Pure Mathematics 理论数学, 2017, 7(2), 104-135
Published Online March 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2017.72015

Study on Unsteady Free Boundary Problem

Xiaoqing Wu
College of Science, Southwest Petroleum University, Chengdu Sichuan
Email: wuxiaoqing_swpu@163.com

Received: Mar. 11th, 2017; accepted: Mar. 28th, 2017; published: Mar. 31st, 2017

Abstract

In this paper, the singular interior boundary problem of heat conduction equation is established: seeking $\{u(x,t),x(t)\}$, satisfy

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-b\dfrac{\partial u}{\partial x}-ru+\gamma(t)\delta(x-x(t)),-\infty<x<+\infty,t>0 \\ u(x,0)=0,-\infty<x<+\infty \\ u(x(t),t)=\max\limits_{-\infty<x<+\infty}u(x,t)=\phi(t),t\geq 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(x(t),t)=0,t\geq 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}|u|<\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}|u|<\infty \end{cases} \tag{I}$$

which $\phi(t)$ is the function to be determined.

And the linear function expression $x(t)=x_0+bt$ of singular inner boundary is obtained, satisfying $u(x(t),t)=\max\limits_{-\infty<x<+\infty}u(x,t)$.

We establish free boundary problem A and free boundary problem B on homogeneous heat conduction equation.

The problem A is free boundary problem in region $-\infty<x\leq x(t),t\geq 0$. The problem B is free boundary problem in region $x(t)\leq x<+\infty,t\geq 0$. It is obtained that free boundary about problem A and problem B are the linear function $x(t)=x_0+bt$. The free boundary about problem A and problem B coincides with the singular inner boundary.

Similarly,we establish the singular interior boundary problem of Black-Scholes equation: seeking $\{u(s,t),s(t)\}$, satisfy

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\sigma^2}{2}s^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial s^2}+(r-q)s\dfrac{\partial u}{\partial s}-ru=-\gamma(t)\delta(s-s(t)),0<s<+\infty,0<t<T \\ u(s,T)=\varphi(s),0\leq s<+\infty \\ u(s(t),t)=\phi(t),0<t\leq T \\ \dfrac{\partial u}{\partial s}(s(t),t)=\upsilon(t),0<t\leq T \\ \lim\limits_{s\to 0^+}|u|<+\infty,\ \lim\limits_{s\to+\infty}|u|<+\infty \end{cases} \tag{II}$$

which $\phi(t)$ and $\upsilon(t)$ are functions to be determined.

文章引用: 吴小庆. 不定常自由边界问题研究[J]. 理论数学, 2017, 7(2): 104-135.
https://doi.org/10.12677/pm.2017.72015

When final function $\varphi = 0$, and boundary value function $\upsilon = 0$, the singular inner boundary $s(t) = s_T e^{\sigma^2 \varpi (T-t)}$ is obtained, and the solution function $u(s,t) = w(s,t)$ satisfies $w(s(t),t) = \max_{0 \le s < \infty} w(s,t)$ and when final function $\varphi \ne 0$, the singular inner boundary $s(t) = s_T e^{\sigma^2 \varpi (T-t)}$ is obtained, and the solution function $u(s,t) = v(s,t) + w(s,t)$ satisfies $w(s(t),t) = \max_{0 \le s < \infty} w(s,t)$ and boundary value function $\upsilon(t) = \frac{\partial v}{\partial s}(s(t),t), \phi(t) = v(s(t),t) + w(s(t),t)$.

We establish free boundary problem A and free boundary problem B on homogeneous Black-Scholes equation.

The problem A is free boundary problem in region $0 \le s \le s(t), 0 < t \le T$. The problem B is free boundary problem in region $s(t) \le s < +\infty, 0 < t \le T$. It is determined $s(t) = s_T e^{\sigma^2 \varpi (T-t)}$ that free boundary about problem A and problem B. The conclusion $s_T = K$ by the final value function $\varphi(s)$ satisfies $\overline{\mathrm{supp}\varphi} = [K, +\infty)$ or $\overline{\mathrm{supp}\varphi} = [0, K]$. Thus the conclusion that $s(t) = K e^{\Theta(T-t)}$ is the public free boundary about the problem A and problem B,which satisfies the condition $\frac{1}{s(t)} \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} \equiv -\Theta$, constant $\Theta = q - r + \frac{1}{2}\sigma^2$ determined by the parameters q, r, σ^2 in the Black-Scholes equation.

Keywords

Heat Conduction Equation, Black-Scholes Equation, Free Boundary Problem, Inverse Problem

不定常自由边界问题研究

吴小庆

西南石油大学理学院，四川 成都
Email: wuxiaoqing_swpu@163.com

收稿日期：2017年3月11日；录用日期：2017年3月28日；发布日期：2017年3月31日

摘　要

本文建立了热传导方程的奇异内边界问题：求$\{u(x,t), x(t)\}$，使其满足

$$
\begin{cases}
\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b\frac{\partial u}{\partial x} - ru + \gamma(t)\delta(x - x(t)), -\infty < x < +\infty, t > 0 \\
u(x,0) = 0, -\infty < x < +\infty \\
u(x(t),t) = \max_{-\infty < x < +\infty} u(x,t) = \phi(t), t \ge 0 \\
\frac{\partial u}{\partial x}(x(t),t) = 0, t \ge 0 \\
\lim_{x \to -\infty} |u| < \infty, \lim_{x \to +\infty} |u| < \infty
\end{cases}
\tag{I}
$$

其中 $\phi(t)$ 为待求函数。并获得奇异内边界的线性函数表达式 $x(t)=x_0+bt$，且解函数 $u(x,t)$ 满足 $u(x(t),t)=\max\limits_{-\infty<x<+\infty} u(x,t)$。同时获得了热传导方程的问题A (在区域 $-\infty<x\le x(t),t\ge 0$ 上的自由边界问题)和问题B(在区域 $x(t)\le x<+\infty,t\ge 0$ 上的自由边界问题)的自由边界皆为 $x(t)=x_0+bt$，问题A和问题B的自由边界与奇异内边界重合；线性函数表达式 $x(t)=x_0+bt$ 为最佳热源位置边界。完全类似地，我们建立了Black-Scholes方程的奇异内边界问题：

求 $\{u(s,t),s(t)\}$，使其满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\sigma^2}{2}s^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial s^2}+(r-q)s\dfrac{\partial u}{\partial s}-ru=-\gamma(t)\delta(s-s(t)),0<s<+\infty,0<t<T\\ u(s,T)=\varphi(s),0\le s<+\infty\\ u(s(t),t)=\phi(t),0<t\le T\\ \dfrac{\partial u}{\partial s}(s(t),t)=\upsilon(t),0<t\le T\\ \lim\limits_{s\to 0^+}|u|<+\infty,\ \lim\limits_{s\to+\infty}|u|<+\infty\end{cases} \tag{II}$$

其中 $\phi(t)$，$\upsilon(t)$ 为待求函数。

获得：1^0 当终值函数 $\varphi=0$ 且边值函数 $\upsilon=0$ 时；奇异内边界为 $s(t)=s_T e^{\sigma^2\varpi(T-t)}$，且解函数 $u(s,t)=w(s,t)$ 满足 $w(s(t),t)=\max\limits_{0\le s<\infty} w(s,t)$；$2^0$ 当终值函数 $\varphi\ne 0$ 时；获得奇异内边界为 $s(t)=s_T e^{\sigma^2\varpi(T-t)}$，且解函数 $u(s,t)=v(s,t)+w(s,t)$ 满足 $w(s(t),t)=\max\limits_{0\le s<\infty} w(s,t)$，$\upsilon(t)=\dfrac{\partial v}{\partial s}(s(t),t),\phi(t)=v(s(t),t)+w(s(t),t)$。同时建立了自由边界问题A(在区域 $0\le s\le s(t),0<t\le T$ 上)和自由边界问题B(在区域 $s(t)\le s<+\infty,0<t\le T$ 上)。获得问题A和问题B在齐次终值条件下确定的自由边界都为 $s(t)=s_T e^{\sigma^2\varpi(T-t)}$。终值函数 φ 满足 $\overline{\mathrm{supp}\varphi}=[K,+\infty)$ 或 $\overline{\mathrm{supp}\varphi}=[0,K]$ 得到 $s_T=K$。从而问题A和问题B具有公共自由边界 $s(t)=Ke^{\Theta(T-t)}$，满足条件 $\dfrac{1}{s(t)}\dfrac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}\equiv-\Theta$，常数 $\Theta=q-r+\dfrac{1}{2}\sigma^2$ 由Black-Scholes方程中的参数 q,r,σ^2 唯一确定。

关键词

热传导方程，Black-Scholes方程，自由边界问题，反问题

1. 引言

一个偏微分方程的定解问题，若其定解区域的部分边界是待定的，它和定解问题的解彼此相关且必须同时确定。这类定解问题，人们称之为自由边界问题，其待定边界称为自由边界。所有自由边界问题都是非线性问题。自由边界问题的研究有着广泛的实际背景。在渗流力学、等离子物理、塑性力学、射

流等方面都提出了各种不同形式的定常和不定常自由边界问题[1]-[18]。热传导方程和 Black-Scholes 方程的自由边界问题都是不定常自由边界问题。

本文建立了热传导方程的**奇异内边界问题**：求$\{u(x,t),x(t)\}$，使其满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-b\dfrac{\partial u}{\partial x}-ru+\gamma(t)\delta(x-x(t)),-\infty<x<+\infty,t>0\\ u(x,0)=0,-\infty<x<+\infty\\ u(x(t),t)=\max\limits_{-\infty<x<+\infty}u(x,t)=\phi(t),t\geq 0\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(x(t),t)=0,t\geq 0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}|u|<+\infty,\lim\limits_{x\to+\infty}|u|<+\infty\end{cases}\tag{I}$$

其中$\phi(t)$为待求函数。并获得奇异内边界的线性函数表达式$x(t)=x_0+bt$，且解函数$u(x,t)$满足$u(x(t),t)=\max\limits_{-\infty<x<\infty}u(x,t)$；同时获得了热传导方程的自由边界问题 A(在区域$-\infty<x\leq x(t),t\geq 0$上)和问题 B(在区域$x(t)\leq x<+\infty,t\geq 0$上)的自由边界皆为$x(t)=x_0+bt$，问题 A 和问题 B 的自由边界与奇异内边界重合；线性函数表达式$x(t)=x_0+bt$为最佳热源位置边界。完全类似地，我们建立了 Black-Scholes 方程的**奇异内边界问题**：求$\{u(s,t),s(t)\}$，使其满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\sigma^2}{2}s^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial s^2}+(r-q)s\dfrac{\partial u}{\partial s}-ru=-\gamma(t)\delta(s-s(t)),0<s<+\infty,0<t<T\\ u(s,T)=\varphi(s),0\leq s<+\infty\\ u(s(t),t)=\phi(t),0<t\leq T\\ \dfrac{\partial u}{\partial s}(s(t),t)=\upsilon(t),0<t\leq T\\ \lim\limits_{s\to 0^+}|u|<+\infty,\lim\limits_{s\to+\infty}|u|<+\infty\end{cases}\tag{II}$$

1^0 当$\varphi=0$，且$\upsilon=0$，获得奇异内边界为$s(t)=s_T\mathrm{e}^{\sigma^2\varpi(T-t)}$，且解函数$u(s,t)=w(s,t)$满足$w(s(t),t)=\max\limits_{0\leq s<+\infty}w(s,t)$；$2^0$ 当$\varphi(s)\neq 0$获得奇异内边界为$s(t)=s_T\mathrm{e}^{\sigma^2\varpi(T-t)}$，且解函数$u(s,t)=v(s,t)+w(s,t)$满足$w(s(t),t)=\max\limits_{0\leq s<+\infty}w(s,t),\upsilon=\dfrac{\partial v}{\partial s}(s(t),t)$。同时建立了自由边界问题 A(在区域$0\leq s\leq s(t),0<t\leq T$上)和自由边界问题 B(在区域$s(t)\leq s<+\infty,0<t\leq T$上)。获得问题 A 和问题 B 的自由边界都为$s(t)=s_T\mathrm{e}^{\sigma^2\varpi(T-t)}$。终值函数$\varphi(s)$满足条件$\overline{\mathrm{supp}\varphi}=[K,+\infty)$或$\overline{\mathrm{supp}\varphi}=[0,K]$下得到$s_T=K$。从而问题 A 和问题 B 具有公共自由边界$s(t)=K\mathrm{e}^{\sigma^2\varpi(T-t)}$。

2. 主要结果

2.1. 热传导方程在区域$\Omega:-\infty<x<+\infty,t>0$具有多条奇异内边界$x=x_j(t),t>0;j\in\{0,1,2,\cdots,N\}$的初值问题数学模型 I

符号说明：

记$x_j(0)\cong x_{j0},j\in\{0,1,\cdots,N\},R\cong\{x|-\infty<x<+\infty\},\Omega:-\infty<x<+\infty,t>0$

函数的支集$\mathrm{supp}\varphi=\{x|\varphi(x)\neq 0\}$，支集的闭包$\overline{\mathrm{supp}\varphi}=\overline{\{x|\varphi(x)\neq 0\}}$，记函数集合

$C(\Omega)\cong\{u|u(x,t)$是定义在Ω中的连续函数$\}$；

$$C^{2,1}(\Omega)\cong\left\{u\left|u\in C(\Omega),\frac{\partial u}{\partial t}\in C(\Omega),\frac{\partial u}{\partial x}\in C(\Omega),\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\in C(\Omega)\right.\right\};$$

$$\Lambda_{(-\infty,b]}\cong\left\{\varphi\left|\varphi\in C(R),\varphi(x)\geq 0,x\in R,\text{且}\overline{\operatorname{supp}\varphi}\subset(-\infty,b]\right.\right\};$$

$$\Lambda_{[a,+\infty)}\cong\left\{\varphi\left|\varphi\in C(R),\varphi(x)\geq 0,x\in R,\text{且}\overline{\operatorname{supp}\varphi}\subset[a,+\infty)\right.\right\};$$

$$\Lambda^*_{[0,+\infty)}\cong\left\{\gamma\left|\gamma\in C([0,+\infty)),\gamma(t)\geq 0,t\in[0,+\infty),\text{且}\overline{\operatorname{supp}\gamma}\subset[0,+\infty)\right.\right\}.$$

数学模型 I (热传导方程具有多条奇异内边界的初值问题):

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=Lu+\sum\limits_{j=0}^{N}\gamma_j(t)\delta\left(x-x_j(t)\right),-\infty<x<+\infty,t>0 & (1)\\ u(x,0)=\varphi(x),-\infty<x<+\infty & (2)\\ \lim\limits_{x\to-\infty}|u|<+\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}|u|<+\infty & (3)\end{cases}$$

其中：微分算子

$$L=a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}-b\frac{\partial}{\partial x}-r \tag{4}$$

a,b,r 为常数，且 $a\neq 0$；$\delta(x)$ 为 Dirac $\delta-$函数。

数学模型 I.1 (齐次**热传导**方程的初值问题):

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=Lu,-\infty<x<+\infty,t>0\\ u(x,0)=\varphi(x),-\infty<x<+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}|u|<+\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}|u|<+\infty\end{cases} \tag{5}$$

数学模型 I.2 (**热传导**方程具有多条奇异内边界带齐次初值条件的初值问题):

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=Lu+\sum\limits_{j=0}^{N}\gamma_j(t)\delta\left(x-x_j(t)\right),-\infty<x<+\infty,t>0\\ u(x,0)=0,-\infty<x<+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}|u|<+\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}|u|<+\infty\end{cases} \tag{6}$$

2.1.1. 热传导方程在区域 $\Omega:-\infty<x<\infty,t>0$ 具有多条奇异内边界 $x=x_j(t),t>0;j\in\{0,1,2,\cdots,N\}$ 的初值问题的数学模型 I 的结果

定理 1 (具有多条奇异内边界的热传导方程初值问题解的存在定理)：若

1) $x_j(t),t\geq 0$ 为充分光滑的单调函数，
2) $\gamma_j\in C([0,+\infty)),j\in\{0,1,2,\cdots,N\}$，
3) $\varphi\in C(R)$；

则数学模型 I 的唯一精确解 $u\in C(\Omega)\cap C^{2,1}(\Omega)$

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t) \tag{7}$$

$$v(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-rt}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\zeta)\mathrm{e}^{-\frac{(\zeta-x+bt)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\zeta \tag{8}$$

$$w(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\sum_{j=0}^{N}\int_0^t (t-\xi)^{-\frac{1}{2}}\gamma_j(\xi)\mathrm{e}^{-r(t-\xi)}\mathrm{e}^{-\frac{\left[x-x_j(\xi)-b(t-\xi)\right]^2}{4a^2(t-\xi)}}\mathrm{d}\xi \tag{9}$$

其中(8)式是数学模型I.1的唯一精确解；(9)式是数学模型I.2的唯一精确解。

2.1.2. 数学模型I的求解过程

先考虑特征值问题

$$LE=a^2\frac{\mathrm{d}^2E}{\mathrm{d}x^2}-b\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}-rE=-\lambda E,-\infty<x<+\infty \tag{10}$$

这是奇异施图姆-刘维尔问题。设方程$LE=-\lambda E$的特解形式为$E=\mathrm{e}^{\alpha x}$，代入方程即得特征方程

$$a^2\alpha^2-b\alpha+\lambda-r=0 \tag{11}$$

特征根

$$\alpha_{\pm}=\omega\pm i\sqrt{\frac{\lambda-r}{a^2}-\omega^2},\omega=\frac{b}{2a^2}$$

即有

$$\alpha=\omega+i\beta,\ \beta\in(-\infty,+\infty),\ |\beta|=\sqrt{\frac{\lambda-r}{a^2}-\omega^2},\ \omega=\frac{b}{2a^2} \tag{12}$$

于是得到特征值

$$\lambda=\lambda_\beta=a^2\left(\beta^2+\omega^2\right)+r \tag{13}$$

特征函数

$$E=E_\beta=\mathrm{e}^{\omega x}\mathrm{e}^{i\beta x},\beta\in(-\infty,+\infty) \tag{14}$$

记$\rho(x)=\mathrm{e}^{-2\omega x}$，由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty}E_\beta(x)\bar{E}_{\beta'}(x)\rho(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\omega x}\mathrm{e}^{i\beta x}\mathrm{e}^{\omega x}\mathrm{e}^{-i\beta' x}\mathrm{e}^{-2\omega x}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{i(\beta-\beta')x}\mathrm{d}x=2\pi\delta(\beta-\beta')$$

即知特征函数系是无界区间$(-\infty,+\infty)$上带权函数$\rho(x)=\mathrm{e}^{-2\omega x}$的正交系。

正交关系

$$\int_{-\infty}^{+\infty}E_\beta(x)\bar{E}_{\beta'}(x)\rho(x)\mathrm{d}x=2\pi\delta(\beta-\beta');\ \beta',\beta\in(-\infty,+\infty) \tag{15}$$

可以将定义在区间$(-\infty,+\infty)$的连续函数$W(x)$展为特征函数的积分形式

$$W(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}U_\beta E_\beta(x)\mathrm{d}\beta \tag{16}$$

由正交关系

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}W(x)\bar{E}_{\beta'}(x)\rho(x)\mathrm{d}x\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}U_\beta\int_{-\infty}^{+\infty}E_\beta(x)\bar{E}_{\beta'}(x)\rho(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}\beta\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}U_\beta 2\pi\delta(\beta-\beta')\mathrm{d}\beta=2\pi U_{\beta'}\end{aligned}$$

$$U_\beta=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}W(x)\bar{E}_\beta(x)\rho(x)\mathrm{d}x \tag{17}$$

由(16)，(17)这一对关系式可以引入广义特征函数法[17]求解数学模型I。由(16)将模型I的解表为

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}U_{\beta}(t)E_{\beta}(x)\mathrm{d}\beta \tag{18}$$

由(17)则有

$$U_{\beta}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,t)\bar{E}_{\beta}(x)\rho(x)\mathrm{d}x \tag{19}$$

$$\sum_{j=0}^{N}f\left(x,t;x_j(t)\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{\beta}(t)E_{\beta}(x)\mathrm{d}\beta \tag{20}$$

$$f_{\beta}(t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{N}\gamma_j(t)\mathrm{e}^{-\omega x_j(t)}\mathrm{e}^{-i\beta x_j(t)} \tag{21}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\int_{-\infty}^{+\infty}U_{\beta}'(t)E_{\beta}(s)\mathrm{d}\beta \tag{22}$$

$$Lu=\int_{-\infty}^{+\infty}U_{\beta}(t)LE_{\beta}(x)\mathrm{d}\beta=-\int_{-\infty}^{+\infty}U_{\beta}(t)\lambda_{\beta}E_{\beta}(x)\mathrm{d}\beta \tag{23}$$

将(18)，(22)，(23)三式代入方程(1)则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[U_{\beta}'(t)+\lambda_{\beta}U_{\beta}(t)-f_{\beta}(t)\right]E_{\beta}(x)\mathrm{d}\beta=0 \tag{24}$$

于是

$$U_{\beta}'(t)+\lambda_{\beta}U_{\beta}(t)-f_{\beta}(t)=0 \tag{25}$$

由(2)式和(18)，(19)有

$$\varphi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}U_{\beta}(0)E_{\beta}(x)\mathrm{d}\beta \tag{26}$$

$$U_{\beta}(0)\cong\varphi_{\beta}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\zeta)\bar{E}_{\beta}(\zeta)\rho(\zeta)\mathrm{d}\zeta \tag{27}$$

得到关于$U_{\beta}(t)$的非齐次常微分方程的初值问题

$$\begin{cases}U_{\beta}'(t)+\lambda_{\beta}U_{\beta}(t)=f_{\beta}(t),t>0 & (28)\\ U_{\beta}(0)=\varphi_{\beta} & (29)\end{cases}$$

先求对应的齐次常微分方程

$$U_{\beta}'(t)+\lambda_{\beta}U_{\beta}(t)=0 \tag{30}$$

的通解。

$$\int\frac{\mathrm{d}U_{\beta}(t)}{U_{\beta}(t)}=-\int\lambda_{\beta}\mathrm{d}t,\ \ln U_{\beta}(t)=-\lambda_{\beta}t+\ln C,\ U_{\beta}(t)=C\mathrm{e}^{-\lambda_{\beta}t} \tag{31}$$

用常数变易法求解非齐次常微分方程的初值问题。设满足非齐次常微分方程通解形式为

$$U_{\beta}(t)=C(t)\mathrm{e}^{-\lambda_{\beta}t} \tag{32}$$

其中为$C(t)$待求函数。

$$U_{\beta}'(t)=C'(t)\mathrm{e}^{-\lambda_{\beta}t}-\lambda_{\beta}C(t)\mathrm{e}^{-\lambda_{\beta}t}$$

将上式代入非齐次常微分方程(30)，即有

$$C'(t)\mathrm{e}^{-\lambda_{\beta}t}-\lambda_{\beta}C(t)\mathrm{e}^{-\lambda_{\beta}t}+\lambda_{\beta}C(t)\mathrm{e}^{-\lambda_{\beta}t}=f_{\beta}(t)$$

$$C'(t)=f_{\beta}(t)\mathrm{e}^{\lambda_{\beta}t} \tag{33}$$

对上式在区间$[0,t]$上积分

$$C(t)=\int_0^t f_\beta(\xi)\mathrm{e}^{\lambda_\beta\xi}\mathrm{d}\xi+C(0)$$

$$U_\beta(t)=\left[\int_0^t f_\beta(\xi)\mathrm{e}^{\lambda_\beta\xi}\mathrm{d}\xi+C(0)\right]\mathrm{e}^{-\lambda_\beta t}$$

$$=\int_0^t f_\beta(\xi)\mathrm{e}^{-\lambda_\beta(t-\xi)}\mathrm{d}\xi+C(0)\mathrm{e}^{-\lambda_\beta t}$$

$$U_\beta(t)=\int_0^t f_\beta(\xi)\mathrm{e}^{-\lambda_\beta(t-\xi)}\mathrm{d}\xi+\varphi(0)\mathrm{e}^{-\lambda_\beta t}$$

利用(29)即有

$$U_\beta(t)=\varphi_\beta\mathrm{e}^{-\lambda_\beta t}+\int_0^t f_\beta(\xi)\mathrm{e}^{-\lambda_\beta(t-\xi)}\mathrm{d}\xi \tag{34}$$

将上式代入(18)式即有

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\varphi_\beta\mathrm{e}^{-\lambda_\beta t}+\int_0^t f_\beta(\xi)\mathrm{e}^{-\lambda_\beta(t-\xi)}\mathrm{d}\xi\right]E_\beta(x)\mathrm{d}\beta\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_\beta\mathrm{e}^{-\lambda_\beta t}E_\beta(x)\mathrm{d}\beta+\int_0^t\mathrm{d}\xi\int_{-\infty}^{\infty}f_\beta(\xi)\mathrm{e}^{-\lambda_\beta(t-\xi)}E_\beta(x)\mathrm{d}\beta\end{aligned} \tag{35}$$

其中φ_β由(27)，$f_\beta(t)$由(21)确定，λ_β由(13)给出，即有

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t) \tag{36}$$

$$v(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_\beta\mathrm{e}^{-\lambda_\beta t}E_\beta(x)\mathrm{d}\beta \tag{37}$$

$$w(s,t)=\int_0^t\mathrm{d}\xi\int_{-\infty}^{\infty}f_\beta(\xi)\mathrm{e}^{-\lambda_\beta(t-\xi)}E_\beta(x)\mathrm{d}\beta \tag{38}$$

利用φ_β的表达式(27)即有

$$\begin{aligned}v(x,t)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_\beta\mathrm{e}^{-\lambda_\beta t}E_\beta(x)\mathrm{d}\beta=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\zeta)\bar{E}_\beta(\zeta)\rho(\zeta)\mathrm{d}\zeta\mathrm{e}^{-\lambda_\beta t}E_\beta(x)\mathrm{d}\beta\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\zeta)\mathrm{e}^{\omega\zeta}\mathrm{e}^{-i\beta\zeta}\mathrm{e}^{-2\omega\zeta}\mathrm{d}\zeta\mathrm{e}^{-\lambda_\beta t}\mathrm{e}^{\omega x}\mathrm{e}^{i\beta x}\mathrm{d}\beta\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\zeta)\mathrm{e}^{-\omega\zeta}\mathrm{e}^{\omega x}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-i\beta\zeta}\mathrm{d}\zeta\mathrm{e}^{-\left[a^2\left(\beta^2+\omega^2\right)+r\right]t}\mathrm{e}^{i\beta x}\mathrm{d}\beta\\&=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\left(a^2\omega^2+r\right)t}\mathrm{e}^{\omega x}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\zeta)\mathrm{e}^{-\omega\zeta}\mathrm{d}\zeta\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-i\beta(\zeta-x)}\mathrm{e}^{-a^2\beta^2t}\mathrm{d}\beta\\&=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\left(a^2\omega^2+r\right)t}\mathrm{e}^{\omega x}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\zeta)\mathrm{e}^{-\omega\zeta}\mathrm{d}\zeta\left(\frac{\pi}{a^2t}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{(\zeta-x)^2}{4a^2t}}\\&=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\left(a^2\omega^2+r\right)t}\mathrm{e}^{\omega x}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\zeta)\mathrm{e}^{-\omega\zeta}\mathrm{e}^{-\frac{(\zeta-x)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\zeta\end{aligned}$$

即有

$$\begin{aligned}v(x,t)&=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\left(a^2\omega^2+r\right)t}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\zeta)\mathrm{e}^{-\frac{4a^2t\omega(\zeta-x)+(\zeta-x)^2+\left(2a^2t\omega\right)^2-\left(2a^2t\omega\right)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\zeta\\&=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-rt}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\zeta)\mathrm{e}^{-\frac{\left(\zeta-x+2a^2\omega t\right)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\zeta\end{aligned}$$

即

$$v(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-rt}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\zeta)\mathrm{e}^{-\frac{(\zeta-x+bt)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\zeta \tag{39}$$

将(21)代入(38)得到

$$\begin{aligned}w(x,t)&=\int_0^t\mathrm{d}\xi\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{N}\gamma_j(\xi)\mathrm{e}^{-\omega x_j(\xi)}\mathrm{e}^{-i\beta x_j(\xi)}\mathrm{e}^{-\left[a^2\left(\beta^2+\omega^2\right)+r\right](t-\xi)}E_\beta(x)\mathrm{d}\beta\\&=\frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{N}\int_0^t\gamma_j(\xi)\mathrm{e}^{\omega\left[x-x_j(\xi)\right]}\mathrm{e}^{-\left[a^2\omega^2+r\right](t-\xi)}\mathrm{d}\xi\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{i\beta\left[x-x_j(\xi)\right]}\mathrm{e}^{-a^2\beta^2(t-\xi)}\mathrm{d}\beta\\&=\frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{N}\int_0^t\gamma_j(\xi)\mathrm{e}^{\omega\left[x-x_j(\xi)\right]}\mathrm{e}^{-\left[a^2\omega^2+r\right](t-\xi)}\mathrm{d}\xi\left(\frac{\pi}{a^2(t-\xi)}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\left[x-x_j(\xi)\right]^2}{4a^2(t-\xi)}}\\&=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\sum_{j=0}^{N}\int_0^t(t-\xi)^{-\frac{1}{2}}\gamma_j(\xi)\mathrm{e}^{-r(t-\xi)}\mathrm{e}^{-\frac{\left[x-x_j(\xi)-2a^2\omega(t-\xi)\right]^2}{4a^2(t-\xi)}}\mathrm{d}\xi\end{aligned} \tag{40}$$

化简上式得到

$$w(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\sum_{j=0}^{N}\int_0^t(t-\xi)^{-\frac{1}{2}}\gamma_j(\xi)\mathrm{e}^{-r(t-\xi)}\mathrm{e}^{-\frac{\left[x-x_j(\xi)-b(t-\xi)\right]^2}{4a^2(t-\xi)}}\mathrm{d}\xi \tag{41}$$

即得到数学模型 I 的唯一解

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t) \tag{42}$$

其中：$v(x,t)$ 由(40)式给出，$w(x,t)$ 由(41)式给出。即知(8)式是数学模型 I.1 的解；(9)式是数学模型 I.2 的解。

2.1.3. 热传导方程 N + 1 条奇异内边界的确定

数学模型 II (热传导方程确定 N+1 条奇异内边界的数学模型):

求 $\left\{w(x,t),x_j(t),j\in\{0,1,\cdots,N\}\right\}$，使其满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial t}=Lw+\sum\limits_{j=0}^{N}\gamma_j(t)\delta\left(x-x_j(t)\right),-\infty<x<+\infty,t>0 & (43)\\ w(x,0)=0,-\infty<x<+\infty & (44)\\ w\left(x_0(t),t\right)=\max\limits_{-\infty<x\le x_0(t)}w(x,t)=\phi_0(t),t\ge0 & (45)\\ w\left(x_N(t),t\right)=\max\limits_{x_N(t)\le x<\infty}w(x,t)=\phi_N(t),t\ge0 & (46)\\ \dfrac{\partial w}{\partial x}\left(x_0(t),t\right)=\upsilon_0(t),t\ge0 & (47)\\ \dfrac{\partial w}{\partial x}\left(x_N(t),t\right)=\upsilon_N(t),t\ge0 & (48)\\ \lim\limits_{x\to-\infty}|w|<+\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}|w|<+\infty & (49)\end{cases}$$

上述问题中函数 $\phi_0(t),\phi_N(t),\upsilon_0(t),\upsilon_N(t)$ 是待定的。

定理 2 (热传导方程确定 $N+1$ 条奇异内边界的数学模型的精确解)：若

1) $\gamma_j\in\Lambda^*_{[0,+\infty)},j\in\{0,1,2,\cdots,N\}$；

2) $x_j(t), t \ge 0$ 为充分光滑的单调函数，$x_j(t) < x_{j+1}(t)$，$j \in \{0,1,\cdots,N-1\}$；

则数学模型 II 的唯一精确解 $w \in C(\Omega) \cap C^{2,1}(\Omega)$，且可表为

$$\begin{cases} w(x,t) = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi}} \displaystyle\sum_{j=0}^{N} \int_0^t (t-\xi)^{-\frac{1}{2}} \gamma_j(\xi) \mathrm{e}^{-r(t-\xi)} \mathrm{e}^{-\frac{(x-x_{j0}-bt)^2}{4a^2(t-\xi)}} \mathrm{d}\xi & (50) \\ x_j(t) = x_{j0} + bt, j \in \{0,1,\cdots,N\}, x_{j0} < x_{i0}, j < i & (51) \end{cases}$$

边值函数唯一确定为

$$\begin{cases} \upsilon_0(t) = \dfrac{-1}{4a^3\sqrt{\pi}} \displaystyle\sum_{j=1}^{N} (x_{00} - x_{j0}) \int_0^t (t-\xi)^{-\frac{3}{2}} \gamma_j(\xi) \mathrm{e}^{-r(t-\xi)} \mathrm{e}^{-\frac{(x_{00}-x_{j0})^2}{4a^2(t-\xi)}} \mathrm{d}\xi & (52) \\ \upsilon_N(t) = \dfrac{-1}{4a^3\sqrt{\pi}} \displaystyle\sum_{j=0}^{N-1} (x_{N0} - x_{j0}) \int_0^t (t-\xi)^{-\frac{3}{2}} \gamma_j(\xi) \mathrm{e}^{-r(t-\xi)} \mathrm{e}^{-\frac{(x_{N0}-x_{j0})^2}{4a^2(t-\xi)}} \mathrm{d}\xi & (53) \\ \phi_0(t) = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi}} \displaystyle\sum_{j=0}^{N} \int_0^t (t-\xi)^{-\frac{1}{2}} \gamma_j(\xi) \mathrm{e}^{-r(t-\xi)} \mathrm{e}^{-\frac{(x_{00}-x_{j0})^2}{4a^2(t-\xi)}} \mathrm{d}\xi & (54) \\ \phi_N(t) = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi}} \displaystyle\sum_{j=0}^{N} \int_0^t (t-\xi)^{-\frac{1}{2}} \gamma_j(\xi) \mathrm{e}^{-r(t-\xi)} \mathrm{e}^{-\frac{(x_{N0}-x_{j0})^2}{4a^2(t-\xi)}} \mathrm{d}\xi & (55) \end{cases}$$

证明：与文[17]完全类似。从略。

自由边界问题 A (热传导方程在区域 $-\infty < x \le x_0(t), t \ge 0$ 上的齐次初值条件的自由边界问题)：求 $\{w(x,t), x_0(t)\}$，使其满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} = Lw, -\infty < x < x_0(t), t > 0 & (56) \\ w(x,0) = 0, -\infty < x < +\infty & (57) \\ w(x_0(t),t) = \displaystyle\max_{-\infty < x \le x_0(t)} w(x,t) = \phi_0(t), t \ge 0 & (58) \\ \dfrac{\partial w}{\partial x}(x_0(t),t) = \upsilon_0(t), t \ge 0 & (59) \\ \displaystyle\lim_{x \to -\infty} |w| < +\infty & (60) \end{cases}$$

上述问题中函数 $\phi_0(t)$ 与 $\upsilon_0(t)$ 是待定的。

推论 2.1 (自由边界问题 **A** 解的存在定理)：若

1) $\gamma_j \in \Lambda^*_{[0,+\infty)}, j \in \{0,1,2,\cdots,N\}$，

2) $x_j(t) = x_{j0} + bt, j \in \{1,\cdots,N\}; x_{j0} < x_{i0}, i > j$

则自由边界问题 A 的唯一精确解 $\{w(x,t), x_0(t)\}$：

$$\begin{cases} w(x,t) = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi}} \displaystyle\sum_{j=0}^{N} \int_0^t (t-\xi)^{-\frac{1}{2}} \gamma_j(\xi) \mathrm{e}^{-r(t-\xi)} \mathrm{e}^{-\frac{(x-x_{j0}-bt)^2}{4a^2(t-\xi)}} \mathrm{d}\xi & (61) \\ x_0(t) = x_{00} + bt, j \in \{0,1,\cdots,N\}, x_{00} < x_{10} & (62) \end{cases}$$

边值函数唯一确定为

$$\begin{cases}\upsilon_0(t)=\dfrac{-1}{4a^3\sqrt{\pi}}\displaystyle\sum_{j=1}^{N}\left(x_{00}-x_{j0}\right)\int_0^t(t-\xi)^{-\frac{3}{2}}\gamma_j(\xi)\mathrm{e}^{-r(t-\xi)}\mathrm{e}^{-\frac{\left(x_{00}-x_{j0}\right)^2}{4a^2(t-\xi)}}\mathrm{d}\xi & (63)\\ \phi_0(t)=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi}}\displaystyle\sum_{j=0}^{N}\int_0^t(t-\xi)^{-\frac{1}{2}}\gamma_j(\xi)\mathrm{e}^{-r(t-\xi)}\mathrm{e}^{-\frac{\left(x_{00}-x_{j0}\right)^2}{4a^2(t-\xi)}}\mathrm{d}\xi & (64)\end{cases}$$

自由边界问题 B (**热传导**方程方程在区域 $x_N(t)\le x<\infty,t\ge 0$ 上的齐次初值条件的自由边界问题)：求 $\{w(x,t),x_N(t)\}$，使其满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial t}=Lw,x_N(t)<x<+\infty,t>0 & (65)\\ w(x,0)=0,-\infty<x<+\infty & (66)\\ w(x_N(t),t)=\max\limits_{x_N(t)\le x<+\infty}w(x,t)=\phi_N(t),t\ge 0 & (67)\\ \dfrac{\partial w}{\partial x}(x_N(t),t)=\upsilon_N(t),t\ge 0 & (68)\\ \lim\limits_{x\to+\infty}|w|<+\infty & (69)\end{cases}$$

上述问题中函数 $\phi_N(t)$ 与 $\upsilon_N(t)$ 是待定的。

推论 2.2 (自由边界问题 B 解的存在定理)：若

1) $\gamma_j\in\Lambda^*_{[0,+\infty)},j\in\{0,1,\cdots,N\}$，

2) $x_j(t)=x_{j0}+bt,t\ge 0;x_{j0}<x_{i0},i>j,j\in\{0,1,\cdots,N-1\}$；

则自由边界问题 B 的唯一精确解 $\{w(x,t),x_N(t)\}$：

$$\begin{cases}w(x,t)=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi}}\displaystyle\sum_{j=0}^{N}\int_0^t(t-\xi)^{-\frac{1}{2}}\gamma_j(\xi)\mathrm{e}^{-r(t-\xi)}\mathrm{e}^{-\frac{\left(x-x_{j0}-bt\right)^2}{4a^2(t-\xi)}}\mathrm{d}\xi & (70)\\ x_N(t)=x_{N0}+bt,j\in\{0,1,\cdots,N\},x_{N0}>x_{N-1,0} & (71)\end{cases}$$

边值函数唯一确定为

$$\begin{cases}\upsilon_N(t)=\dfrac{-1}{4a^3\sqrt{\pi}}\displaystyle\sum_{j=0}^{N-1}\left(x_{N0}-x_{j0}\right)\int_0^t(t-\xi)^{-\frac{3}{2}}\gamma_j(\xi)\mathrm{e}^{-r(t-\xi)}\mathrm{e}^{-\frac{\left(x_{N0}-x_{j0}\right)^2}{4a^2(t-\xi)}}\mathrm{d}\xi & (72)\\ \phi_N(t)=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi}}\displaystyle\sum_{j=0}^{N}\int_0^t(t-\xi)^{-\frac{1}{2}}\gamma_j(\xi)\mathrm{e}^{-r(t-\xi)}\mathrm{e}^{-\frac{\left(x_{N0}-x_{j0}\right)^2}{4a^2(t-\xi)}}\mathrm{d}\xi & (73)\end{cases}$$

引理 3：若

1) 当 $\varphi\in\Lambda_{[x_{00},+\infty)}$，$x_0(t)=x_{00}+bt$；则数学模型 I.1 的解

$$v_A(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-rt}\int_{x_{00}}^{+\infty}\varphi(\zeta)\mathrm{e}^{-\frac{(\zeta-x+bt)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\zeta \tag{74}$$

且满足 $\max\limits_{-\infty<x\le x_0(t)}v_A(x,t)=v_A(x_0(t),t)$。

2) 当 $\varphi\in\Lambda_{(-\infty,x_{N0}]}$， $x_N(t)=x_{N0}+bt$；则数学模型 I.1 的解

$$v_B(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-rt}\int_{-\infty}^{x_{N0}}\varphi(\zeta)\mathrm{e}^{-\frac{(\zeta-x+bt)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\zeta \tag{75}$$

且满足 $\max\limits_{x_N(t)\le x<+\infty} v_B(x,t)=v_B(x_N(t),t)$。

3) 当 $\varphi\in\Lambda_{[x_{00},x_{N0}]},\ x_0(t)=x_{00}+bt,\ x_N(t)=x_{N0}+bt$；则数学模型 I.1 的解

$$v(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-rt}\int_{x_{00}}^{x_{N0}}\varphi(\zeta)\mathrm{e}^{-\frac{(\zeta-x+bt)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\zeta \tag{76}$$

且满足 $\max\limits_{-\infty<x\le x_0(t)} v(x,t)=v(x_0(t),t),\ \max\limits_{x_N(t)\le x<+\infty} v(x,t)=v(x_N(t),t)$。

证明：1) 当 $\varphi\in\Lambda_{[x_{00},+\infty)}$；由数学模型 I.1 的解(8)式即有

$$v_A(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-rt}\int_{x_{00}}^{+\infty}\varphi(\zeta)\mathrm{e}^{-\frac{(\zeta-x+bt)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\zeta \tag{77}$$

$$\frac{\partial v_A(x,t)}{\partial x}=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-rt}\int_{x_{00}}^{+\infty}\varphi(\zeta)\mathrm{e}^{-\frac{(\zeta-x+bt)^2}{4a^2t}}\frac{(\zeta-x+bt)}{2a^2t}\mathrm{d}\zeta \tag{78}$$

若 $x<x_0(t),\forall t>0$，

则 $x_{00}<\zeta,\zeta-x>x_{00}-x>x_{00}-x_0(t)=x_{00}-(x_{00}+bt)=-bt$ 有 $\zeta-x+bt>0$

从而 $\dfrac{\partial v_A(x,t)}{\partial x}>0,\forall t>0$，故 $\max\limits_{-\infty<x\le x_0(t)} v_A(x,t)=v_A(x_0(t),t),\forall t>0$。

$$2)\ \varphi\in\Lambda_{(-\infty,x_{N0}]},\ x_N(t)=x_{N0}+bt$$

$$v_B(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-rt}\int_{-\infty}^{x_{N0}}\varphi(\zeta)\mathrm{e}^{-\frac{(\zeta-x+bt)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\zeta \tag{79}$$

$$\frac{\partial v_B(x,t)}{\partial x}=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-rt}\int_{-\infty}^{x_{N0}}\varphi(\zeta)\mathrm{e}^{-\frac{(\zeta-x+bt)^2}{4a^2t}}\frac{(\zeta-x+bt)}{2a^2t}\mathrm{d}\zeta \tag{80}$$

若 $x>x_N(t),\forall t>0,$ 则

$$\zeta-x<x_{0N}-x<x_{0N}-x_N(t)=x_{0N}-(x_{0N}+bt)=-bt\text{，}$$

$$\zeta-x+bt<0,\ \frac{\partial v_B(x,t)}{\partial x}<0,\ \forall t>0,\ \max_{x_N(t)\le x<+\infty} v_B(x,t)=v_B(x_N(t),t)\text{。}$$

同理可证 3) 。**证毕**。

定理 3 (数学模型 I 的精确解及其性质**)：**若

1) $\gamma_j\in\Lambda^*_{[0,+\infty)},j\in\{0,1,\cdots,N\}$，

2) $x_j(t)=x_{j0}+bt,j\in\{0,1,\cdots,N\};x_{j0}<x_{i0},i>j$，

3) $\varphi\in\Lambda_{[x_{00},x_{N0}]}$；

则数学模型 I 有唯一精确解 $u\in C(\Omega)\cap C^{2,1}(\Omega)$，且可表为

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t) \tag{81}$$

$$v(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-rt}\int_{x_{00}}^{x_{N0}}\varphi(\zeta)\mathrm{e}^{-\frac{(\zeta-x+bt)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\zeta \tag{82}$$

$$w(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}a}\sum_{j=0}^{N}\int_0^t(t-\xi)^{-\frac{1}{2}}\gamma_j(\xi)\mathrm{e}^{-r(t-\xi)}\mathrm{e}^{-\frac{(x-x_{j0}-bt)^2}{4a^2(t-\xi)}}\mathrm{d}\xi \tag{83}$$

且满足 $\max\limits_{-\infty<x\le x_0(t)}u(x,t)=u(x_0(t),t),\ \max\limits_{x_N(t)\le x<+\infty}u(x,t)=u(x_N(t),t)$；

边值函数唯一确定为

$$\begin{cases}
\upsilon_0(t)=\dfrac{-1}{4a^3\sqrt{\pi}}\displaystyle\sum_{j=1}^{N}(x_{00}-x_{j0})\int_0^t(t-\xi)^{-\frac{3}{2}}\gamma_j(\xi)\mathrm{e}^{-r(t-\xi)}\mathrm{e}^{-\frac{(x_{00}-x_{j0})^2}{4a^2(t-\xi)}}\mathrm{d}\xi \\
\qquad+\dfrac{1}{4a^3\sqrt{\pi}}t^{-\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-rt}\displaystyle\int_{x_{00}}^{x_{N0}}(\zeta-x_{00})\varphi(\zeta)\mathrm{e}^{-\frac{(\zeta-x_{00})^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\zeta & (84)\\
\upsilon_N(t)=\dfrac{-1}{4a^3\sqrt{\pi}}\displaystyle\sum_{j=0}^{N-1}(x_{N0}-x_{j0})\int_0^t(t-\xi)^{-\frac{3}{2}}\gamma_j(\xi)\mathrm{e}^{-r(t-\xi)}\mathrm{e}^{-\frac{(x_{N0}-x_{j0})^2}{4a^2(t-\xi)}}\mathrm{d}\xi \\
\qquad+\dfrac{1}{4a^3\sqrt{\pi}}t^{-\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-rt}\displaystyle\int_{x_{00}}^{x_{N0}}(\zeta-x_{N0})\varphi(\zeta)\mathrm{e}^{-\frac{(\zeta-x_{N0})^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\zeta & (85)\\
\phi_0(t)=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi}}\displaystyle\sum_{j=0}^{N}\int_0^t(t-\xi)^{-\frac{1}{2}}\gamma_j(\xi)\mathrm{e}^{-r(t-\xi)}\mathrm{e}^{-\frac{(x_{00}-x_{j0})^2}{4a^2(t-\xi)}}\mathrm{d}\xi \\
\qquad+\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-rt}\displaystyle\int_{x_{00}}^{x_{N0}}\varphi(\zeta)\mathrm{e}^{-\frac{(\zeta-x_{00})^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\zeta & (86)\\
\phi_N(t)=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi}}\displaystyle\sum_{j=0}^{N}\int_0^t(t-\xi)^{-\frac{1}{2}}\gamma_j(\xi)\mathrm{e}^{-r(t-\xi)}\mathrm{e}^{-\frac{(x_{N0}-x_{j0})^2}{4a^2(t-\xi)}}\mathrm{d}\xi \\
\qquad+\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-rt}\displaystyle\int_{x_{00}}^{x_{N0}}\varphi(\zeta)\mathrm{e}^{-\frac{(\zeta-x_{N0})^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\zeta & (87)
\end{cases}$$

证明：由定理 2 有 $w(x_0(t),t)=\max\limits_{-\infty<x\le x_0(t)}w(x,t),\ w(x_N(t),t)=\max\limits_{x_N(t)\le x<+\infty}w(x,t)$

由引理 3 即有 $\max\limits_{-\infty<x\le x_0(t)}v(x,t)=v(x_0(t),t),\ \max\limits_{x_N(t)\le x<+\infty}v(x,t)=v(x_N(t),t)$；

从而

$$\begin{aligned}\max_{-\infty<x\le x_0(t)}u(x,t)&=\max_{-\infty<x\le x_0(t)}v(x,t)+\max_{-\infty<x\le x_0(t)}w(x,t)\\&=v(x_0(t),t)+w(x_0(t),t)=u(x_0(t),t)\end{aligned},$$

$$\begin{aligned}\max_{x_N(t)\le x<+\infty}u(x,t)&=\max_{x_N(t)\le x<+\infty}v(x,t)+\max_{x_N(t)\le x<+\infty}w(x,t)\\&=v(x_N(t),t)+w(x_N(t),t)=u(x_N(t),t)\end{aligned}。$$

证毕。

自由边界问题 IA (热传导方程方程在区域 $\bar{\Omega}_0:-\infty<x\le x_0(t),t\ge 0$ 上的非齐次初值条件的自由边界问题)：求 $\{u(x,t),x_0(t)\}$，使其满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = Lu, -\infty < x < x_0(t), t > 0 & (88) \\ u(x,0) = \varphi(x), -\infty < x < +\infty & (89) \\ u(x_0(t),t) = \max\limits_{-\infty < x \le x_0(t)} u(x,t) = \phi_0(t), t \ge 0 & (90) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0(t),t) = \upsilon_0(t), t \ge 0 & (91) \\ \lim\limits_{x \to -\infty} |u| < \infty & (92) \end{cases}$$

其中函数$\{\phi_0(t),\upsilon_0(t)\}$是待定的。

推论 3.1(自由边界问题 **IA** 解的存在定理)：若

1) $\gamma_j \in \Lambda^*_{[0,+\infty)}, j \in \{0,1,\cdots,N\}$

2) $x_j(t) = x_{j0} + bt, t \ge 0; j \in \{1,\cdots,N\}, x_{j0} < x_{i0}, i > j$

3) $\varphi \in \Lambda_{[x_{00},+\infty)}$；

则自由边界问题 IA 存在唯一精确解$\{u(x,t),x_0(t)\}$：

$$\begin{cases} u(x,t) = v_A(x,t) + w(x,t) & (93) \\ x_0(t) = x_{00} + bt, t \ge 0; x_{00} < x_{10} & (94) \end{cases}$$

其中

$$v_A(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \mathrm{e}^{-rt} \int_{x_{00}}^{+\infty} \varphi(\zeta) \mathrm{e}^{-\frac{(\zeta - x + bt)^2}{4a^2 t}} \mathrm{d}\zeta \tag{95}$$

$$w(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \sum_{j=0}^{N} \int_0^t (t-\xi)^{-\frac{1}{2}} \gamma_j(\xi) \mathrm{e}^{-r(t-\xi)} \mathrm{e}^{-\frac{(x - x_{j0} - bt)^2}{4a^2(t-\xi)}} \mathrm{d}\xi \tag{96}$$

边值函数唯一确定为

$$\begin{cases} \upsilon_0(t) = \dfrac{-1}{4a^3\sqrt{\pi}} \sum\limits_{j=1}^{N} (x_{00} - x_{j0}) \int_0^t (t-\xi)^{-\frac{3}{2}} \gamma_j(\xi) \mathrm{e}^{-r(t-\xi)} \mathrm{e}^{-\frac{(x_{00} - x_{j0})^2}{4a^2(t-\xi)}} \mathrm{d}\xi \\ \qquad + \dfrac{1}{4a^3\sqrt{\pi}} t^{-\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{-rt} \int_{x_{00}}^{+\infty} (\zeta - x_{00}) \varphi(\zeta) \mathrm{e}^{-\frac{(\zeta - x_{00})^2}{4a^2 t}} \mathrm{d}\zeta & (97) \\ \phi_0(t) = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi}} \sum\limits_{j=0}^{N} \int_0^t (t-\xi)^{-\frac{1}{2}} \gamma_j(\xi) \mathrm{e}^{-r(t-\xi)} \mathrm{e}^{-\frac{(x_{00} - x_{j0})^2}{4a^2(t-\xi)}} \mathrm{d}\xi \\ \qquad + \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \mathrm{e}^{-rt} \int_{x_{00}}^{+\infty} \varphi(\zeta) \mathrm{e}^{-\frac{(\zeta - x_{00})^2}{4a^2 t}} \mathrm{d}\zeta & (98) \end{cases}$$

自由边界问题 IB (**热传导**方程在区域$\bar{\Omega}_N : x_N(t) \le x < +\infty, t \ge 0$上的非齐次初值条件的自由边界问题)：求$\{u(x,t),x_N(t)\}$，使其满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=Lu,x_N\left(t\right)<x<+\infty,t>0 & (99)\\ u\left(x,0\right)=\varphi\left(x\right),-\infty<x<+\infty & (100)\\ u\left(x_N\left(t\right),t\right)=\max\limits_{x_N(t)\le x<+\infty}u\left(x,t\right)=\phi_N\left(t\right),t\ge 0 & (101)\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\left(x_N\left(t\right),t\right)=\upsilon_N\left(t\right),t\ge 0 & (102)\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left|u\right|<+\infty & (103)\end{cases}$$

其中函数 $\left\{\phi_N\left(t\right),\upsilon_N\left(t\right)\right\}$ 是待定的。

推论 3.2 (自由边界问题 **IB** 解的存在定理)：若

1) $\gamma_j\in\Lambda^*_{[0,+\infty)},j\in\left\{0,1,\cdots,N\right\}$，

2) $x_j\left(t\right)=x_{j0}+bt,j\in\left\{0,1,\cdots,N-1\right\};x_{j0}<x_{i0},i>j$，

3) $\varphi\in\Lambda_{(-\infty,x_{N0}]}$；

则自由边界问题 IB 存在唯一精确解 $\left\{u\left(x,t\right),x_N\left(t\right)\right\}$：

$$\begin{cases}u\left(x,t\right)=v_B\left(x,t\right)+w\left(x,t\right) & (104)\\ x_N\left(t\right)=x_{N0}+bt,x_{N-1,0}<x_{N0} & (105)\end{cases}$$

其中

$$v_B\left(x,t\right)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-rt}\int_{-\infty}^{x_{N0}}\varphi\left(\zeta\right)\mathrm{e}^{-\frac{\left(\zeta-x+bt\right)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\zeta \tag{106}$$

$$w\left(x,t\right)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\sum_{j=0}^{N}\int_0^t\left(t-\xi\right)^{-\frac{1}{2}}\gamma_j\left(\xi\right)\mathrm{e}^{-r\left(t-\xi\right)}\mathrm{e}^{-\frac{\left(x-x_{j0}-bt\right)^2}{4a^2\left(t-\xi\right)}}\mathrm{d}\xi \tag{107}$$

边值函数唯一确定为

$$\begin{cases}\upsilon_N\left(t\right)=\dfrac{-1}{4a^3\sqrt{\pi}}\sum\limits_{j=0}^{N-1}\left(x_{N0}-x_{j0}\right)\int_0^t\left(t-\xi\right)^{-\frac{3}{2}}\gamma_j\left(\xi\right)\mathrm{e}^{-r\left(t-\xi\right)}\mathrm{e}^{-\frac{\left(x_{N0}-x_{j0}\right)^2}{4a^2\left(t-\xi\right)}}\mathrm{d}\xi\\ \qquad+\dfrac{1}{4a^3\sqrt{\pi}}t^{-\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-rt}\int_{-\infty}^{x_{N0}}\left(\zeta-x_{N0}\right)\varphi\left(\zeta\right)\mathrm{e}^{-\frac{\left(\zeta-x_{N0}\right)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\zeta & (108)\\ \phi_N\left(t\right)=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi}}\sum\limits_{j=0}^{N}\int_0^t\left(t-\xi\right)^{-\frac{1}{2}}\gamma_j\left(\xi\right)\mathrm{e}^{-r\left(t-\xi\right)}\mathrm{e}^{-\frac{\left(x_{N0}-x_{j0}\right)^2}{4a^2\left(t-\xi\right)}}\mathrm{d}\xi\\ \qquad+\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-rt}\int_{-\infty}^{x_{N0}}\varphi\left(\zeta\right)\mathrm{e}^{-\frac{\left(\zeta-x_{N0}\right)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\zeta & (109)\end{cases}$$

附注 1：自由边界问题 IA 是在区域 $\bar{\Omega}_0:-\infty<x\le x_0\left(t\right),t\ge 0$ 上的自由边界问题。研究结果表明自由边界问题 IA 的解不仅仅依赖于 $\bar{\Omega}_0$ 内的状况，也受到外区域 $\Omega-\bar{\Omega}_0$ 状况的影响。由于在区域 Ω 具有 $N+1$ 条奇异内边界的假设，从而在区域 $\Omega-\bar{\Omega}_0$ 内具有 N 条奇异内边界，使得自由边界问题 IA 的解函数具有复杂性和不确定性；而问题 **IA 的**自由边界的确定却与 $\Omega-\bar{\Omega}_0$ 内是否具有奇异内边界无关。对自由边界问题 IB 结论完全类似。于是为了简化问题，下面建立有且仅有一条奇异内边界的数学模型。

2.2. 热传导方程在区域 $\Omega:-\infty<x<+\infty,t>0$ 有且仅有一条奇异内边界 $x=x(t),t>0$ 的初值问题数学模型 III 的研究

数学模型 III (热传导方程有且仅有一条奇异内边界的初值问题)：求 $\{u(x,t),x(t)\}$，使其满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=Lu+\gamma(t)\delta(x-x(t)),-\infty<x<+\infty,t>0 & (110)\\ u(x,0)=\varphi(x),-\infty<x<+\infty & (112)\\ u(x(t),t)=\max\limits_{-\infty<x<+\infty}u(x,t)=\phi(t),t\ge 0 & (113)\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(x(t),t)=0,t\ge 0 & (114)\\ \lim\limits_{x\to-\infty}|u|<+\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}|u|<+\infty & (115)\end{cases}$$

其中函数 $\phi(t)$ 是待定的。

定理 4：若 1) $\gamma\in\Lambda^*_{[0,+\infty)}$，2) $\varphi(x)=\delta(x-x_0)$；

则数学模型 III 存在唯一精确解 $\{u(x,t),x(t)\}$：

$$\begin{cases}u(x,t)=v(x,t)+w(x,t) & (116)\\ x(t)=x_0+bt,t\ge 0 & (117)\end{cases}$$

其中

$$v(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-rt}\mathrm{e}^{-\frac{[x(t)-x]^2}{4a^2t}} \tag{118}$$

$$w(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t(t-\xi)^{-\frac{1}{2}}\gamma(\xi)\mathrm{e}^{-r(t-\xi)}\mathrm{e}^{-\frac{[x-x(t)]^2}{4a^2(t-\xi)}}\mathrm{d}\xi \tag{119}$$

边值函数唯一确定为

$$\phi(t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-rt}+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t(t-\xi)^{-\frac{1}{2}}\gamma(\xi)\mathrm{e}^{-r(t-\xi)}\mathrm{d}\xi \tag{120}$$

证明：由定理 2 中令 $N=0$ 和 $x(t)=x_0(t)$ 即得。

附注 2：在**定理 4 的条件下得到**精确解 $\{u(x,t),x(t)\}$ 且同时确定了边值函数 $\phi(t)$。对任意给定的边值函数 $\phi(t)$ 可以导致确定奇异内边界的问题无解。

自由边界问题 IIIA (热传导方程在 $0\le x\le x(t),t\ge 0$ 上的自由边界问题)：求 $\{u(x,t),x(t)\}$，使其满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=Lu,-\infty<x<x(t),t>0 & (121)\\ u(x,0)=\varphi(x),-\infty<x<+\infty & (122)\\ u(x(t),t)=\max\limits_{-\infty<x\le x(t)}u(x,t)=\phi(t),t\ge 0 & (123)\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(x(t),t)=0,t\ge 0 & (124)\\ \lim\limits_{x\to-\infty}|u|<+\infty & (125)\end{cases}$$

推论 3.1 (自由边界问题 **IIIA** 解的存在定理)：若

1) $\gamma \in \Lambda^*_{[0,+\infty)}$，2) $\varphi(x)=\delta(x-x_0)$

则自由边界问题 IIIA 存在唯一精确解 $\{u(x,t),x(t)\}$:

$$\begin{cases} u(x,t)=v(x,t)+w(x,t) & (126) \\ x(t)=x_0+bt,t\ge 0 & (127) \end{cases}$$

其中

$$v(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-rt}\mathrm{e}^{-\frac{[x(t)-x]^2}{4a^2t}} \tag{128}$$

$$w(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t(t-\xi)^{-\frac{1}{2}}\gamma(\xi)\mathrm{e}^{-r(t-\xi)}\mathrm{e}^{-\frac{[x-x(t)]^2}{4a^2(t-\xi)}}\mathrm{d}\xi \tag{129}$$

边值函数唯一确定为

$$\phi(t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-rt}+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t(t-\xi)^{-\frac{1}{2}}\gamma(\xi)\mathrm{e}^{-r(t-\xi)}\mathrm{d}\xi \tag{130}$$

自由边界问题 IIIB (热传导方程在 $x(t)\le x<+\infty,t\ge 0$ 上的自由边界问题)：求 $\{u(x,t),x(t)\}$，使其满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=Lu,x(t)<x<+\infty,t>0 & (131) \\ u(x,0)=\varphi(x),-\infty<x<+\infty & (132) \\ u(x(t),t)=\max\limits_{x(t)\le x<+\infty}u(x,t)=\phi(t),t\ge 0 & (133) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(x(t),t)=0,t\ge 0 & (134) \\ \lim\limits_{x\to+\infty}|u|<+\infty & (135) \end{cases}$$

推论 3.2 (自由边界问题 **IIIB** 解的存在定理)：若

1) $\gamma \in \Lambda^*_{[0,+\infty)}$，2) $\varphi(x)=\delta(x-x_0)$；

则自由边界问题 IIIB 存在唯一精确解 $\{u(x,t),x(t)\}$:

$$\begin{cases} u(x,t)=v(x,t)+w(x,t) & (136) \\ x(t)=x_0+bt,t\ge 0 & (137) \end{cases}$$

其中

$$v(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-rt}\mathrm{e}^{-\frac{[x(t)-x]^2}{4a^2t}} \tag{138}$$

$$w(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t(t-\xi)^{-\frac{1}{2}}\gamma(\xi)\mathrm{e}^{-r(t-\xi)}\mathrm{e}^{-\frac{[x-x(t)]^2}{4a^2(t-\xi)}}\mathrm{d}\xi \tag{139}$$

边值函数唯一确定为

$$\phi(t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-rt}+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t(t-\xi)^{-\frac{1}{2}}\gamma(\xi)\mathrm{e}^{-r(t-\xi)}\mathrm{d}\xi \tag{140}$$

定理 6 (数学模型 III 的奇异内边界与问题 IIIA 和 IIIB 的自由边界三线合一定理之一)：若

1) $\gamma\in\Lambda^*_{[0,+\infty)}$，2) $\varphi(x)=\delta(x-x_0)$；

则数学模型 III 与问题 IIIA 和 IIIB 同解 $\{u(x,t),x(t)\}$：

$$\begin{cases}u(x,t)=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-rt}\mathrm{e}^{-\frac{(x_0+bt-x)^2}{4a^2t}}+\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^t(t-\xi)^{-\frac{1}{2}}\gamma(\xi)\mathrm{e}^{-r(t-\xi)}\mathrm{e}^{-\frac{(x_0+bt-x)^2}{4a^2(t-\xi)}}\mathrm{d}\xi & (141)\\ x(t)=x_0+bt,t\ge 0 & (142)\end{cases}$$

同时由(140)唯一确定数学模型 III 与问题 IIIA 和 IIIB 中的边值函数 $\phi(t)$。

附注 3：关于条件(140)，也可以称为数学模型 III 有解的相容性条件，若给定函数 $\phi(t),t\ge 0$，则条件(140)是关于函数 $\gamma(t)$ 的第一类 Volterra 积分方程；函数 $\gamma(t)$ 必须是满足积分方程(140)的解。

附注 4：函数 $\gamma(t)$ 也可以是广义函数。例如，若边值函数由 $\phi(t)=\dfrac{1}{a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-rt}$ 给出，容易验证 $\gamma(t)=\delta(t)$ 是满足积分方程(140)的解。

定理 7 (数学模型 III 的奇异内边界与问题 IIIA 和 IIIB 的自由边界三线合一定理之二)：若

1) $\gamma(t)=\delta(t)$，2) $\varphi(x)=\delta(x-x_0)$；

则数学模型 III 与问题 IIIA 和 IIIB 同解 $\{u(x,t),x(t)\}$：

$$\begin{cases}u(x,t)=\dfrac{1}{a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-rt}\mathrm{e}^{-\frac{(x_0+bt-x)^2}{4a^2t}}\\ x(t)=x_0+bt,t\ge 0\end{cases} \tag{143}$$

同时唯一确定边值函数为

$$\phi(t)=\frac{1}{a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-rt} \tag{144}$$

2.3. Black-Scholes 方程自由边界问题研究

符号说明：记

$$s(T)\cong s_T,R_+\cong\{s|0<s<+\infty\},\bar{R}_+\cong\{s|0\le s<+\infty\},\Omega:0<s<+\infty,0<t<T$$
$$\Omega_-:0<s<s(t),0<t<T;\Omega_+:s(t)<s<+\infty,0<t<T;$$
$$\bar{\Omega}_-:0\le s\le s(t),0<t\le T;\bar{\Omega}_+:s(t)\le s<+\infty,0<t\le T;$$

函数的支集 $\mathrm{supp}\varphi=\{s|\varphi(s)\ne 0\}$，支集的闭包 $\overline{\mathrm{supp}\varphi}=\overline{\{s|\varphi(s)\ne 0\}}$，

记函数集合

$C(\Omega)\cong\{u|u(s,t)$ 是 Ω 中的连续函数$\}$；

$$C^{2,1}(\Omega)\cong\left\{u\middle|u\in C(\Omega),\frac{\partial u}{\partial t}\in C(\Omega),\frac{\partial u}{\partial s}\in C(\Omega),\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\in C(\Omega)\right\};$$

$$\Lambda_{[K,+\infty)} \cong \left\{\varphi \middle| \varphi \in C(R_+), \varphi(s) \ge 0, s \in \bar{R}_+, \text{且}\overline{\operatorname{supp}\varphi} \subset [K,+\infty) \subset \bar{R}_+\right\};$$

$$\Lambda_{[0,K]} \cong \left\{\varphi \middle| \varphi \in C(R_+), \varphi(s) \ge 0, s \in \bar{R}_+, \text{且}\overline{\operatorname{supp}\varphi} \subset [0,K] \subset \bar{R}_+\right\};$$

$$\Lambda^*_{[0,T]} \cong \left\{\gamma \middle| \gamma \in C([0,T]), \gamma(t) \ge 0, t \in [0,T], \text{且}\overline{\operatorname{supp}\gamma} \subset [0,T]\right\}.$$

假设在区域 $\Omega: 0 < s < +\infty, 0 < t < T$ 内存在一条奇异内边界 $\Gamma: s = s(t), 0 < t \le T$, 它把区域 Ω 分成 Ω_- 和 Ω_+ 两个部分；$\Omega = \Gamma \cup \Omega_- \cup \Omega_+$，$\Omega_- \cap \Omega_+ = \Phi$ (空集)。

齐次 Black-Scholes 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}s^2\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + (r-q)s\frac{\partial u}{\partial s} - ru = 0 \tag{145}$$

在区域 $\bar{\Omega}_-$ 或 $\bar{\Omega}_+$ 的自由边界问题，所考虑问题的未知函数 $u(s,t)$ 在开区域 Ω_- 或 Ω_+ 满足齐次 Black-Scholes 方程，在自由边界 Γ 上具有一定奇性，用自由项 $\gamma(t)\delta(s-s(t))$ 来描述之，故我们考虑非齐次 Black-Scholes 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}s^2\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + (r-q)s\frac{\partial u}{\partial s} - ru = -\gamma(t)\delta(s-s(t)), (s,t) \in \Omega: 0 < s < +\infty, 0 < t < T \tag{146}$$

的终值问题。在问题中不仅要求未知函数在 Ω 的连续解 $u(s,t)$，同时要确定奇异内边界 Γ；称其为奇异内边界问题。本文分别考虑 Black-Scholes 方程具有齐次终值条件和非齐次终值条件的奇异内边界问题。对于区域 $\bar{\Omega}_-$ (或 $\bar{\Omega}_+$)上的自由边界问题即可假设在开区域 $\Omega - \bar{\Omega}_-$ (或 $\Omega - \bar{\Omega}_+$)内没有奇异内边界或奇异点，用延拓法转换为方程(146)的奇异内边界问题来研究。

2.3.1. Black-Scholes 方程带齐次终值条件的奇异内边界问题

定解问题 I (**Black-Scholes 方程带齐次终值条件的奇异内边界问题**)：求 $\{w(s,t), s(t)\}$，使其满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} + \dfrac{\sigma^2}{2}s^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial s^2} + (r-q)s\dfrac{\partial w}{\partial s} - rw = -\gamma(t)\delta(s-s(t)), 0 < s < +\infty, 0 < t < T & (147) \\ w(s,T) = 0, 0 \le s < +\infty & (148) \\ w(s(t),t) = \max\limits_{0 \le s < +\infty} w(s,t) = \phi(t), 0 < t \le T & (149) \\ \dfrac{\partial w}{\partial s}(s(t),t) = 0, 0 < t \le T & (150) \\ \lim\limits_{s \to 0^+} |w| < +\infty, \lim\limits_{s \to +\infty} |w| < +\infty & (151) \end{cases}$$

其中边值函数 $\phi(t)$ 是待定的。

定理 8 (定解问题 I 确定奇异内边界定理)：若

1) $\gamma \in \Lambda^*_{[0,T]}$，2) $s(t)$ 为充分光滑的单调函数；

则**定解问题 I** 存在唯一精确解 $\{w(s,t), s(t)\}$：

$$\begin{cases} w(s,t) = \dfrac{1}{\sigma s_T\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_t^T \frac{\gamma(\xi)e^{-r(\xi-t)}e^{-\sigma^2\varpi(T-\xi)}}{\sqrt{\xi-t}} e^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{s_T} - \sigma^2\varpi(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(\xi-t)}} d\xi & (152) \\ s(t) = s_T e^{\sigma^2\varpi(T-t)}, 0 < t \le T & (153) \end{cases}$$

其中 $\varpi = \dfrac{q-r}{\sigma^2} + \dfrac{1}{2}$。同时边值函数唯一确定为

$$\phi(t) = \frac{1}{\sigma s_T \sqrt{2\pi}} \int_t^T \frac{\gamma(\xi) \mathrm{e}^{-r(\xi-t)} \mathrm{e}^{-\sigma^2 \varpi (T-\xi)}}{\sqrt{\xi - t}} \mathrm{d}\xi \tag{154}$$

证明：引入广义特征函数法[17]求解非齐次 Black-Scholes 方程(147)带齐次终值条件(148)的终值问题，易得其唯一精确解

$$w(s,t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_t^T \frac{\gamma(\xi) \mathrm{e}^{-r(\xi-t)}}{s(\xi)\sqrt{\xi-t}} \mathrm{e}^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{s(\xi)} - \sigma^2\varpi(\xi-t)\right]^2}{2\sigma^2(\xi-t)}} \mathrm{d}\xi \tag{155}$$

解函数 $w(s,t)$ 对 s 求偏导得

$$\frac{\partial w}{\partial s}(s,t) = \frac{-1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_t^T \frac{\gamma(\xi) \mathrm{e}^{-r(\xi-t)}}{s(\xi)\sqrt{\xi-t}} \mathrm{e}^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{s(\xi)} - \sigma^2\varpi(\xi-t)\right]^2}{2\sigma^2(\xi-t)}} \frac{\left[\ln\frac{s}{s(\xi)} - \sigma^2\varpi(\xi-t)\right]}{\sigma^2(\xi-t)} \mathrm{d}\xi \tag{156}$$

于是

$$\begin{cases} w(s,t) = \dfrac{1}{\sigma s_T\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_t^T \frac{\gamma(\xi) \mathrm{e}^{-r(\xi-t)} \mathrm{e}^{-\sigma^2\varpi(T-\xi)}}{\sqrt{\xi-t}} \mathrm{e}^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{s_T} - \sigma^2\varpi(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(\xi-t)}} \mathrm{d}\xi & (152) \\ s(t) = s_T \mathrm{e}^{\sigma^2\varpi(T-t)}, 0 < t \le T & (153) \end{cases}$$

$$\frac{\partial w}{\partial s}(s(t),t) = \frac{-1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_t^T \frac{\gamma(\xi) \mathrm{e}^{-r(\xi-t)}}{s(\xi)\sqrt{\xi-t}} \mathrm{e}^{-\frac{\left[\ln\frac{s(t)}{s(\xi)} - \sigma^2\varpi(\xi-t)\right]^2}{2\sigma^2(\xi-t)}} \frac{\left[\ln\frac{s(t)}{s(\xi)} - \sigma^2\varpi(\xi-t)\right]}{\sigma^2(\xi-t)} \mathrm{d}\xi \tag{157}$$

条件(150)等价于：

$$\ln\frac{s(t)}{s(\xi)} - \sigma^2\varpi(\xi-t) \equiv 0, \forall t \in (0,T), \xi \in (t,T] \tag{158}$$

由(158)即有

$$\ln\frac{s(t)}{s(\xi)} \equiv \sigma^2\varpi(\xi-t), \forall t \in (0,T), \xi \in (t,T]$$

$$\frac{s(t)}{s(\xi)} \equiv \mathrm{e}^{\sigma^2\varpi(\xi-t)} \equiv \mathrm{e}^{\sigma^2\varpi\xi}\mathrm{e}^{-\sigma^2\varpi t}$$

$$\frac{s(t)}{\mathrm{e}^{-\sigma^2\varpi t}} \equiv \frac{s(\xi)}{\mathrm{e}^{-\sigma^2\varpi\xi}} \equiv C \ (\text{常数}),\ \ \forall t \in (0,T), \xi \in (t,T] \tag{159}$$

让(159)中 $\xi = T$ 即有

$$\frac{s(t)}{\mathrm{e}^{-\sigma^2\varpi t}} \equiv \frac{s(T)}{\mathrm{e}^{-\sigma^2\varpi T}}, s(t) = s(T)\mathrm{e}^{\sigma^2\varpi(T-t)}$$

从而确定奇异内边界

$$s(t) = s_T \mathrm{e}^{\sigma^2 \varpi (T-t)}, \forall t \in (0,T]$$

即有(153)成立。且(153)成立必有(158)成立。由(155)，(153)即有(152)成立。

且由(156)，(158)有

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial w}{\partial s}(s,t) \\
&= \frac{-1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_t^T \frac{\gamma(\xi)\mathrm{e}^{-r(\xi-t)}}{s(\xi)\sqrt{\xi-t}} \mathrm{e}^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{s(\xi)}-\sigma^2\varpi(\xi-t)\right]^2}{2\sigma^2(\xi-t)}} \frac{\left[\ln\frac{s}{s(\xi)} - \ln\frac{s(t)}{s(\xi)} + \ln\frac{s(t)}{s(\xi)} - \sigma^2\varpi(\xi-t)\right]}{\sigma^2(\xi-t)} \mathrm{d}\xi \\
&= \frac{-1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_t^T \frac{\gamma(\xi)\mathrm{e}^{-r(\xi-t)}}{s(\xi)\sqrt{\xi-t}} \mathrm{e}^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{s(\xi)}-\sigma^2\varpi(\xi-t)\right]^2}{2\sigma^2(\xi-t)}} \frac{\ln\frac{s}{s(t)}}{\sigma^2(\xi-t)} \mathrm{d}\xi
\end{aligned}$$

即有

$$\frac{\partial w}{\partial s}(s,t) = \frac{-\ln\frac{s}{s(t)}}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} \int_t^T \frac{\gamma(\xi)\mathrm{e}^{-r(\xi-t)}}{s(\xi)(\xi-t)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{e}^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{s(\xi)}-\sigma^2\varpi(\xi-t)\right]^2}{2\sigma^2(\xi-t)}} \mathrm{d}\xi \tag{160}$$

于是

1) 当 $(s,t)\in\Omega_-$， $0 < s < s(t), 0 < \frac{s}{s(t)} < 1, \ln\frac{s}{s(t)} < 0, \frac{\partial w}{\partial s}(s,t) > 0$

$$w(s(t),t) = \max_{0\le s\le s(t)} w(s,t) = \phi(t) \tag{161}$$

2) 当 $(s,t)\in\Omega_+$， $s(t) < s < +\infty, \frac{s}{s(t)} > 1, \ln\frac{s}{s(t)} > 0, \frac{\partial w}{\partial s}(s,t) < 0$

$$w(s(t),t) = \max_{s(t)\le s<+\infty} w(s,t) = \phi(t) \tag{162}$$

从而

$$w(s(t),t) = \max_{0\le s<+\infty} w(s,t) = \phi(t) \tag{163}$$

由(149)，(152)，(153)有(154)成立。**证毕。**

自由边界问题 IA(Black-Scholes 方程带齐次终值条件在区域 $\bar{\Omega}_-$ 上的自由边界问题)：

求 $\{w(s,t), s(t)\}$，使其满足

$$\begin{cases}
\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}s^2\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + (r-q)s\frac{\partial w}{\partial s} - rw = 0, 0 < s < s(t), 0 < t < T & (164)\\
w(s,T) = 0, 0 \le s < +\infty & (165)\\
w(s(t),t) = \max\limits_{0\le s\le s(t)} w(s,t) = \phi(t), 0 < t \le T & (166)\\
\frac{\partial w}{\partial s}(s(t),t) = 0, 0 < t \le T & (167)\\
\lim\limits_{s\to 0^+} |w| < +\infty, \lim\limits_{s\to+\infty} |w| < +\infty & (168)
\end{cases}$$

其中函数$\phi(t)$是待定的。所求解$w(s,t)$是定义在区域$\Omega:0<s<+\infty,t>0$中的连续函数；$w\in\{w|w\in C(\Omega),w(s,T)=0,0\le s<+\infty\}$。

自由边界问题 IA*：求$\{w(s,t),s(t)\}$，使其满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial t}+\dfrac{\sigma^2}{2}s^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial s^2}+(r-q)s\dfrac{\partial w}{\partial s}-rw=0,0<s<s(t),0<t<T & (164)\\ w(s,T)=0,0\le s\le s_T & (165)'\\ w(s(t),t)=\max\limits_{0\le s\le s(t)}w(s,t)=\phi(t),0<t\le T & (166)\\ \dfrac{\partial w}{\partial s}(s(t),t)=0,0<t\le T & (167)\\ \lim\limits_{s\to 0^+}|w|<+\infty & (168)\end{cases}$$

其中函数$\phi(t)$是待定的。所求解$w\in\{w|w\in C(\Omega),w(s,T)=0,0\le s<+\infty\}$。

推论 8.1 (自由边界问题 IA 解的存在定理)：若$\gamma\in\Lambda^*_{[0,T]}$，则自由边界问题 IA 存在唯一精确解$\{w(s,t),s(t)\}$，$w(s,t)$由(152)，自由边界$s(t)$由(153)给出；同时边值函数$\phi(t)$由(154)唯一确定。

证明：自由边界问题 IA 所求解$w(s,t)$是定义在区域$\Omega:0<s<\infty,t>0$中的连续函数；$w\in\{w|w\in C(\Omega),w(s,T)=0,0\le s<+\infty\}$；由延拓法等价于考虑非 Black-Scholes 方程(147)的奇异内边界问题：即求$\{w(s,t),s(t)\}$，使其满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial t}+\dfrac{\sigma^2}{2}s^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial s^2}+(r-q)s\dfrac{\partial w}{\partial s}-rw=-\gamma(t)\delta(s-s(t)),0<s<+\infty,0<t<T & (147)\\ w(s,T)=0,0\le s<+\infty & (148)\\ w(s(t),t)=\max\limits_{0\le s\le s(t)}w(s,t)=\phi(t),0<t\le T & (149)'\\ \dfrac{\partial w}{\partial s}(s(t),t)=0,0<t\le T & (150)\\ \lim\limits_{s\to 0^+}|w|<+\infty,\ \lim\limits_{s\to +\infty}|w|<+\infty & (151)\end{cases}$$

由定理 8 的证明即知推论 8.1 的结论成立。**证毕。**

推论 8.2 (自由边界问题 IA*解的存在定理)：若$\gamma\in\Lambda^*_{[0,T]}$，则自由边界问题 IA*存在精确解$\{w(s,t),s(t)\}$，$w(s,t)$由(152)给出，自由边界$s(t)$由(153)给出；但$w(s,t)$具有多解性。

证明：自由边界问题 IA 中齐次终值条件为$w(s,T)=0,0\le s<+\infty$。自由边界问题 IA 是在区域$\bar{\Omega}_-$上的定解问题，区域$\bar{\Omega}_-$的终值区间应为$[0,s_T]$；若将齐次终值条件为$w(s,T)=0,0\le s<+\infty$改为$w(s,T)=0,0\le s\le s_T$，则得到自由边界问题 IA*。终值条件$w(s,T)=0,0\le s<+\infty$成立必有终值条件$w(s,T)=0,0\le s\le s_T$成立，从而自由边界问题 IA 的解也是自由边界问题 IA*的解。由于问题 IA*的终值函数是定义区间$[0,s_T]$上的函数，将终值函数连续开拓到$[0,+\infty)$将得到一个终值函数族$\Lambda_{[s_T,+\infty)}$；导致自由边界问题 IA*的解函数$w(s,t)$具有多解性。**证毕。**(参见[18])

自由边界问题 IB (Black-Scholes 方程带齐次终值条件在区域$\bar{\Omega}_+$上的自由边界问题)：

求$\{w(s,t),s(t)\}$，使其满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial t}+\dfrac{\sigma^2}{2}s^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial s^2}+(r-q)s\dfrac{\partial w}{\partial s}-rw=0,s(t)<s<+\infty,0<t<T\\ w(s,T)=0,0\le s<+\infty\\ w(s(t),t)=\max\limits_{s(t)\le s\le+\infty}w(s,t)=\phi(t),0<t\le T\\ \dfrac{\partial w}{\partial s}(s(t),t)=0,0<t\le T\\ \lim\limits_{s\to+\infty}|w|<+\infty\end{cases}\tag{169}$$

其中函数 $\phi(t)$ 是待定的。所求解 $w\in\{w|w\in C(\Omega),w(s,T)=0,0\le s<+\infty\}$。

自由边界问题 IB* (Black-Scholes 方程带齐次终值条件在区域 $\bar{\Omega}_+$ 上的自由边界问题):

求 $\{w(s,t),s(t)\}$，使其满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial t}+\dfrac{\sigma^2}{2}s^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial s^2}+(r-q)s\dfrac{\partial w}{\partial s}-rw=0,s(t)<s<+\infty,0<t<T\\ w(s,T)=0,s_T\le s<+\infty\\ w(s(t),t)=\max\limits_{s(t)\le s<+\infty}w(s,t)=\phi(t),0<t\le T\\ \dfrac{\partial w}{\partial s}(s(t),t)=0,0<t\le T\\ \lim\limits_{s\to+\infty}|w|<+\infty\end{cases}\tag{170}$$

其中函数 $\phi(t)$ 是待定的。所求解 $w(s,t)$ 是定义在区域 $\bar{\Omega}_+$ 中的连续函数。

推论 8.3 (自由边界问题 IB 解的存在定理)：若 $\gamma\in\Lambda^*_{[0,T]}$，则自由边界问题 IB 存在唯一精确解 $\{w(s,t),s(t)\}$，解函数 $w(s,t)$ 由(152)，自由边界 $s(t)$ 由(153)给出；同时边值函数 $\phi(t)$ 由(154)唯一确定。

证明：与推论 8.1 的证明类似。

推论 8.4 (自由边界问题 IB*解的存在定理)：若 $\gamma\in\Lambda^*_{[0,T]}$，则自由边界问题 IB*存在精确解 $\{w(s,t),s(t)\}$，解函数 $w(s,t)$ 由(152)，自由边界 $s(t)$ 由(153)给出;同时边值函数 $\phi(t)$ 由(154)确定；但 $w(s,t)$ 具有多解性。

证明：与推论 8.2 的证明类似。

2.3.2. Black-Scholes 方程带非齐次终值条件的奇异内边界问题

定解问题 II (Black-Scholes 方程带非齐次终值条件的奇异内边界问题)：求 $\{u(s,t),s(t)\}$，使其满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\sigma^2}{2}s^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial s^2}+(r-q)s\dfrac{\partial u}{\partial s}-ru=-\gamma(t)\delta(s-s(t)),0<s<+\infty,0<t<T & (171)\\ u(s,T)=\varphi(s),0\le s<+\infty & (172)\\ u(s(t),t)=\max\limits_{0\le s<+\infty}u(s,t)=\phi(t),0<t\le T & (173)\\ \dfrac{\partial u}{\partial s}(s(t),t)=\upsilon(t),0<t\le T & (174)\\ \lim\limits_{s\to0^+}|u|<+\infty,\ \lim\limits_{s\to+\infty}|u|<+\infty & (175)\end{cases}$$

定解问题 II.1 (**齐次 Black-Scholes 方程的终值问题**):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\sigma^2}{2}s^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial s^2}+(r-q)s\dfrac{\partial u}{\partial s}-ru=0,0<s<+\infty,0<t<T & (176) \\ u(s,T)=\varphi(s),0\le s<+\infty & (177) \\ \lim\limits_{s\to0^+}|u|<+\infty,\ \lim\limits_{s\to+\infty}|u|<+\infty & (178) \end{cases}$$

定理 9：**定解问题 II**.1 存在唯一解，且

1) 当 $\varphi(s)=\delta(K-s)$，解可表为

$$v(s,t)=\frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma K\sqrt{2\pi(T-t)}}e^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{K}-\sigma^2\varpi(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}} \tag{179}$$

若 $s(t)=Ke^{\sigma^2\varpi(T-t)}$，$v(s,t)$ 满足 $\max\limits_{0\le s<+\infty}v(s,t)=v(s(t),t),0<t\le T$。

2)当 $\varphi\in\Lambda_{[K,+\infty)}$，解可表为

$$v_A(s,t)=\frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_K^{+\infty}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}e^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{\zeta}-\sigma^2\varpi(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}}d\zeta \tag{180}$$

若 $s(t)=Ke^{\sigma^2\varpi(T-t)}$，$v_A(s,t)$ 满足 $\max\limits_{0\le s\le s(t)}v_A(s,t)=v_A(s(t),t),0<t\le T$；

3)当 $\varphi\in\Lambda_{[0,K]}$，解可表为

$$v_B(s,t)=\frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_0^{K}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}e^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{\zeta}-\sigma^2\varpi(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}}d\zeta \tag{181}$$

若 $s(t)=Ke^{\sigma^2\varpi(T-t)}$，$v_B(s,t)$ 满足 $\max\limits_{s(t)\le s<+\infty}v_B(s,t)=v_B(s(t),t),0<t\le T$。

证明：广义特征函数法[17] **定解问题 II**.1 易得其唯一精确解

$$v(s,t)=\frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}e^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{\zeta}-\sigma^2\varpi(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}}d\zeta\text{，且}$$

1) 当 $\varphi(s)=\delta(K-s)$，

$$\begin{aligned} v(s,t)&=\frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_0^{+\infty}\frac{\delta(K-\zeta)}{\zeta}e^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{\zeta}-\sigma^2\varpi(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}}d\zeta \\ &=\frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma K\sqrt{2\pi(T-t)}}e^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{K}-\sigma^2\varpi(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}} \end{aligned}$$

由 $e^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{K}-\sigma^2\varpi(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}}\le1$ 即有

$$0 \le v(s,t) \le \frac{\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{\sigma K\sqrt{2\pi(T-t)}} \tag{182}$$

$$若 s(t) = K\mathrm{e}^{\sigma^2\varpi(T-t)}, v(s(t),t) = \frac{\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{\sigma K\sqrt{2\pi(T-t)}} \tag{183}$$

从而 $v(s(t),t) = \max\limits_{0\le s<+\infty} v(s,t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{\sigma K\sqrt{2\pi(T-t)}}$。

2) 当 $\varphi \in \Lambda_{[K,+\infty)}$，解

$$v_A(s,t) = \frac{\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_K^{+\infty}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}\mathrm{e}^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{\zeta}-\sigma^2\varpi(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}}\mathrm{d}\zeta \tag{184}$$

对 s 求偏导

$$\frac{\partial v_A}{\partial s}(s,t) = \frac{-\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_K^{+\infty}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}\mathrm{e}^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{\zeta}-\sigma^2\varpi(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}}\frac{\left[\ln\frac{s}{s(t)}+\ln\frac{s(t)}{\zeta}-\sigma^2\varpi(T-t)\right]}{\sigma^2(T-t)}\mathrm{d}\zeta$$

由 $s(t) = K\mathrm{e}^{\sigma^2\varpi(T-t)}, 0<t\le T$

$$\frac{\partial v_A}{\partial s}(s,t) = \frac{-\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_K^{+\infty}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}\mathrm{e}^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{\zeta}-\sigma^2\varpi(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}}\frac{\left[\ln\frac{s}{s(t)}+\ln\frac{K}{\zeta}\right]}{\sigma^2(T-t)}\mathrm{d}\zeta \tag{185}$$

当 $0<s<s(t)$，有 $0<\dfrac{s}{s(t)}<1$ 又 $\zeta>K$ 有 $0<\dfrac{K}{\zeta}<1$，$\ln\dfrac{s}{s(t)}+\ln\dfrac{K}{\zeta}<0$，$\dfrac{\partial v_A}{\partial s}(s,t)>0, 0<s<s(t)$。从而对任意固定的 $t\in(0,T)$ 函数 $v_A(s,t)$ 关于变量 s 在 $0<s<s(t)$ 单调增，$\max\limits_{0\le s\le s(t)} v_A(s,t) = v_A(s(t),t)$。

同理 3) 成立。证毕。

由定理 8，定理 9 即得如下定理 10。

定理 10 (定解问题 II 确定奇异内边界定理)：若 $\gamma\in\Lambda^*_{[0,T]}$，则定解问题 II 存在唯一精确解 $\{u(s,t), s(t)\}$：

$$\begin{cases} u(s,t) = v(s,t) + w(s,t) \\ s(t) = K\mathrm{e}^{\sigma^2\varpi(T-t)}, 0<t\le T \end{cases} \tag{186}$$

其中

$$w(s,t) = \frac{1}{\sigma K\sqrt{2\pi}}\int_t^T\frac{\gamma(\xi)\mathrm{e}^{-r(\xi-t)}\mathrm{e}^{-\sigma^2\varpi(T-\xi)}}{\sqrt{\xi-t}}e^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{K}-\sigma^2\varpi(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(\xi-t)}}\mathrm{d}\xi \tag{187}$$

且满足 $\max\limits_{0\le s<+\infty} w(s,t) = w(s(t),t)$；

1) 当 $\varphi(s) = \delta(K-s)$，

$$v(s,t) = \frac{\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{\sigma K\sqrt{2\pi(T-t)}}\mathrm{e}^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{K}-\sigma^2\varpi(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}} \tag{188}$$

且满足 $\max\limits_{0\le s<+\infty} v(s,t)=v(s(t),t)$，同时唯一确定边值函数为

$$\begin{cases}\upsilon(t)=0\\ \phi(t)=\dfrac{\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{K\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}+\dfrac{1}{K\sigma\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_t^T\dfrac{\gamma(\xi)\mathrm{e}^{-r(\xi-t)}\mathrm{e}^{-\sigma^2\varpi(T-\xi)}}{\sqrt{\xi-t}}\mathrm{d}\xi\end{cases} \tag{189}$$

2)当 $\varphi\in\Lambda_{[K,+\infty)}$，

$$v(s,t)=\frac{\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_K^{+\infty}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}\mathrm{e}^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{\zeta}-\sigma^2\varpi(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}}\mathrm{d}\zeta \tag{190}$$

且满足 $\max\limits_{0\le s\le s(t)} v(s,t)=v(s(t),t)$；同时唯一确定边值函数为

$$\upsilon(t)=\frac{-\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{\sigma^3 s(t)\sqrt{2\pi}(T-t)^{\frac{3}{2}}}\int_K^{+\infty}\frac{\varphi(\zeta)\left[\ln\frac{K}{\zeta}\right]}{\zeta}\mathrm{e}^{-\frac{\left[\ln\frac{K}{\zeta}\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}}\mathrm{d}\zeta \tag{191}$$

$$\phi(t)=\frac{\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_K^{+\infty}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}\mathrm{e}^{-\frac{\left[\ln\frac{K}{\zeta}\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}}\mathrm{d}\zeta+\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_t^T\frac{\gamma(\xi)\mathrm{e}^{-r(\xi-t)}}{s(\xi)\sqrt{\xi-t}}\mathrm{d}\xi \tag{192}$$

3) 当 $\varphi\in\Lambda_{[0,K]}$，

$$v(s,t)=\frac{\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_0^{K}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}\mathrm{e}^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{\zeta}-\sigma^2\varpi(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}}\mathrm{d}\zeta \tag{193}$$

且满足 $\max\limits_{s(t)\le s<+\infty} v(s,t)=v(s(t),t)$；同时唯一确定边值函数为

$$\upsilon(t)=\frac{-\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{\sigma^3 s(t)\sqrt{2\pi}(T-t)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{K}\frac{\varphi(\zeta)\left[\ln\frac{K}{\zeta}\right]}{\zeta}\mathrm{e}^{-\frac{\left[\ln\frac{K}{\zeta}\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}}\mathrm{d}\zeta \tag{194}$$

$$\phi(t)=\frac{\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_0^{K}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}\mathrm{e}^{-\frac{\left[\ln\frac{K}{\zeta}\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}}\mathrm{d}\zeta+\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_t^T\frac{\gamma(\xi)\mathrm{e}^{-r(\xi-t)}}{s(\xi)\sqrt{\xi-t}}\mathrm{d}\xi \tag{195}$$

附注 5：关于 s_T 的确定：

1)当 $\varphi(s)=\delta(K-s)$，$s(t)=K\mathrm{e}^{\sigma^2\varpi(T-t)}$，$u(s,t)=v(s,t)+w(s,t)$ 满足 $\max\limits_{0\le s<+\infty}u(s,t)=u(s(t),t)\ge u(s^*(t),t)$；$s^*(t)=s_T\mathrm{e}^{\sigma^2\varpi(T-t)}$，$\forall s_T\in(0,+\infty)$，欲使 $u(s(t),t)\equiv u(s^*(t),t)$，必有 $s_T=K$。

2)若 $\overline{\operatorname{supp}\varphi}=[K,+\infty)$，$\forall s_T<K$，$[0,s^*(t)]\subset[0,s(t)]$，取 $s_T=K$ 即有 $\max\limits_{0<s_T\le K}s^*(t)=s(t)$，$\max\limits_{0\le s\le s(t)}v(s,t)=v(s(t),t)$，$\max\limits_{0\le s<+\infty}w(s,t)=w(s(t),t)$，故有 $\max\limits_{0\le s\le s(t)}u(s,t)=u(s(t),t)$。

3)若 $\overline{\operatorname{supp}\varphi}=[0,K]$，$\forall K<s_T$，$[s^*(t),+\infty)\subset[s(t),+\infty)$，同理取 $s_T=K$ 有 $\min\limits_{0<K\le s_T}s^*(t)=s(t)$，

$\max\limits_{s(t)\le s<\infty} u(s,t)=u(s(t),t)$。综上所述我们获得的奇异内边界 $s(t)=K\mathrm{e}^{\sigma^2\varpi(T-t)}$ 就是金融数学中的最佳实施边界。

定义 1：定解问题 II 中把条件(173)换成

$$u(s(t),t)=\max_{0\le s\le s(t)} u(s,t)=\phi(t) \tag{173$_\mathrm{A}$}$$

则称其为**定解问题 IIA**。

定义 2：定解问题 II 中把条件(173)换成

$$u(s(t),t)=\max_{s(t)\le s<+\infty} u(s,t)=\phi(t) \tag{173$_\mathrm{B}$}$$

则称其为**定解问题 IIB**。

自由边界问题 IIA (Black-Scholes 方程带非齐次终值条件在区域 $\bar{\Omega}_-(t)$ 上**的自由边界问题)**：

求 $\{u(s,t),s(t)\}$，使其满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\sigma^2}{2}s^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial s^2}+(r-q)s\dfrac{\partial u}{\partial s}-ru=0, 0<s<s(t), 0<t<T & (196)\\ u(s,T)=\varphi(s), 0\le s<+\infty & (197)\\ u(s(t),t)=\max\limits_{0\le s\le s(t)} u(s,t)=\phi(t), 0<t\le T & (198)\\ \dfrac{\partial u}{\partial s}(s(t),t)=\upsilon(t), 0<t\le T & (199)\\ \lim\limits_{s\to 0^+}|u|<+\infty & (200)\end{cases}$$

其中函数 $\{\phi(t),\upsilon(t)\}$ 是待定的。所求解 $u\in\{u|u\in C(\Omega),u(s,T)=\varphi(s),0\le s<+\infty\}$。

定理 11 (自由边界问题 **IIA** 解的存在定理)**：**若

1) $\gamma\in\Lambda^*_{[0,T]}$，2) $\overline{\mathrm{supp}\varphi}=[K,+\infty)$；

则自由边界问题 **IIA** 存在唯一精确解 $\{u(s,t),s(t)\}$：

$$\begin{cases}u(s,t)=\dfrac{\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\displaystyle\int_K^{+\infty}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}\mathrm{e}^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{\zeta}-\sigma^2\varpi(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}}\mathrm{d}\zeta \\ \qquad +\dfrac{1}{\sigma K\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_t^T\frac{\gamma(\xi)\mathrm{e}^{-r(\xi-t)}\mathrm{e}^{-\sigma^2\varpi(T-\xi)}}{\sqrt{\xi-t}}\mathrm{e}^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{K}-\sigma^2\varpi(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(\xi-t)}}\mathrm{d}\xi & (201)\\ s(t)=K\mathrm{e}^{\sigma^2\varpi(T-t)}, 0<t\le T & (202)\end{cases}$$

同时唯一确定边值函数为

$$\begin{cases}\upsilon(t)=\dfrac{-\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{\sigma^3 s(t)\sqrt{2\pi}(T-t)^{\frac{3}{2}}}\displaystyle\int_K^{+\infty}\frac{\varphi(\zeta)\left[\ln\frac{K}{\zeta}\right]}{\zeta}\mathrm{e}^{-\frac{\left[\ln\frac{K}{\zeta}\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}}\mathrm{d}\zeta & (203)\\ \phi(t)=\dfrac{\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\displaystyle\int_K^{+\infty}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}\mathrm{e}^{-\frac{\left[\ln\frac{K}{\zeta}\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}}\mathrm{d}\zeta+\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_t^T\frac{\gamma(\xi)\mathrm{e}^{-r(\xi-t)}}{s(\xi)\sqrt{\xi-t}}\mathrm{d}\xi & (204)\end{cases}$$

证明：自由边界问题 **IIA 由延拓法与定解问题 IIA** 等价。**定理 10 中结论** 2)**即得**。证毕。

推论 11.1 (自由边界问题 **II**A 解的存在定理)：若

1) $\gamma \in \Lambda^*_{[0,T]}$，2) $\varphi(s)=(s-K)^+$；

则自由边界问题 **II**A 存在唯一精确解 $\{u(s,t),s(t)\}$：

$$\begin{cases} u(s,t)=\dfrac{\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\displaystyle\int_{\ln K}^{+\infty}\left(\mathrm{e}^{\xi}-K\right)\mathrm{e}^{-\frac{\left[\ln s-\xi-\sigma^2\varpi(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}}\mathrm{d}\xi \\ \qquad\qquad +\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_t^T\dfrac{\gamma(\xi)\mathrm{e}^{-r(\xi-t)}}{s(\xi)\sqrt{\xi-t}}\mathrm{e}^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{s(t)}\right]^2}{2\sigma^2(\xi-t)}}\mathrm{d}\xi & (205) \\ s(t)=K\mathrm{e}^{\sigma^2\varpi(T-t)},0<t\le T & (206) \end{cases}$$

同时唯一确定边值函数为

$$\begin{cases} \upsilon(t)=\dfrac{-\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{\sigma^3 s(t)\sqrt{2\pi}(T-t)^{\frac{3}{2}}}\displaystyle\int_{\ln K}^{+\infty}\left(\mathrm{e}^{\xi}-K\right)(\ln K-\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(\ln K-\xi)^2}{2\sigma^2(T-t)}}\mathrm{d}\xi & (207) \\ \phi(t)=\dfrac{\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\displaystyle\int_{\ln K}^{+\infty}\left(\mathrm{e}^{\xi}-K\right)\mathrm{e}^{-\frac{(\ln K-\xi)^2}{2\sigma^2(T-t)}}\mathrm{d}\xi+\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_t^T\dfrac{\gamma(\xi)\mathrm{e}^{-r(\xi-t)}}{s(\xi)\sqrt{\xi-t}}\mathrm{d}\xi & (208) \end{cases}$$

证明：当 $\varphi(s)=(s-K)^+=\begin{cases} s-K,s\ge K \\ 0,s<K\end{cases}$ 即有 $\overline{\mathrm{supp}\varphi}=[K,+\infty)$。由**定理 11** 即得。证毕。

推论 11.2(自由边界问题 **II**A 解的存在定理)：若

1) $\gamma(t)=\theta\delta(T-t),\theta\ge 0$，2) $\varphi(s)=(s-K)^+$；

则自由边界问题 **II**A 存在唯一精确解 $\{u(s,t),s(t)\}$：

$$\begin{cases} u(s,t)=\dfrac{\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\displaystyle\int_{\ln K}^{+\infty}\left(\mathrm{e}^{\xi}-K\right)\mathrm{e}^{-\frac{\left[\ln s-\xi-\sigma^2\varpi(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}}\mathrm{d}\xi+\dfrac{\theta\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{\sigma K\sqrt{2\pi(T-t)}}\mathrm{e}^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{s(t)}\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}} & (209) \\ s(t)=K\mathrm{e}^{\sigma^2\varpi(T-t)},0<t\le T & (210) \end{cases}$$

同时唯一确定边值函数为

$$\begin{cases} \upsilon(t)=\dfrac{-\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{\sigma^3 s(t)\sqrt{2\pi}(T-t)^{\frac{3}{2}}}\displaystyle\int_{\ln K}^{\infty}\left(\mathrm{e}^{\xi}-K\right)(\ln K-\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(\ln K-\xi)^2}{2\sigma^2(T-t)}}\mathrm{d}\xi & (211) \\ \phi(t)=\dfrac{\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\displaystyle\int_{\ln K}^{\infty}\left(\mathrm{e}^{\xi}-K\right)\mathrm{e}^{-\frac{(\ln K-\xi)^2}{2\sigma^2(T-t)}}\mathrm{d}\xi+\dfrac{\theta\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{\sigma K\sqrt{2\pi(T-t)}} & (212) \end{cases}$$

自由边界问题 IIB(Black-Scholes 方程带非齐次终值条件在区域 $\bar{\Omega}_+(t)$ 上的自由边界问题)：

求 $\{u(s,t),s(t)\}$，使其满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\sigma^2}{2}s^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial s^2}+(r-q)s\dfrac{\partial u}{\partial s}-ru=0,s(t)<s<+\infty,0<t<T & (213)\\ u(s,T)=\varphi(s),0\le s<+\infty & (214)\\ u(s(t),t)=\max\limits_{s(t)\le s<+\infty}u(s,t)=\phi(t),0<t\le T & (215)\\ \dfrac{\partial u}{\partial s}(s(t),t)=\upsilon(t),0<t\le T & (216)\\ \lim\limits_{s\to+\infty}|u|<+\infty & (217)\end{cases}$$

其中函数 $\{\phi(t),\upsilon(t)\}$ 是待定的。所求解 $u\in\{u|u\in C(\Omega),u(s,T)=\varphi(s),0\le s<+\infty\}$。

定理 12 (自由边界问题 **IIB** 解的存在定理)：若

1) $\gamma\in\Lambda_{[0,T]}^{*}$，2) $\overline{\mathrm{supp}\varphi}=[0,K]$；

则自由边界问题 **IIB** 存在唯一精确解 $\{u(s,t),s(t)\}$：

$$\begin{cases}u(s,t)=\dfrac{\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\displaystyle\int_0^K\dfrac{\varphi(\zeta)}{\zeta}\mathrm{e}^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{\zeta}-\sigma^2\varpi(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}}\mathrm{d}\zeta\\ \qquad+\dfrac{1}{\sigma K\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_t^T\dfrac{\gamma(\xi)\mathrm{e}^{-r(\xi-t)}\mathrm{e}^{-\sigma^2\varpi(T-\xi)}}{\sqrt{\xi-t}}\mathrm{e}^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{K}-\sigma^2\varpi(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(\xi-t)}}\mathrm{d}\xi & (218)\\ s(t)=K\mathrm{e}^{\sigma^2\varpi(T-t)},0<t\le T & (219)\end{cases}$$

同时唯一确定边值函数为

$$\begin{cases}\upsilon(t)=\dfrac{-\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{\sigma^3 s(t)\sqrt{2\pi}(T-t)^{\frac{3}{2}}}\displaystyle\int_0^K\dfrac{\varphi(\zeta)\left[\ln\frac{K}{\zeta}\right]}{\zeta}\mathrm{e}^{-\frac{\left[\ln\frac{K}{\zeta}\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}}\mathrm{d}\zeta & (220)\\ \phi(t)=\dfrac{\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\displaystyle\int_0^K\dfrac{\varphi(\zeta)}{\zeta}\mathrm{e}^{-\frac{\left[\ln\frac{K}{\zeta}\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}}\mathrm{d}\zeta+\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_t^T\dfrac{\gamma(\xi)\mathrm{e}^{-r(\xi-t)}}{s(\xi)\sqrt{\xi-t}}\mathrm{d}\xi & (221)\end{cases}$$

证明：自由边界问题 IIB 由延拓法等价定解问题 IIB。定理 10 中结论 3)**即得**。证毕。

推论 12.1 (自由边界问题 **IIB** 解的存在定理)：若

1) $\gamma\in\Lambda_{[0,T]}^{*}$，2) $\varphi(s)=(K-s)^{+}$；

则自由边界问题 **IIB** 存在唯一精确解 $\{u(s,t),s(t)\}$：

$$\begin{cases}u(s,t)=\dfrac{\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\ln K}\left(K-\mathrm{e}^{\xi}\right)\mathrm{e}^{-\frac{\left[\ln\frac{Ks}{s(t)}-\xi\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}}\mathrm{d}\xi\\ \qquad+\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_t^T\dfrac{\gamma(\xi)\mathrm{e}^{-r(\xi-t)}}{s(\xi)\sqrt{\xi-t}}\mathrm{e}^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{s(t)}\right]^2}{2\sigma^2(\xi-t)}}\mathrm{d}\xi & (222)\\ s(t)=K\mathrm{e}^{\sigma^2\varpi(T-t)},0<t\le T & (223)\end{cases}$$

同时唯一确定边值函数为

$$\begin{cases} \upsilon(t)=\dfrac{-\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}\sigma^3 s(t)(T-t)^{\frac{3}{2}}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\ln K}\left(K-\mathrm{e}^{\xi}\right)(\ln K-\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(\ln K-\xi)^2}{2\sigma^2(T-t)}}\mathrm{d}\xi & (224) \\ \phi(t)=\dfrac{\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\ln K}\left(K-\mathrm{e}^{\xi}\right)\mathrm{e}^{-\frac{(\ln K-\xi)^2}{2\sigma^2(T-t)}}\mathrm{d}\xi+\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_t^T\dfrac{\gamma(\xi)\mathrm{e}^{-r(\xi-t)}}{s(\xi)\sqrt{\xi-t}}\mathrm{d}\xi & (225) \end{cases}$$

推论 12.2 (自由边界问题 **IIB** 解的存在定理)：若

1) $\gamma(t)=\theta\delta(T-t),\theta\ge 0$，2) $\varphi(s)=(K-s)^+$；

则自由边界问题 **IIB** 存在唯一精确解 $\{u(s,t),s(t)\}$：

$$\begin{cases} u(s,t)=\dfrac{\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\ln K}\left(K-\mathrm{e}^{\xi}\right)\mathrm{e}^{-\frac{\left[\ln\frac{Ks}{s(t)}-\xi\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}}\mathrm{d}\xi \\ \qquad\qquad +\dfrac{\theta\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{\sigma K\sqrt{2\pi(T-t)}}\mathrm{e}^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{s(t)}\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}} & (226) \\ s(t)=K\mathrm{e}^{\sigma^2\varpi(T-t)},0<t\le T & (227) \end{cases}$$

同时唯一确定边值函数为

$$\begin{cases} \upsilon(t)=\dfrac{-\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}\sigma^3 s(t)(T-t)^{\frac{3}{2}}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\ln K}\left(K-\mathrm{e}^{\xi}\right)(\ln K-\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(\ln K-\xi)^2}{2\sigma^2(T-t)}}\mathrm{d}\xi & (228) \\ \phi(t)=\dfrac{\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\ln K}\left(K-\mathrm{e}^{\xi}\right)\mathrm{e}^{-\frac{(\ln K-\xi)^2}{2\sigma^2(T-t)}}\mathrm{d}\xi+\dfrac{\theta\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{\sigma K\sqrt{2\pi(T-t)}} & (229) \end{cases}$$

附注 6：自由边界问题 IIA 中非齐次终值条件为 $u(s,T)=\varphi(s),0\le s<+\infty$。自由边界问题 IIA 是在区域 $\bar{\Omega}_-$ 上的定解问题，区域 $\bar{\Omega}_-$ 的终值区间应为 $[0,s_T]$；但若将非齐次终值条件 $u(s,T)=\varphi(s),0\le s<+\infty$ 改为 $u(s,T)=\varphi(s),0\le s\le s_T$，则将导致自由边界问题 IIA 的解函数 $u(s,t)$ 具有多解性。自由边界问题 IIB 是在区域 $\bar{\Omega}_+$ 上的定解问题，区域 $\bar{\Omega}_+$ 的终值区间应为 $[s_T,+\infty)$；但若将非齐次终值条件 $u(s,T)=\varphi(s),0\le s<+\infty$ 改为 $u(s,T)=\varphi(s),s_T\le s<+\infty$，同样会导致自由边界问题 IIB 的解函数 $u(s,t)$ 具有多解性。(参见[18])

2.3.3. 上述结果的应用

金融数学在确定最佳实施边界问题的研究中出现了某些自由边界问题。

例 1：自由边界问题(确定最佳实施边界)：求 $\{u(s,t),s(t)\}$，使其满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\sigma^2}{2}s^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial s^2}+(r-q)s\dfrac{\partial u}{\partial s}-ru=0,0<s<s(t),0<t<T & (230) \\ u(s,T)=(s-K)^+,0\le s<+\infty & (231) \\ u(s(t),t)=s(t)-K,0<t\le T & (232) \\ \dfrac{\partial u}{\partial s}(s(t),t)=1,0<t\le T & (233) \\ \lim\limits_{s\to 0^+}|u|<+\infty & (234) \end{cases}$$

为确定最佳实施边界 $s(t)$,应该满足条件

$$u(s(t),t)=\max_{0\le s\le s(t)} u(s,t) \tag{235}$$

由推论 **11.1** (或推论 **11.2**)即知满足条件(230)，(231)，(234)，(235)的唯一精确解 $\{u(s,t),s(t)\}$ 由(205)，(206) (或(209)，(210))给出，同时边值函数 $\upsilon(t)$， $\phi(t)$ 由(207)，(208) (或(211)，(212))两式唯一确定；但该自由边界问题中(232)，(233)给定的边值函数 $\phi(t)=s(t)-K$， $\upsilon(t)\equiv 1$ 与(207)，(208)和(211)，(212)都不相容，故该**自由边界问题**在补充条件(235)下无解。

例 2：自由边界问题(确定最佳实施边界)**：** 求 $\{u(s,t),s(t)\}$，使其满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\sigma^2}{2}s^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial s^2}+(r-q)s\dfrac{\partial u}{\partial s}-ru=0, s(t)<s<+\infty, 0<t<T & (236)\\ u(s,T)=(K-s)^+, 0\le s<+\infty & (237)\\ u(s(t),t)=K-s(t), 0<t\le T & (238)\\ \dfrac{\partial u}{\partial s}(s(t),t)=-1, 0<t\le T & (239)\\ \lim\limits_{s\to+\infty}|u|<+\infty & (240)\end{cases}$$

要确定最佳实施边界 $s(t)$，应该满足条件

$$u(s(t),t)=\max_{s(t)\le s<+\infty} u(s,t) \tag{241}$$

由推论 12.1 (或推论 12.2)即知满足条件(236)，(237)，(240)，(241)的唯一精确解 $\{u(s,t),s(t)\}$ 由(222)，(223) (或(226)，(227))给出，同时边值函数 $\upsilon(t)$， $\phi(t)$ 由(224)，(225) (或(228)，(229))两式唯一确定；但该自由边界问题中由(238)，(239)给定的边值函数 $\phi(t)=K-s(t)$， $\upsilon(t)\equiv -1$ 与(224)，(225)和(228)，(229)都不相容，导致该**自由边界问题**在补充条件(241)下无解。

3. 结论

热传导方程和 Black-Scholes 方程都是抛物型方程。这两个方程的自由边界问题的研究方法及结果都完全类似。

I. 关于热传导方程的自由边界问题 A (在区域 $\bar{\Omega}_-:-\infty<x\le x(t),t\ge 0$ 上的自由边界问题)和自由边界问题 B(在区域 $\bar{\Omega}_+:x(t)\le x<+\infty,t>0$ 上的自由边界问题)有如下结论：

1) 假设在区域 $\Omega:-\infty<x<+\infty,t>0$ 内仅存在一条奇异内边界的条件下，关于热传导方程在区域 Ω_- (或 Ω_+)的自由边界问题即在开区域 Ω_- 和 Ω_+ 内没有奇异内边界或奇异点，可以用延拓法转换为非齐次热传导方程(110)的奇异内边界问题来研究。

2) 热传导方程的自由边界问题 A 和自由边界问题 B 确定的自由边界都为 $x(t)=x_0+bt,t>0$。

3) 热传导方程的自由边界问题 A 和自由边界问题 B 的边值函数 $\{\phi(t),\upsilon(t)\}$ 是反问题的解；它是待求的，不能任意给定。

II. 关于 Black-Scholes 方程的问题 A (在区域 $\bar{\Omega}_-:0\le s\le s(t),0<t\le T$ 上的自由边界问题)和问题 B (在区域 $\bar{\Omega}_+:s(t)\le s<+\infty,0<t\le T$ 上的自由边界问题) 有如下结论：

1) 假设在区域 $\Omega:0<s<+\infty,0<t<T$ 内仅存在一条奇异内边界的条件下，关于 Black-Scholes 方程在区域 Ω_- (或 Ω_+)的自由边界问题在开区域 Ω_- 和 Ω_+ 内没有奇异内边界或奇异点，可以用延拓法转换为方程(146)的奇异内边界问题来研究。

2) Black-Scholes 方程的自由边界问题 A 和自由边界问题 B 确定的自由边界都为 $s(t)=s_T \mathrm{e}^{\sigma^2\varpi(T-t)}$。终值函数满足条件 $\overline{\operatorname{supp}\varphi}=[K,+\infty)$ 或 $\overline{\operatorname{supp}\varphi}=[0,K]$ 得到 $s_T=K$。从而问题 A 和问题 B 具有公共自由边界 $s(t)=K\mathrm{e}^{\Theta(T-t)}$，满足条件 $\frac{1}{s(t)}\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}\equiv-\Theta$，常数 $\Theta=q-r+\frac{1}{2}\sigma^2$ 由 Black-Scholes 方程中的参数 q,r,σ^2 唯一确定。$s(t)=K\mathrm{e}^{\Theta(T-t)}$ 就是金融数学中的最佳实施边界。

3) Black-Scholes 方程自由边界问题 A (或 B)中边值函数 $\{\phi(t),\upsilon(t)\}$ 是待求的，不能任意给定。

关于热传导方程或 Black-Scholes 方程的自由边界问题 A(或问题 B)研究中，若取消在区域 Ω 内仅存在一条奇异内边界的假设条件，即在开区域 $\Omega-\bar{\Omega}_-$ (或 $\Omega-\bar{\Omega}_+$)内可能存在奇异内边界或奇异点，相应的问题 A(或问题 B)的解函数将出现复杂性和不确定性(或多解性)；但问题 A(或问题 B)自由边界还是可以唯一确定的。

参考文献 (References)

[1] 姜礼尚, 著. 期权定价的数学模型和方法[M]. 第二版. 北京: 高等教育出版社, 2008.

[2] 姜礼尚, 徐承龙, 任学敏, 李少华. 金融数学丛书: 金融衍生产品定价的数学模型与案例分析[M]. 第2版. 北京: 高等教育出版社, 2013.

[3] 任学敏, 魏嵬, 姜礼尚, 梁进. 信用风险估值的数学模型与案例分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 2014.

[4] 姜礼尚. 金融衍生产品定价的数学模型与案例分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008.

[5] 于静, 王子亭. 一类变系数抛物型自由边界问题数值算法研究[J]. 兰州文理学院学报(自然科学版), 2007(2).

[6] 崔晓丽, 刘威, 孟丽娜. 有相变的变系数抛物型微分方程自由边界问题[J]. 黑龙江工程学院学报, 2012(2).

[7] 崔霞. 二维抛物型积分微分方程动边界问题的有限元方法[J]. 高等学校计算数学学报, 1999(3).

[8] 胡其华, 周昌斌. 低渗透非达西渗流带 Stefan 条件动边界模型研究[J]. 西南石油大学学报(自然科学版), 2007, 29(5): 172-176.

[9] 刘文超, 姚军, 陈掌星, 刘曰武, 孙海. 一维低渗透多孔介质非达西渗流动边界模型的精确解析与数值解研究[J]. 力学学报, 2015, 47(4).

[10] 王丽平. 与永久美式 ESOs 有关的一个自由边界问题[J]. 工程数学学报, 2014(4).

[11] 张恭庆, 姜礼尚. 稳态水锥的自由边界问题[J]. 北京大学学报(自然科学版), 1978(1).

[12] 白东华, 孙顺华. 流体通过孔隙介质的一个自由边界问题[J]. 四川大学学报(自然科学版), 1981(1).

[13] 黄少云, 王耀东. 稳态水锥自由边界问题及其数值逼近[J]. 北京大学学报(自然科学版), 1983(1).

[14] 刘文超, 姚军, 王建忠. 低渗透多孔介质非达西渗流动边界界面追踪[J]. 计算物理, 2012, 29(6): 823-827.

[15] 吴小庆. 尤拉方程在半无界区域的边值问题的基本解[J]. 理论数学, 2016, 6(3): 243-254. http://dx.doi.org/10.12677/PM.2016.63038

[16] 吴小庆. 尤拉方程的两个自由边界问题的相容性[J]. 理论数学, 2016, 6(4): 342-360. http://dx.doi.org/10.12677/PM.2016.64050

[17] 吴小庆. 具有多条奇异内边界的 Black-Scholes 方程数学模型的连续有界正解[J]. 理论数学, 2016, 6(4): 368-390. http://dx.doi.org/10.12677/PM.2016.64052

[18] 吴小庆. 多资产期权确定最佳实施边界问题的研究[J]. 理论数学, 2016, 6(6): 496-526. http://dx.doi.org/10.12677/PM.2016.66068