Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2016, 5(1), 59-62
Published Online February 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2016.51009

Hans汉斯

Connected Graphs with Distinct Eigenvalues

Guozheng Li

Department of Mathematics, Qinghai Normal University, Xining Qinghai
Email: guozhengli@aliyun.com

Received: Feb. 2nd, 2016; accepted: Feb. 21st, 2016; published: Feb. 24th, 2016

Abstract

A necessary and sufficient condition for graphs with *k* distinct eigenvalues is determined for *Q*-matrix and adjacency matrix.

Keywords

***Q*-Matrix, Adjacency Matrix, Eigenvalue, Graph Spectrum**

具有不同特征值的连通图

李国政

青海师范大学数学系，青海 西宁
Email: guozhengli@aliyun.com

收稿日期：2016年2月2日；录用日期：2016年2月21日；发布日期：2016年2月24日

摘　要

关于图的*Q*-矩阵和邻接矩阵，给出了具有*k*个不同特征值的连通图的充分必要条件。

关键词

Q-矩阵，邻接矩阵，特征值，图的谱

文章引用：李国政．具有不同特征值的连通图[J]．应用数学进展, 2016, 5(1): 59-62.
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2016.51009

1. 引言

本文仅考虑有限无向简单连通图(即不含环和重边)。令 $G=G\left(V(G),E(G)\right)$ 表示点集为 $V(G)$，边集为 $E(G)$ 的图，它的阶数为 $\left|V(G)\right|=n$。图 G 的 Q-矩阵定义为 $Q=Q(G)=A(G)+D(G)$，其中 $A(G)$ 和 $D(G)$ 分别表示图 G 的邻接矩阵和度矩阵。图 G 的 Q-特征值和邻接特征值就是其 Q-矩阵和邻接矩阵的特征值。由于 $Q(G)$ 是实对称的半正定矩阵，故图 G 的 Q-特征值是非负实数，并且设为 $q_1\ge q_2\ge\cdots\ge q_n\ge 0$。

近来，Q-矩阵(在[1]中被命名)吸引了很多研究者的兴趣，文[2]以及随后的文[3]-[5]提出并规范了图的 Q-谱理论。Q-矩阵是一个很好的工具，因为它的谱性质在很多方面优于拉普拉斯矩阵 $L(G)$ 和 $A(G)$。关于这方面的结果可参见上述文献。因此，本文将重点研究图的 Q-谱。

Doom [6]首先研究了具有不同邻接特征值的连通图。后来，Van Dam [7]-[10]对这个问题作出了很多重要的贡献。关于具有不同 Q-特征值的连通图，Ayoobi 等[11]指出具有两个不同 Q-特征值的连通图是完全图，并研究了有三个不同 Q-特征值的图。本文将研究具有 k 不同 Q-特征值的连通图。

为了证明本文的主要结果，首先引入矩阵理论中的结果[12]。设 R 和 $M_n(\mathrm{R})$ 分别表示实数集和 n 阶的实矩阵。

性质 1 设 $B\in M_n(\mathrm{R})$。

(i) B 是对角矩阵的充要条件是 B 的特征值在 R 中，并且每个特征值的代数重数与几何重数相等。

(ii) 设 B 所有不同的特征值为 $q_1,q_2,\cdots,q_k$。则 B 是对角矩阵的充要条件是其最小多项式为 $m(x)=(x-q_1)(x-q_2)\cdots(x-q_k)$。

(iii) B 的秩等于 1 的充要条件是存在两个非零的实 n 维向量 x 和 y，使得 $B=xy^{\mathrm{T}}$。

2. 主要结果

用 O 和 I 分别表示零矩阵和单位矩阵。

定理 2.1. 设 G 是一个阶为 n 的连通图。G 存在 $k(2\le k\le n)$ 个不同 Q-特征值的充要条件是存在 k 个不同的实数 $q_1,q_2,\cdots,q_k$ 满足下面的条件

(i) $Q-q_iI$ 是一个不可逆矩阵，$2\le i\le k$；

(ii) $\prod_{i=2}^{k}(Q-q_iI)=c\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$，其中 $c=\dfrac{\prod_{i=1}^{k}(q_1-q_i)}{\|\alpha\|_2^2}\in\mathrm{R}\alpha^{\mathrm{T}}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 是属于特征值 q_1 的特征向量。

而且，$q_1,q_2,\cdots,q_k$ 正是 G 的 k 个不同的 Q-特征值。

证明： 令 $q_1>q_2>\cdots>q_k$ 是图 G 的 k 个不同的 Q-特征值。由性质 1 (ii)得 Q 的最小多项式是

$$m(x)=(x-q_1)(x-q_2)\cdots(x-q_k),$$

从而有

$$m(Q)=(Q-q_1I)\prod_{i=2}^{k}(Q-q_iI)=O。\tag{1}$$

设 $Q\alpha=q_1\alpha$，其中 $\alpha^{\mathrm{T}}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$。由于 G 是连通图，那么 q_1 的代数重数等于 1，从而由性质 1 (i)得 q_1 的几何重数也是 1。因此，在 G 中任何关于 q_1 的特征向量都是 α 的倍数。所以，通过(1)得矩阵 $\prod_{i=1}^{k-1}(Q-q_iI)$ 的每列都可用 $b_i\alpha$ 的形式表示，其中 $b_i\in\mathrm{C}(i=1,2,\cdots,n)$。从而

$$\prod_{i=1}^{k-1}(Q-q_iI)=\alpha(b_1,b_2,\cdots,b_n)。\tag{2}$$

由于 $\alpha^{\mathrm{T}}(Q-q_iI)=\alpha^{\mathrm{T}}Q-q_i\alpha^{\mathrm{T}}=(q_1-q_i)\alpha^{\mathrm{T}}$，在(2)的两边乘以 α^{T} 得

$$\prod_{i=1}^{k}(q_1-q_i)\alpha^{\mathrm{T}}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\alpha^{\mathrm{T}}\alpha=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\|\alpha\|_2^2,$$

其中$\|\cdot\|$是欧几里得范数。故对于$i=1,2,\cdots,n$，

$$b_i=\frac{\prod_{i=1}^{k}(q_1-q_i)}{\|\alpha\|_2^2}a_i。$$

必要性得证。

下证充分性。由齐次线性方程组的性质知：由(i)得$(Q-q_iI)x=O$有一个非零解，不妨设为α_i。故有$Q\alpha_i=q_i\alpha_i$，这表明q_i是矩阵$Q(2\le i\le k)$的特征值。由(ii)得q_1是矩阵Q的一个特征值。至此得到了G的k个不同的特征值$q_1,q_2,\cdots,q_k$。假设G除此之外还存在其它的特征值q_{k+1}。令$f(x)=\prod_{i=2}^{k}(x-q_i)$。则易得$f(q_i)(1\le i\le k+1)$是$f(H)$的特征值。显然，$f(q_1)\ne 0$，$f(q_i)=0(2\le i\le k)$且$f(q_{k+1})\ne 0$。通过(ii)和性质1(iii)知，$f(Q)$的秩是1。故$f(Q)$仅有一个非零特征值，矛盾，得证。

众所周知，若G是连通图，邻接矩阵和Q-矩阵的上述性质相同。故定理也对邻接矩阵成立。从而有下面的结果：

定理 2.2. 设G是一个阶为n的连通图。G存在$k(2\le k\le n)$个不同邻接特征值的充要条件是存在k个不同的实数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$满足下面的条件

(i) $A-\lambda_iI$是一个不可逆矩阵，$2\le i\le k$；

(ii) $\prod_{i=2}^{k}(Q-q_iI)=c\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$，其中$c=\dfrac{\prod_{i=1}^{k}(q_1-q_i)}{\|\alpha\|_2^2}\in\mathrm{R}\ \alpha^{\mathrm{T}}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$是属于特征值$\lambda_1$的特征向量。

而且，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$正是$G$的$k$个不同的邻接特征值。

关于图的直径和不同邻接特征值的个数有以下的关系[13]，本文采用定理2.2给出一个新的证明方法。

推论 2.1. 设G是连通图且有k个不同的邻接特征值。则图的直径$\operatorname{diam}(G)$至多是$k-1$。

证明： 由定理2.2(ii)得

$$\prod_{i=2}^{k}(A-\lambda_iI)=A^{k-1}+a_1A^{k-2}+a_2A^{k-3}+\cdots+a_{k-2}A+a_{k-1}I=\alpha\alpha^{\mathrm{T}}=(b_{ij})_{n\times n}\tag{3}$$

因为α是正特征向量，则$b_{ij}>0$。假设$\operatorname{diam}(G)>k-1$。由直径的定义知，对于顶点$v_i$和$v_j$，矩阵$A^{(s)}(1\le s\le k-1)$的$(i,j)$元$a_{ij}^{(s)}$满足

$$a_{ij}^{(k-1)}=a_{ij}^{(k-2)}=\cdots=a_{ij}=0,$$

这连同(3)得

$$b_{ij}=a_{ij}^{(k-1)}+\alpha_1a_{ij}^{(k-2)}+\alpha_2a_{ij}^{(k-3)}+\cdots+\alpha_{k-2}a_{ij}=0,$$

矛盾。故$\operatorname{diam}(G)\le k-1$。

注记 2.2. Ayoob 等[11]研究具有三个不同的Q-特征值，他们的定理[11]恰是定理2.1中$k=3$的特殊情况。

注记 2.3. Harary 和 Schwenk 在四十年前提出问题：哪些图具有完全不同的邻接特征值？定理2.2中$k=n$的情形给出了此问题的代数条件，进一步需要研究的问题就是如何利用此条件刻画图的结构。

基金项目

国家自然科学基金青年科学基金(编号11101232)，国家自然科学基金(编号11461054)。

参考文献 (References)

[1] Haemers, W.H. and Spence, E. (2004) Enumeration of Cospectral Graphs. *European Journal of Combinatorics*, **25**, 199-211. http://dx.doi.org/10.1016/S0195-6698(03)00100-8

[2] Cvetković, D., Rowlinson, P. and Simić, S.K. (2007) Signless Laplacian of Finite Graphs. *Linear Algebra and Its Applications*, **423**, 155-171. http://dx.doi.org/10.1016/j.laa.2007.01.009

[3] Cvetković, D. and Simić, S.K. (2009) Towards a Spectral Theory of Graphs Based on Signless Laplacian, I. *Publications de l'Institut Mathématique* (*Beograd*) (*N.S.*), **85**, 19-33.

[4] Cvetković, D. and Simić, S.K. (2010) Towards a Spectral Theory of Graphs Based on Signless Laplacian, II. *Linear Algebra and Its Applications*, **432**, 2257-2272. http://dx.doi.org/10.1016/j.laa.2009.05.020

[5] Cvetković, D. and Simić, S.K. (2010) Towards a Spectral Theory of Graphs Based on Signless Laplacian, III. *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, **4**, 156-166. http://dx.doi.org/10.2298/AADM1000001C

[6] Doob, M. (1970) Graphs with a Small Number of Distinct Eigenvalues. *Annals of the New York Academy of Sciences*, **175**, 104-110. http://dx.doi.org/10.1111/j.1749-6632.1970.tb56460.x

[7] van Dam, E.R. (1996) Graphs with Few Eigenvalues. An Interplay between Combinatorics and Algebra. Center Dissertation Series 20, Thesis, Tilburg University, Tilburg.

[8] van Dam, E.R. (1998) Graphs with Few Distinct Eigenvalues, Where Most of the Times Few Means Three or Four. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **73**, 101-118. http://dx.doi.org/10.1006/jctb.1998.1815

[9] van Dam, E.R. and Haermers, W.H. (1998) Graphs with Constant μ and $\bar{\mu}$. *Discrete Mathematics*, **182**, 293-307.

[10] van Dam, E.R. and Spenceb, E. (1998) Small Regular Graphs with Four Eigenvalues. *Discrete Mathematics*, **189**, 233-257. http://dx.doi.org/10.1016/S0012-365X(98)00085-5

[11] Ayoobi, F., Omidi, G.R. and Tayfeh-Rezaie, B. (2011) A Note on Graphs Whose Signless Laplacian Has Three Distinct Eigenvalues. *Linear Multilinear Algebra*, **59**, 701-706. http://dx.doi.org/10.1080/03081087.2010.489900

[12] Horn, R.A. and Johnson, C.R. (1986) Matrix Analysis. Cambridge University Press, Cambridge.

[13] Cvetković, D., Doob, M. and Sachs, H. (1995) Spectra of Graphs-Theory and Applications III. Johan Ambrosius Bart Verlag, Heidelberg-Leipzig.