

A High-Resolution Finite Volume Scheme Based on Newtonian Interpolation

Wei Gao, Qing Zhang, Hong Li, Yang Liu

School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot Inner Mongolia
Email: gaow@imu.edu.cn, math_zhangqing@163.com, smslh@imu.edu.cn, mathliuyang@aliyun.com

Received: Apr. 24th, 2015; accepted: May 10th, 2015; published: May 15th, 2015

Copyright © 2015 by authors and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).
<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

Abstract

Finite volume method plays an important role in fluid flow and heat transfer numerical calculation. How to eliminate unphysical oscillations caused by numerical solution of convection diffusion equation selecting discontinuity wave as the initial condition is a key task for studying finite volume method. New high-resolution schemes were constructed by Newton interpolation polynomial based on convection boundness criterion (CBC). Classic test cases demonstrated that the present numerical scheme possesses high resolution and good stability for high gradient and discontinuous solution.

Keywords

Convection Diffusion Equation, Newton Interpolation Polynomial, Convection Boundness Criterion (CBC), Total Variation Diminishing (TVD)

基于牛顿插值的高分辨率有限体积格式

高 巍, 张 庆, 李 宏, 刘 洋

内蒙古大学数学科学学院, 内蒙古 呼和浩特
Email: gaow@imu.edu.cn, math_zhangqing@163.com, smslh@imu.edu.cn, mathliuyang@aliyun.com

收稿日期: 2015年4月24日; 录用日期: 2015年5月10日; 发布日期: 2015年5月15日

摘要

有限体积方法在计算流体和热传导的数值计算中占据重要的地位。在数值格式构造的过程中,如何消除对流扩散方程选取间断波为初始条件时数值解所产生的非物理震荡,是有限体积方法主要的研究内容。本文基于对流有界准则(CBC)原理,通过Newton插值多项式的方法构造新的高分辨率有限体积格式。经典算例表明,本文构造的数值格式对于大梯度或间断解有较好的分辨率和数值稳定性。

关键词

对流扩散方程, Newton插值多项式, CBC准则, TVD准则

1. 引言

对流扩散方程是一类重要的模型方程,在流体力学数值计算中有着重要的意义。对流扩散方程中对流项是描述流体流动过程的物理量,可以用关于空间的一阶导数来表示。对流项的数值计算在流体数值计算中起着重要的作用。数值格式离散对流项时要求在解的光滑区域具有较高的精度,在大梯度附近稳定且有界,关系到对流扩散方程数值解的精度、稳定性和收敛性。因此,对流项的数值格式的研究对减少数值解过度耗散起着关键作用。

目前已经提出了很多经典的低阶数值格式,例如一阶迎风格式 FOU (First-Order Upwind)和 Lax-Friedrichs 格式[1],但是这些格式会产生数值耗散。为了弥补这一不足,人们又提出了高阶数值格式,例如,中心差分格式 CD (Central Difference)、二阶迎风 SOU (Second-Order Upwind)、Lax-Wendroff [2]、QUICK (Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics) [3]和 CUI (Cubic Upwind Interpolation) 格式[4]。但是,根据 Godunov [5]中的结论,高阶格式(High-Order Scheme)对于对流项的离散,不满足有界性,会造成间断解的非物理震荡。因此,如何消减数值耗散仍是一项极具挑战性的任务。

针对上述问题,人们提出了高分辨率格式(High Resolution Scheme) [6] [7]。高分辨率格式是高阶格式与某些有界性准则的结合,它能很好地解决间断解的问题,消除数值解的非物理震荡。高分辨率早期的相关研究就是利用 Harten 提出的 TVD (Total Variational Diminishing Constraint)性质构造一个通量限制函数,然后将它和高阶格式结合形成高分辨格式[6]。另外一个重要的构造高分辨率格式是结合 Leonard 提出的 NVF (Normalized Variable Formulation)方法[8]与 Gaskell 和 Lau [1]提出的 CBC (Convection Boundness Criterion)准则,格式离散对流项时,需要计算界面值,用到相邻的三个节点值,如图 1 所示,CBC 准则能控制对流项的界面插值位于两相邻节点值之间,使得格式局部有界。在此基础上,出现了不同的高分辨率格式,如 SMART [9]、MUSCL [10]和 HOAB 格式[11]等。在科学计算和工程应用上,利用这些高分辨率格式,人们已经取得了较理想的数值计算格式和模拟结果。

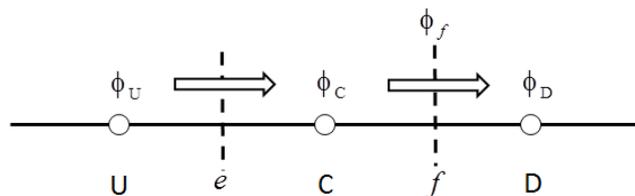


Figure 1. Three neighboring mesh points and the mesh face
图 1. 三个相邻结点及单位边界

本文通过利用 Newton 插值多项式的方法结合 TVD 和 CBC-BAIR 条件构造了一个全新的高分辨率格式(NPUS), 并且利用这一新格式进行了数值模拟及计算。本文安排如下: 第二节介绍对流有界性准则; 第三节建立对流项的高分辨率格式; 第四节给出时间离散方法; 第五节给出典型算例及计算结果讨论; 第六节得出结论。

2. 对流有界性准则

经典的高分辨率格式大都是通过将某种对流有界性准则与高阶格式结合而得到的。而高阶格式是通过 κ 格式的赋值得到的。 κ 格式公式化后为:

$$\phi_f = \phi_c + \left[\frac{1+\kappa}{4}(\phi_D - \phi_c) + \frac{1-\kappa}{4}(\phi_c - \phi_U) \right] \quad (2.1)$$

其中, 参数的范围为 $\kappa \in [-1, 1]$, 赋予 κ 不同的值就可以得到一些不同的高阶格式。根据 Leonard [2] 中的思想, 将初始变量 ϕ 转化到标准的格式下, 我们通常在重构步中选取界面处相邻的控制单元。正则化过程可以写为

$$\hat{\phi} = \frac{\phi - \phi_U}{\phi_D - \phi_U}$$

则 κ 格式(2.1)可以正则化为

$$\hat{\phi}_f = \left(1 - \frac{1}{2}\kappa \right) \hat{\phi}_c + \frac{1}{4}(1+\kappa)$$

这表明正则变量 $\hat{\phi}_f$ 的变化只依赖于 $\hat{\phi}_c$ 和 κ 。

在数值求解过程中, 对流项的处理要求在解的光滑区域具有较高的精度, 在激波或大梯度附近稳定且有界。根据 Godunov 的结论[5], 传统高阶数值格式对于对流项的离散, 不满足有界性, 容易产生非物理震荡。线性对流格式及其 NV 形式如表 1 所示。因此想要消除震荡, 必须将有界性准则和高阶格式结合构成高分辨格式来离散对流项。Gaskell 和 Lau [1]利用 NVF 构造了对流有界性准则 CBC, 在 NVF 形式下 CBC 可以写为

$$\begin{cases} \hat{\phi}_c \leq \hat{\phi}_f = f(\hat{\phi}_c) \leq 1, & 0 < \hat{\phi}_c < 1 \\ \hat{\phi}_f = \hat{\phi}_c, & \hat{\phi}_c \geq 1 \\ \hat{\phi}_f = \hat{\phi}_c, & \hat{\phi}_c \leq 0 \end{cases}$$

Table 1. The linear convection schemes and the NV formulations
表 1. 线性对流格式及其 NV 形式

Schemes	κ	Non-normalized	Normalized
SOU	-1	$\phi_f = \frac{3}{2}\phi_c - \frac{1}{2}\phi_U$	$\hat{\phi}_f = \frac{3}{2}\hat{\phi}_c$
CD	1	$\phi_f = \frac{1}{2}\phi_c + \frac{1}{2}\phi_D$	$\hat{\phi}_f = \frac{1}{2}\hat{\phi}_c + \frac{1}{2}$
Fromm	0	$\phi_f = \phi_c + \frac{1}{4}(\phi_D - \phi_U)$	$\hat{\phi}_f = \hat{\phi}_c + \frac{1}{4}$
QUICK	$\frac{1}{2}$	$\phi_f = \frac{3}{4}\phi_c + \frac{3}{8}\phi_D - \frac{1}{8}\phi_U$	$\hat{\phi}_f = \frac{3}{4}\hat{\phi}_c + \frac{3}{8}$
CUI	$\frac{1}{3}$	$\phi_f = \frac{5}{6}\phi_c + \frac{1}{3}\phi_D - \frac{1}{6}\phi_U$	$\hat{\phi}_f = \frac{5}{6}\hat{\phi}_c + \frac{1}{3}$

由于 CBC 准则对于格式的精度没有保证, 为此 Yu 等人[12]和 Hou 等人[13]进一步提出了 BAIR 准则

$$\begin{cases} \frac{3}{2}\hat{\phi}_C \leq f(\hat{\phi}_C) \leq \frac{1}{2}(\hat{\phi}_C + 1) & 0 < \hat{\phi}_C < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}(\hat{\phi}_C + 1) \leq f(\hat{\phi}_C) \leq \frac{3}{2}\hat{\phi}_C, f(\hat{\phi}_C) \leq 1 & \frac{1}{2} \leq \hat{\phi}_C < 1 \\ \hat{\phi}_f = \hat{\phi}_C & \hat{\phi}_C \geq 1 \\ \hat{\phi}_f = \hat{\phi}_C & \hat{\phi}_C \leq 0 \end{cases}$$

另外, TVD 格式的 NVF 形式为

$$\begin{cases} \hat{\phi}_f \leq 1, \hat{\phi}_f \in [\hat{\phi}_C, 2\hat{\phi}_C] & 0 < \hat{\phi}_C < 1 \\ \hat{\phi}_f = \hat{\phi}_C & \hat{\phi}_C \leq 0 \\ \hat{\phi}_f = \hat{\phi}_C & \hat{\phi}_C \geq 1 \end{cases}$$

图 2 中的重叠阴影部分为 TVD 条件和 BAIR 条件的重合区域。如果一个数值格式的 NVF 曲线落入此重叠区域, 就意味着此格式同时满足 TVD 和 BAIR 条件, 则数值格式具有对流有界性。

3. 格式的构造

根据 HR 格式的标准化形式: $\hat{\phi}_f = f(\hat{\phi}_C)$ 。在图 2 中, 所构造的高分辨率有限体积格式的 NV 线必须落在 TVD、CBC 和 BAIR 的交集阴影区域内, 才能满足对流有界性。则:

- 1) 由图 2 可知 $f(0) = 0, f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}, f(1) = 1$;
- 2) $f\left(\frac{1}{3}\right) = u_1, f\left(\frac{2}{3}\right) = u_2$, 参数的范围为 $u_1 \in \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right), u_2 \in \left(\frac{5}{6}, 1\right)$ 而且 $f'(0) > 0$ 。

这样可以保证格式满足 TVD 和 BAIR 等准则, 本文中令 $u_1 = \frac{13}{24}, u_2 = \frac{21}{24}$ 。选取 $\hat{\phi}_C = \frac{1}{3}$ 和 $\hat{\phi}_C = \frac{2}{3}$ 是因为这两个点是 CBC、TVD 和 BAIR 的 NV 线边界的交点值, 控制这两个点的取值能更好地防止格式的落在阴影区域的外部。根据以上的条件, 我们利用五点的 Newton 插值多项式可以构造出格式

$$\hat{\phi}_f = \begin{cases} \frac{9}{4}\hat{\phi}_C^4 - \frac{9}{2}\hat{\phi}_C^3 + \frac{29}{16}\hat{\phi}_C^2 + \frac{23}{16}\hat{\phi}_C, & 0 < \hat{\phi}_C < 1 \\ \hat{\phi}_C, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

图 3 中红色的曲线为构造的 NPUS 格式在 NVF 意义下的曲线。通过图 3 可以看出, 格式很好地满足 CBC、TVD、BAIR 等准则。

4. 时间离散格式

经过对空间离散之后, 我们可以得到关于时间 t 的常微分方程。对于该常微分方程的求解主要有两种方法: 第一种是 Lax-Wendroff 型方法, 即对时间 t 进行 Taylor 展开, 然后利用原 PDE 把时间导数转换成空间导数, 再离散这些空间导数。但对多维问题这种时间离散方法太复杂。第二种方法是利用通常的 ODE 方法, 如 Runge-Kutta 方法或多步方法, 这是有限体积方法主要采取的时间离散方法, 特别是 Shu 所提出的 TVD 型 Runge-Kutta 时间离散方法, 对于间断解和稳定的空间离散组合是非线性稳定的[14]。

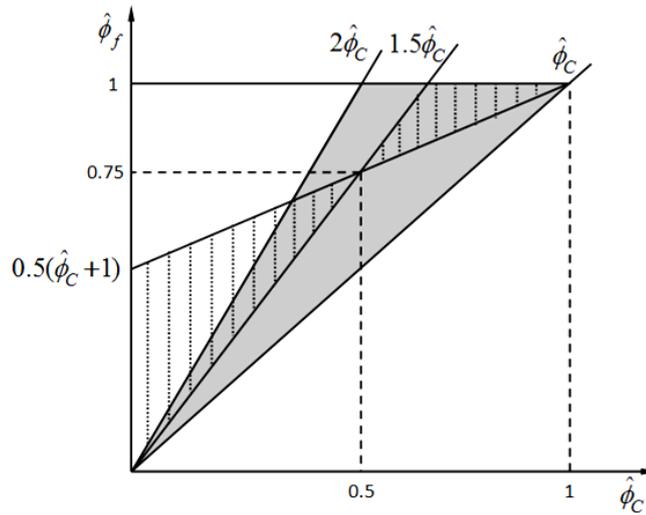


Figure 2. The regions of the TVD (shaded) and BAIR (hatched)
图 2. TVD 条件和 BAIR 条件

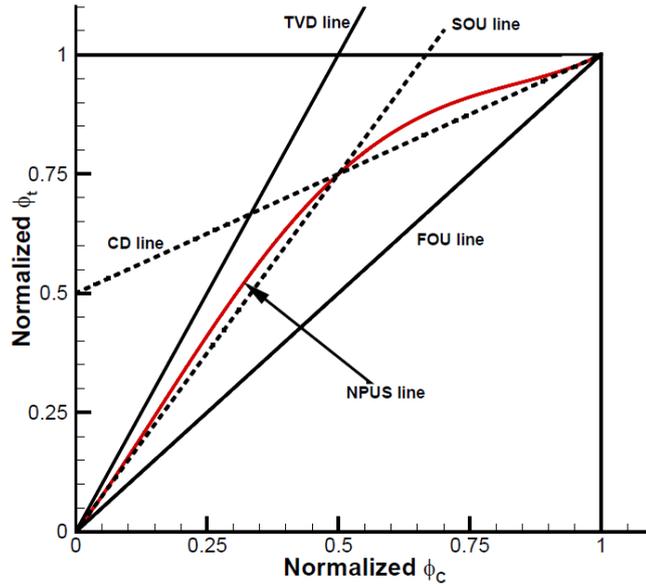


Figure 3. The NV line of the NPUS scheme in the BAIR and TVD region
图 3. NPUS 曲线与 BAIR 和 TVD 区域

二阶 TVD 型 Runge-Kutta 时间离散格式是:

$$\begin{cases} \phi^{(1)} = \phi^{(n)} + \Delta t L(\phi^{(n)}) \\ \phi^{(n+1)} = \frac{1}{2} \phi^{(n)} + \frac{1}{2} [\phi^{(1)} + \Delta t L(\phi^{(1)})] \end{cases}$$

其中 L 是空间离散算子。

5. 数值结果及讨论

为了更好地说明 Newton 插值条件下的高分辨率格式(NPUS)在离散对流项时所具有的性质, 我们对

以下算例进行了数值计算并与 MUSCL 格式进行了对比。数值计算过程中，选取了具有二阶精度的 TVD 二阶 Runge-Kutta 方法[14]且稳定性条件要求 CFL < 1。

5.1. 一维线性对流方程

线性对流方程为

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \tag{5.1}$$

对于给定以下三中不同的初始条件得到相应的数值结果。

5.1.1. 情形 1

给定初值条件为光滑初值条件 $\phi(x, 0) = \sin(\pi x)$ 以及 $u = 1.0$ 时，求解方程(5.1)得到的数值解。格式的精度计算公式为：

$$\|E\|_{L_p} = \frac{\sum_{i=1}^N |\bar{u}_i(\text{computed}) - \bar{u}_i(\text{exact})|^p}{N}, \quad p = 1, 2$$

$$\|E\|_{L_\infty} = \max_{1 \leq i \leq N} |\bar{u}_i(\text{computed}) - \bar{u}_i(\text{exact})|$$

$$\text{order} = \frac{\ln E_N / E_{2N}}{\ln 2}$$

在区间[-1, 1]上求解方程(5.1)，CFL 选取 0.5，通过计算 NPUS 格式，MUSCL 格式及 SMART 格式在等距剖分 20、40、80、60 和 320 份的情形下数值解，利用上述的公式分别计算出 L_1 、 L_2 和 L_∞ 下的误差，同时得到数值精度阶(如表 2)。

由表 2，我们可以看到三个格式在 L_1 范数的意义下，都可以达到二阶精度。

5.1.2. 情形 2

同样对于上述简单的对流方程，依然选取速度为 $u = 1.0$ 使得标量 ϕ 沿着 x -axis 以速度 u 移动。若选取初值为如下的非光滑初值条件

Table 2. Errors and orders for several selected schemes

表 2. 格式误差与数值精度阶对比

Scheme	Mesh	L_1 error	L_1 order	L_2 error	L_2 order	L_∞ error	L_∞ order
NPUS	20	0.047343	--	0.054735	--	0.104618	--
	40	0.013603	1.799216	0.017567	1.639634	0.040717	1.361415
	80	0.003590	1.921725	0.005318	1.723966	0.015506	1.392801
	160	0.000875	2.037329	0.001576	1.754983	0.005812	1.415676
	320	0.000213	2.040502	0.000462	1.768381	0.002142	1.439982
MUSCL	20	0.024513	--	0.030219	--	0.063090	--
	40	0.007810	1.650065	0.009530	1.664966	0.021487	1.553971
	80	0.002127	1.876848	0.002873	1.729696	0.008882	1.274492
	160	0.000539	1.981071	0.000871	1.721405	0.003579	1.311519
	320	0.000135	1.999857	0.000265	1.718636	0.001558	1.199408
SMART	20	0.017735	--	0.022934	--	0.056428	--
	40	0.005180	1.775565	0.006866	1.739887	0.019127	1.560830
	80	0.001328	1.963679	0.002014	1.769396	0.006615	1.531819
	160	0.000325	2.029058	0.000594	1.761791	0.002324	1.508873
	320	0.000079	2.033280	0.000177	1.746700	0.000930	1.321962

$$\phi(x, 0) = \begin{cases} -x \sin\left(\frac{3\pi x^2}{2}\right), & -1 \leq x \leq -\frac{1}{3} \\ |\sin(2\pi x)|, & |x| < \frac{1}{3} \\ 2x - 1 - \frac{1}{6} \sin(3\pi x), & \frac{1}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

选取计算的区间为 $[-2, 2]$, 且 800 等分, 计算时间为 $T = 0.5$, CFL 条件选取 0.2 和 0.5 分别得到图 4(a) 和图 4(b)。图 4 利用 NPUS 格式的结果对比于经典格式 MUSCL 在同样条件下的结果。图 4 中 NPUS 为牛顿插值下的高分辨率格式的结果。通过观察, 我们发现 NPUS 格式与其余的二阶格式具有相近的逼近效果。

5.1.3. 情形 3

对于上述对流方程, 选取如下的非光滑初值条件

$$\phi(x, 0) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 0.2 \\ 4x - \frac{3}{5}, & 0.2 < x \leq 0.4 \\ -4x + \frac{13}{5}, & 0.4 < x \leq 0.6 \\ 1, & 0.6 < x \leq 0.8 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

该初值为 W 形的间断方波。计算过程中将区间 $[-0.5, 2.5]$ 剖分为 800 个区间, 时间选取 $T = 1.0$, 图 5(a) 表示 CFL = 0.2 时 MUSCL 和 NPUS 格式数值结果的对比图。图 5(b)中 CFL = 0.5。

5.2. 一维非线性 Burgers 方程

本节, 我们利用 NPUS 求解一维非线性的无粘性 Burgers 方程, 对于带有粘性的方程:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\phi^2}{2} \right) = \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad 0 \leq \phi \leq 1, \quad 0 < t < T$$

当 $\nu \gg 0$ 时, 方程会产生光滑解。当 $\nu \rightarrow 0$, 方程会的解会出现非物理震荡。所以, 如果令 $\nu = 0$, 方程为

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\phi^2}{2} \right) = 0$$

5.2.1. 情形 1

首先, 我们选取光滑的初始条件:

$$\phi(x, 0) = 0.5 + \sin(\pi x)$$

计算区间为 $[0, 2]$, 且 400 等分, 即空间步长为 $\Delta x = \frac{1}{200}$ 。时间步长通过 CFL 的值作限制使得 $\Delta t = \text{CFL} \frac{\Delta x}{\max_i (|\phi_i|)}$ 。选取 CFL = 0.5 来求解一维无粘性 Burgers 方程。在时间 $T = 1.5/\pi$ 时, 利用 ENO 格式可以得到该方程有光滑解, 如图 6 中的实线。利用上述条件, 通过计算得到图 6 所示的曲线。对比于精确的解, 可以看到在解的大梯度附近, 数值解表现出良好的分辨率。

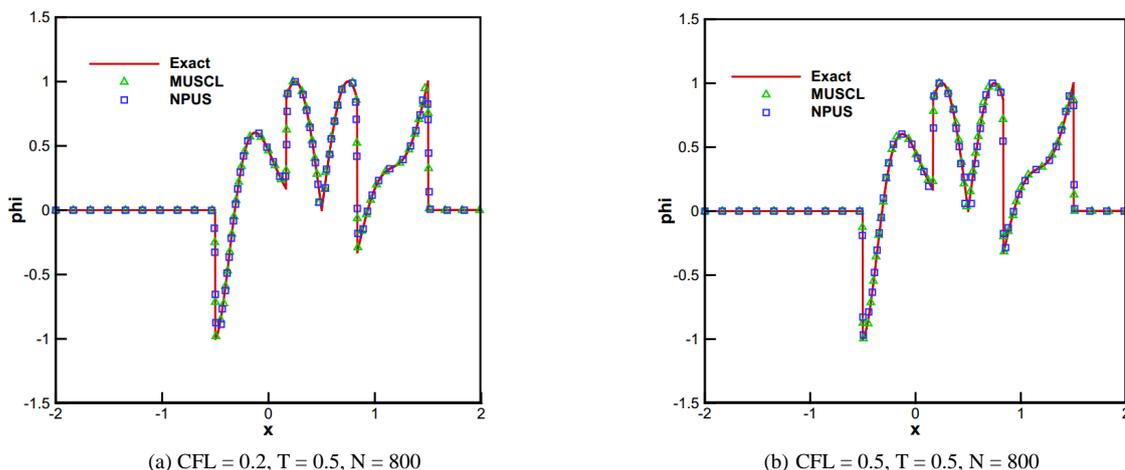


Figure 4. Comparison of MUSCL and NPUS scheme for the linear equation with nonsmooth initial distribution
图 4. 非光滑初值条件 1: MUSCL 与 NPUS 对比

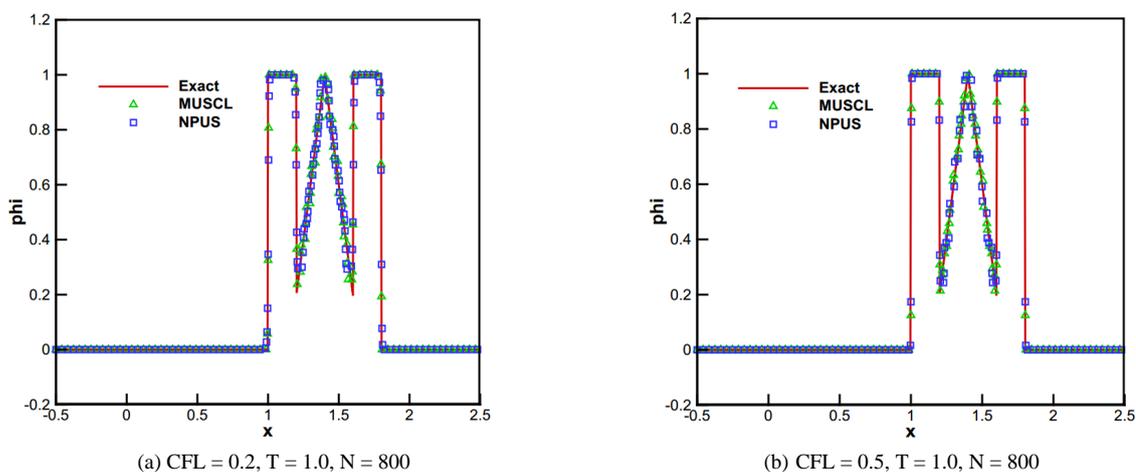


Figure 5. Comparison of MUSCL and NPUS scheme for the linear equation with nonsmooth initial distribution
图 5. 非光滑初值条件 2: MUSCL 与 NPUS 对比

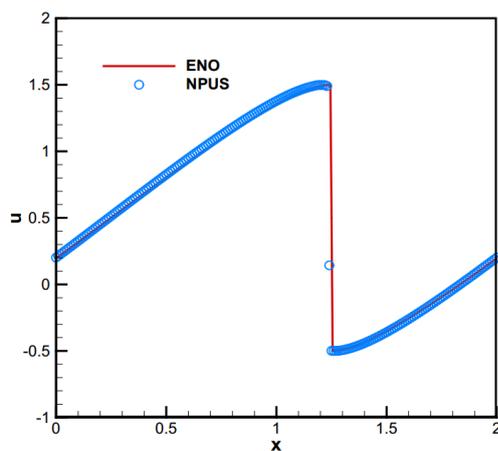


Figure 6. One-dimensional inviscid Burgers equation: comparison of the numerical solutions by the NPUS with 400 cells at CEL = 0.5 with the exact solution
图 6. 一维无粘性 Burgers 方程光滑初值条件 NPUS 的数值解 CFL = 0.5, N = 400

5.2.2. 情形 2

初值条件为非光滑的无粘性 Burgers 方程，选取如下的初值条件进行模拟：

$$\phi(x, 0) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 0.5 & -1 \leq x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}$$

计算区间为 $[-2, 2]$ ，并 400 等分。由于无粘性 Burgers 方程的特性，在上述初值的条件下，选取 $T = 1.0$ 得到图 7(a)和图 7(b)，选取 $T = 2.0$ 得到图 7(c)和图 7(d)。为了更好的分析格式对该类问题的求解，选取 CFL = 0.2 得到图 7(a)和图 7(c)、CFL = 0.5 得到图 7(b)和图 7(d)。从图中可以看到对于间断处，格式 NPUS 能够有效地抑制震荡的产生，并且对于精确解有较好的逼近效果。

5.3. 一维非线性 Buckley-Leverett 方程

一维情形下，非线性非凸的标量 Buckley-Leverett 方程形式如下

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{4\phi^2}{4\phi^2 + (1-\phi)^2} \right) = 0$$

初始条件为

$$\phi(x, 0) = \begin{cases} 1 & -0.5 \leq x \leq 0 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

选取常 CFL = 0.5，时间步长 $\Delta t = \text{CFL} \frac{\Delta x}{\max_i (|\phi_i|)}$ ，并将区间 $[-1, 1]$ 等分为 400 份。利用 ENO 格式可

以得到该方程在上述初值条件下的数值解，如图 8 中的实线。我们利用格式 NPUS 数值计算该方程到时间为 $T = 0.4$ 时，得到逼近结果如图 8 的圆圈。从图形可以看出：数值计算结果很好的逼近 ENO 格式的数值解，在大梯度附近很好地抑制震荡。

5.4. 二维线性对流方程

利用格式 NPUS 求解二维对流方程，我们选取 Doswell 问题的数学模型

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (au)}{\partial x} + \frac{\partial (bu)}{\partial y} = 0$$

其中在速度场中有稳定的切向速度

$$v_t(r) = \frac{1}{v_{\max}} \frac{\tanh(r)}{\cosh^2(r)}$$

在计算中 $v_{\max} = 0.358$ ，而且在该场中

$$a(x, y) = -\frac{y-x_0}{r} v_t(r), \quad b(x, y) = -\frac{y-x_0}{r} v_t(r)$$

其中 (x_0, y_0) 为旋转中心， $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ 表示区域内任意一点与中心的距离。定义角速度为 $\omega = \frac{v_t(r)}{r}$ 。计算时我们选取计算区域为 $[-3, 3] \times [-3, 3]$ 的方形区域内。该问题的精确解

$$u(x, y, t) = \tanh \left[\frac{y-x_0}{\delta} \cos(\omega t) - \frac{x-y_0}{\delta} \sin(\omega t) \right]$$

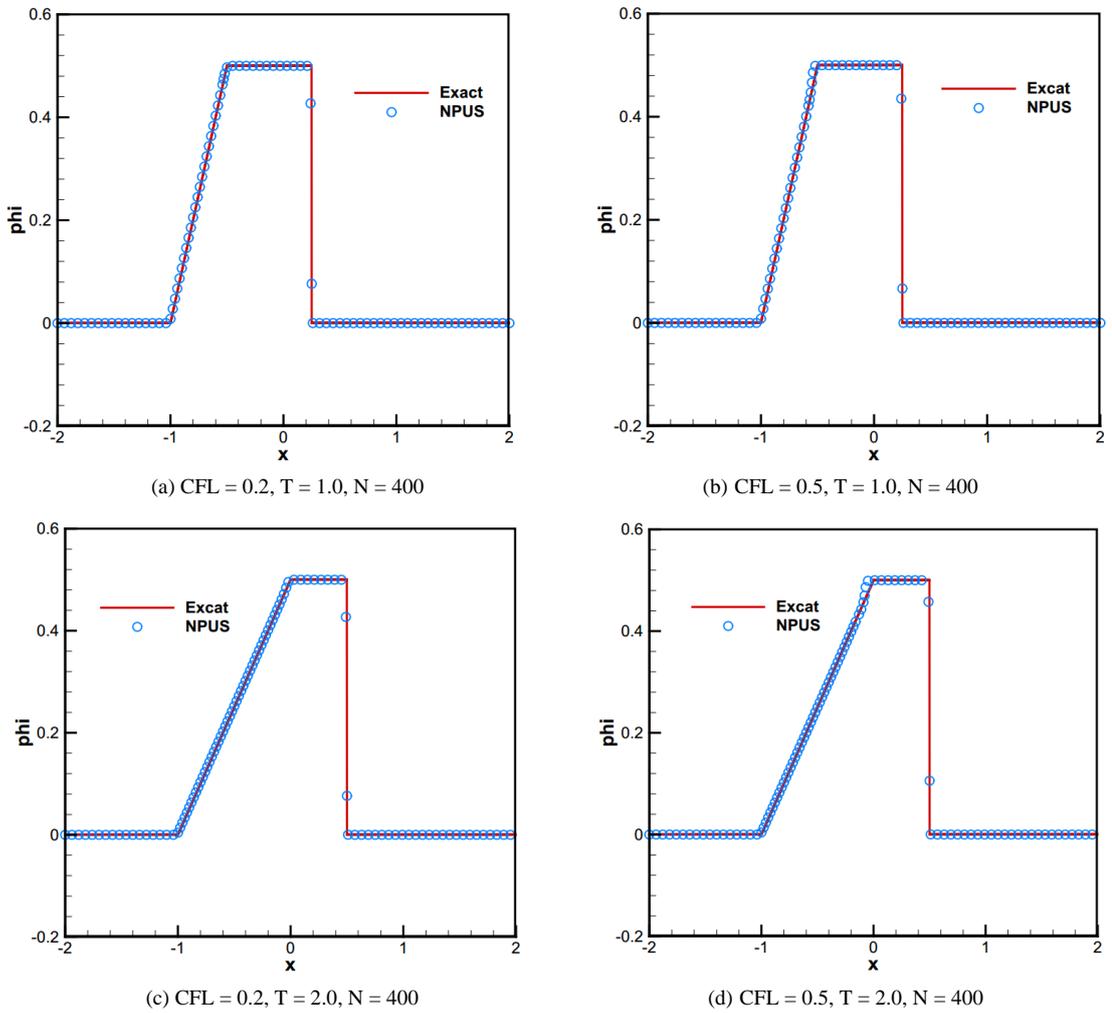


Figure 7. One-dimensional inviscid Burgers equation with nonsmooth initial distribution: comparison of the numerical solutions by the NPUS with the exact solution

图 7. 一维无粘性 Burgers 方程非光滑初值条件 NPUS 数值解

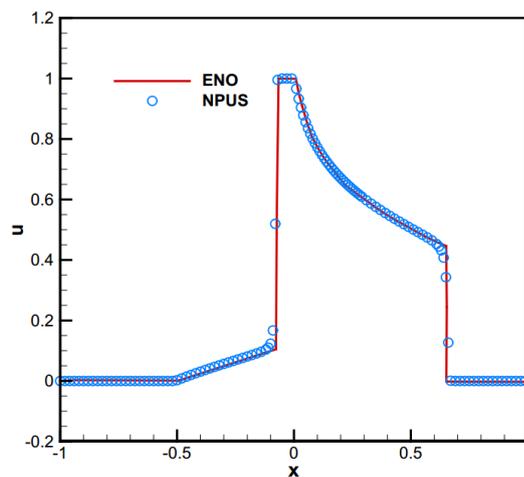


Figure 8. Comparison of numerical and exact results of the Buckley-Leverett equation

图 8. 一维非线性 Buckley-Leverett 方程 NPUS 数值解

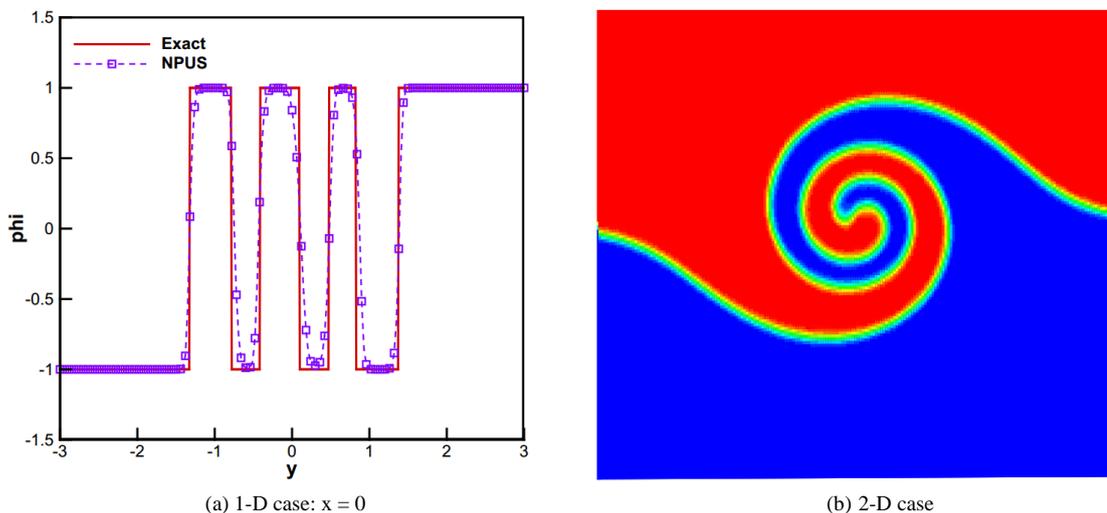


Figure 9. Exact and numerical solutions of Doswell frontogenesis at $t = 4$. The meshes of 200×200 are used
 图 9. Doswell frontogenesis 数值解 $T = 4, N \times N = 200 \times 200$

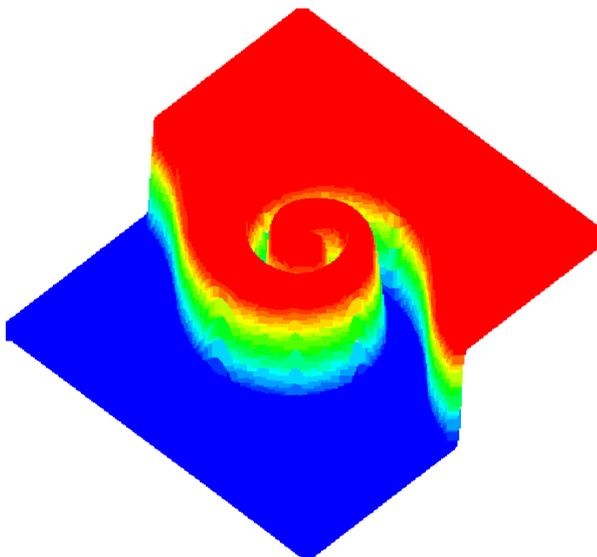


Figure 10. The numerical solution of Doswell frontogenesis in 3D view
 图 10. Doswell frontogenesis 数值解 3-D 情形

参数 δ 象征了锋面的梯度。初值条件可以令 $t = 0$ 得到 $u(x, y, 0)$ ，同时计算中选取 $\delta = 10^{-6}$ 。计算区域为 $[-3, 3] \times [-3, 3]$ ，将其等距剖分为 200×200 的网格。CFL = 0.45 的条件下，计算到时间 $T = 4$ ，利用 NPUS 得到数值结果如图 9 所示。图 9(a) 是选取 $x = 0$ 时，数值解关于 y 的图像。图 9(b) 显示了数值解的 2D 图。由图 9(a) 可以清晰地看到 NPUS 格式能够很好的逼近精确解。图 9(b) 反应了锋面生成漩涡的形状。图 10 展示了数值解的三维图。

6. 总结

本文以 CBC (BAIR) 准则为基础，通过结合 TVD 条件，在 NVD 下利用牛顿插值形式，构造高分辨率(NPUS)格式。此格式在离散对流项时计算方案简洁，多个经典算例表明，本文的计算格式具有较高的数值分辨率以及优良的计算稳定性。

致 谢

本文由教育部科学技术研究重点项目(12024)与内蒙古自治区人才开发基金项目(12000-1300020240)支持。

参考文献 (References)

- [1] Spalding, D.B. (1972) A novel finite difference formulation for differential expressions involving both first and second derivatives. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **4**, 551-559.
- [2] Lax, P.D. and Wendroff, B. (1960) Systems of conservation laws. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **13**, 217-237.
- [3] Leonard, B.P. (1979) A stable and accurate modeling procedure based on quadratic interpolation. *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, **19**, 59-98.
- [4] Agarwal, R.K. (1981) A third-order-accurate upwind scheme for Navier-Stokes solutions at high Reynolds numbers. *American Institute of Aeronautics and Astronautics, 19th Aerospace Sciences Meeting*, St. Louis, 12-15 January 1981.
- [5] Roe, P.L. (1986) Character-based schemes for the Euler equations. *Annual Review of Fluid Mechanics*, **18**, 337-365.
- [6] Harten, A. (1983) High resolution scheme for hyperbolic conservation law. *Journal of computational Physics*, **49**, 357-393.
- [7] Sweby, P.K. (1984) High resolution scheme using flux limiters for hyperbolic conservation laws. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **21**, 995-1011.
- [8] Leonard, B.P. (1988) Simple high-accuracy resolution program for convective modeling of discontinuities. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **8**, 1291-1318.
- [9] Gaskell, P.H. and Lau, A.K.C. (1988) Curvature-compensated convective transport: SMART, A new boundedness-preserving transport algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **8**, 617-641.
- [10] Van Leer, B. (1974) Towards the ultimate conservative difference scheme. II. Monotonicity and conservation combined in a second-order scheme. *Journal of Computation Physics*, **14**, 361-370.
- [11] Wei, J.J., Yu, B. and Tao, W.Q. (2003) A new high-order-accurate and bounded scheme for incompressible flow. *Numerical Heat Transfer: Part B: Fundamentals*, **43**, 19-41.
- [12] Yu, W.Q., Tao, D.S., Zhang, Q.W. and Wang, B. (2001) Discussion on numerical stability and boundedness of convective discretized scheme. *Numerical Heat Transfer: Part B: Fundamentals*, **40**, 343-365.
- [13] Hou, P.L., Tao, W.Q. and Yu, M.Z. (2003) Refinement of the convective boundedness criterion of Gaskell and Lau. *Engineering Computations*, **20**, 1023-1043.
- [14] Gottlieb, S. and Shu, C.W. (1998) Total variation diminishing Runge-Kutta schemes. *Mathematics of Computation*, **67**, 73-85.