)+\sigma^2>0$，

4) 因为 $t\to\infty$ 时，$M(t)\to\infty$，$M(t,p)\to\infty$

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\frac{U(t)}{t}&=\lim_{t\to\infty}\frac{\left[u+(c-d)(1-\beta)M(t)\right]}{t}-\lim_{t\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{M(t,p)}(1-\beta)X_i}{t}+\lim_{t\to\infty}\frac{\sigma\omega(t)}{t}-\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t}\ a.s.\\&=(c-d)(1-\beta)\lambda-(1-\beta)\lambda p\mu+0-b>0\end{aligned}$$

即 $\lim_{t\to\infty}U(t)=+\infty\ a.s.$

所以，当 $r\in(0,+\infty)$ 时，$g(r)$ 为严格向下凸函数，且 $g(0)=0$，$g(r)\to+\infty$，所以正解 R 存在且唯一。

引理 3.4： 存在一个适当的自留比例系数 $(1-\beta)$ 使得总收益最大。

此处所采用的风险均值－方差度量原则(文献[5] [6])是在方差一定的原则下，研究了收益最大化下风险最小的自留比例水平，为保险公司与再保险公司提供一定的依据。

总收益的期望：

$$\begin{aligned}E\left[U(t)\right]&=E\left[u+(c-d)(1-\beta)M(t)-\sum_{i=1}^{M(t,p)}(1-\beta)X_i+\sigma\omega(t)-f(t)\right]\\&=u-a+\left(\lambda(c-d)(1-\beta)-\lambda p(1-\beta)\mu-b\right)t\end{aligned}$$

总收益的方差：

$$\begin{aligned}Var\left[U(t)\right]&=Var\left[u-a+(c-d)(1-\beta)M(t)-\sum_{i=1}^{M(t,p)}(1-\beta)X_i+\sigma\omega(t)-bt\right]\\&=Var\left[\sum_{i=1}^{M(t,p)}(1-\beta)X_i\right]+Var\left[\sigma\omega(t)\right]=(1-\beta)^2Var\left[\sum_{i=1}^{M(t,p)}X_i\right]+\sigma^2\end{aligned}$$

目标是使得原保险公司风险最小、总收益最大，可知这是一个双目标规划问题。在此，可以先假设保险公司的风险一定，即 $Var\left[U\left(t\right)\right]=A$，求出收益最大化时的自留比例。此模型可以用 Lagrange 乘数法来求解。Lagrange 函数：

$$L\left(\left(1-\beta\right),\eta\right)=E\left[U\left(t\right)\right]-2\eta\left(Var\left[U\left(t\right)\right]-A\right)$$

令 $(1-\beta)$ 是下面方程组的解：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial\left(1-\beta\right)}=\left(c-d\right)\lambda t-\lambda p\mu t-4\eta\left(1-\beta\right)Var\left[\sum\limits_{i=1}^{M(t,p)}X_i\right]=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial\eta}=-2\left[\left(1-\beta\right)^2Var\left[\sum\limits_{i=1}^{M(t,p)}X_i\right]+\sigma^2-A\right]=0\end{cases}$$

由上可解得 $(1-\beta)=\sqrt{\dfrac{A-\sigma^2}{Var\left[\sum\limits_{i=1}^{M(t,p)}X_i\right]}}$，即固定风险大小为 $Var\left[U\left(t\right)\right]=A$ 时，存在一个适当的自留比例系数 $(1-\beta)$ 使得总收益最大。

4. 主要结果

定义 4.1： 破产时刻 $T_u=\min\left\{t\middle|U\left(t\right)<0\right\}$；破产概率 $\Psi\left(u\right)=P\left\{T_u<\infty\right\}$.

定理 4.1： $M_u\left(t\right)=\dfrac{\exp\left\{-r\left[u+a+S\left(t\right)\right]\right\}}{E\left\{\exp\left[tg\left(r\right)\right]\right\}}$ 为 F_t 鞅,其中，$F_t=\left\{F_t^s:t\ge0\right\}$.

证明： 对 $\forall w\le t$，

$$\begin{aligned}E\left[M_u\left(t\right)\middle|F_w^s\right]&=E\left[\frac{\exp\left\{-r\left[u+a+S\left(t\right)\right]\right\}}{\exp\left[tg\left(r\right)\right]}\middle|F_w^s\right]\\&=E\left[\frac{\exp\left\{-r\left[u+a+S\left(w\right)\right]\right\}}{\exp\left[wg\left(r\right)\right]}\cdot\frac{\exp\left\{-r\left[S\left(t\right)-S\left(w\right)\right]\right\}}{\exp\left[\left(t-w\right)g\left(r\right)\right]}\middle|F_w^s\right]\\&=M_u\left(w\right)\cdot E\left[\frac{\exp\left\{-r\left[S\left(t\right)-S\left(w\right)\right]\right\}}{\exp\left[\left(t-w\right)g\left(r\right)\right]}\middle|F_w^s\right]=M_u\left(w\right)\end{aligned}$$

定理 4.2： 最终破产概率满足 Lundberg 不等式，即 $\Psi\left(u\right)\le\mathrm{e}^{-r\left(u-a\right)}$。

证明： 令 $\alpha=u-a$，由于 T_u 是破产时刻，可知 T_u 为 $F_t=\left\{F_t^s:t\ge0\right\}$ 是一停时，设 $t_0<\infty$ 为一常数，则 $t_0\wedge T_u$ 为一有界停时，由引理和停时定理可得：

$$\begin{aligned}\exp\left(-r\alpha\right)&=M_\alpha\left(0\right)=E\left[M_\alpha\left(t_0\wedge T_u\right)\right]\\&=E\left[M_\alpha\left(t_0\wedge T_u\right)\middle|T_u\le t_0\right]\cdot P\left(T_u\le t_0\right)+E\left[M_\alpha\left(t_0\wedge T_u\right)\middle|T_u>t_0\right]\cdot P\left(T_u>t_0\right)\\&\ge E\left[M_\alpha\left(t_0\wedge T_u\right)\middle|T_u\le t_0\right]\cdot P\left(T_u\le t_0\right)=E\left[M_\alpha\left(T_u\right)\middle|T_u\le t_0\right]\cdot P\left(T_u\le t_0\right)\end{aligned}\tag{1}$$

从而

$$P\left(T_u\le t_0\right)\le\frac{\exp\left(-r\alpha\right)}{E\left[M_\alpha\left(T_u\right)\middle|T_u\le t_0\right]}\le\frac{\exp\left(-r\alpha\right)}{E\left[\exp\left[-T_ug\left(r\right)\right]\middle|T_u\le t_0\right]}\le\exp\left(-r\alpha\right)\cdot\sup_{0\le t\le t_0}\exp\left[tg\left(r\right)\right]$$

取 $R=\sup_{t\geq 0}\{r:g(r)\leq 0\}$ 可得 $g(R)=0$，所以 $\Psi(u)=P(T_u\leq t_0)\leq \mathrm{e}^{-r(u-a)}$

定理 4.3：在风险模型 $\{U(t),t\geq 0\}$ 下，最终破产概率为

$$\Psi(u)=\frac{\mathrm{e}^{-R(u-a)}}{E\left[\exp\left(-R\cdot U(T_u)\right)\middle|T_u<\infty\right]}$$

其中，R 为调节系数。

证明：在定理 4.2 的(1)式中，取 $r=R$，令 $\alpha=u-a$，则

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-R(u-a)}&=\exp(-r\alpha)=E\left[M_\alpha(t_0\wedge T_u)\right]\\&=E\left[M_\alpha(t_0\wedge T_u)\middle|T_u\leq t_0\right]\cdot P(T_u\leq t_0)+E\left[M_\alpha(t_0\wedge T_u)\middle|T_u>t_0\right]\cdot P(T_u>t_0)\\&=E\left[\mathrm{e}^{-RU(t_0)}\middle|T_u\leq t_0\right]\cdot P(T_u\leq t_0)+E\left[\mathrm{e}^{-RU(t_0)}\middle|T_u>t_0\right]\cdot P(T_u>t_0)\end{aligned}$$

$$0\leq E\left[\mathrm{e}^{-RU(t_0)}\middle|T_u>t_0\right]\cdot P(T_u>t_0)=E\left[\mathrm{e}^{-RU(t_0)}\cdot I(T_u>t_0)\right]\leq E\left[\mathrm{e}^{-RU(t_0)}\cdot I\left(U(t_0)>0\right)\right]$$

因为 $0\leq \mathrm{e}^{-RU(t_0)}\cdot I\left(U(t_0)>0\right)\leq 1$，由强大数定律可知，当 $t_0\to+\infty$，有

$$U(t_0)\to+\infty,\quad p\_a.s.$$

又由控制收敛定理得：

$$\lim_{t_0\to+\infty}E\left[\mathrm{e}^{-RU(t_0)}\middle|T_u>t_0\right]\cdot P(T_u>t_0)=0,\quad p\_a.s.$$

因此，

$$\mathrm{e}^{-R(u-a)}=E\left[\mathrm{e}^{-RU(t_0)}\middle|T_u\leq t_0\right]\cdot P(T_u\leq t_0)\tag{2}$$

上式(2)中，两端分别令 $t_0\to+\infty$，即得

$$\Psi(u)=P\{T_u<\infty\}=\frac{\mathrm{e}^{-R(u-a)}}{E\left[\exp\left(-R\cdot U(T_u)\right)\middle|T_u<\infty\right]}.$$

参考文献 (References)

[1] 陈珊萍，王过京，王振羽 (2001) 稀疏过程在保险公司破产问题中的应用. *数学统计与管理*, **20**, 26-30.

[2] 雷鸣，陈新美 (2013) 一类相依比例再保险的风险模型. 长沙理工大学，长沙.

[3] 成军祥，王变 (2010) 带干扰的再保险风险模型的破产概率. *北京电子科技学院学报*, **18**, 1-3.

[4] 陈英，夏亚峰 (2010) 带干扰项的最优投资再保险风险模型. 兰州理工大学，兰州.

[5] 吴琳琳，王永茂 (2011) 几种比例再保险模型的研究. 燕山大学，秦皇岛.

[6] 刘丹，王志福 (2013) 常利率下带干扰的离散风险险模型的研究. 渤海大学，锦州.