Pure Mathematics 理论数学, 2017, 7(4), 288-296
Published Online July 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2017.74038

Hans汉斯

Sieve of Multiple Content and Subtle Effects of $\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=1$

Sishun Lu

Linyi University, Linyi Shandong
Email: lusishun@163.com

Received: Jun. 23rd, 2017; accepted: Jul. 7th, 2017; published: Jul. 13th, 2017

Abstract

We introduce the notions of multiple content and parallel arithmetic series. Based on the overlap law of multiple contents and properties of parallel arithmetic progressions, we discuss the appearance rule of multiples in the series of natural numbers. As applications, we prove the even number Goldbach's conjecture and the twin prime conjecture.

Keywords

Multiple Content, Overlap Law, Covering Theorem, Parallel Arithmetic Series, Sieve of Both Sides

倍数含量筛法与恒等式($\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=1$)的妙用

鲁思顺

临沂大学，山东 临沂
Email: lusishun@163.com

收稿日期：2017年6月23日；录用日期：2017年7月7日；发布日期：2017年7月13日

摘　要

本文挖掘出倍数含量及等差项同数列的概念，根据倍数含量重叠规律及等差项同数列的性质，对自然数列中倍数出现规律作了深入的探讨。作为应用，我们证明了偶数哥德巴赫猜想与孪生素数猜想。

文章引用: 鲁思顺. 倍数含量筛法与恒等式()的妙用[J]. 理论数学, 2017, 7(4): 288-296.
https://doi.org/10.12677/pm.2017.74038

关键词

倍数含量，重叠规律，覆盖定理，等差项同数列，两筛法

1. 引言

1.1. 偶数 2*n* 表为两自然数和的式子共有 *n* 种形式

$$2n=1+(2n-1)=2+(2n-2)=3+(2n-3)=\cdots=n+n$$

记作 $2n=A+B$ 为有序对偶集合：

$$A=\{a_i\}=\{1,2,3,\cdots,n\}$$

$$B=\{b_i\}=\{2n-1,2n-2,2n-3,\cdots,n\}$$

如果把 $A(B)$中的加数是合数及 1 的式子都筛除干净，若还有剩余的式子，说明偶数 $2n$ 能表示为两素数之和。

1.2. 小于 *n* 的相差为 2 的数对共有 *n*-2 种形式

$$2=3-1=4-2=5-3=\cdots=n-(n-2)$$

记作：

$$2=C-D$$

其中 $C(D)$为有序对偶集合

$$C=\{c_i\}=\{3,4,5,6,\cdots,n\}$$

$$D=\{d_i\}=\{1,2,3,4,\cdots,n-2\}$$

如果把 $C(D)$中的数是合数的都筛除干净，若能证明剩余的式子有无穷多，则说明存在无穷多相差为 2 的素数对。

2. 简单比例单筛

2.1. 倍数含量

在连续的 n 个自然数的集合 $A=\{a_i\}$ 中，自然数 p 的倍数个数有 $\left[\frac{n}{p}\right]$ 或 $\left[\frac{n}{p}+1\right]$ ([ ] 为去尾取整)。

定义 1：$A=\{a_i\}$ 中数的个数 n 与自然数 p $(p\ge 2)$ 的比值 $\frac{n}{p}$，叫做自然数 p 的倍数含量.在 A 中非 P 的倍数含量为 $n-\frac{n}{p}=n\left(1-\frac{1}{p}\right)$。

易知，p 的倍数含量与 n 成正比例关系，p 的倍数个数与 p 的倍数含量的正负误差的绝对值小于 1。

2.2. 倍数含量重叠规律

引理 1 [1]：在 $A=\{a_i\}$ 里 p 的倍数含量中，q 的部分倍数含量，也就是 p 的倍数的含量中的 pq 的倍数含量，占有 $\frac{1}{q}$ $\left(p,q\le\sqrt{n},(p,q)=1\right)$。

证明：在 $A=\{a_i\}$ 里，合数 pq 的倍数含量为 $\frac{n}{pq}$，而 $\frac{n}{pq}:\frac{n}{p}=\frac{1}{q}$。证毕

注：明筛与暗筛

由引理 1 知，明筛 p 的倍数含量，同时也按照 $\frac{1}{q}$ 比例暗筛去了 q 的部分倍数含量。

推论 1 [1]：筛除 p 的倍数含量后，在剩下的非 p 的倍数含量中，q 的倍数含量有 $\frac{1}{q}$。

证明：$\frac{n}{q}-\frac{n}{pq}=\left(n-\frac{n}{p}\right)\frac{1}{q}$。证毕

由推论 1 知，筛除 p 的倍数含量之后，欲筛除剩余部分中 q 的倍数含量，只需对剩余部分 $\left(n-\frac{n}{p}\right)$，再筛除 $\frac{1}{q}$，即可。

推论 2 [2]：在 $A=\{a_i\}$ 中的 n 个数中，依次筛除 $p_j\left(j=1,2,3,\cdots,k\right)$ 的倍数含量后，在非 p_j 的倍数含量中，p_{k+1} 的倍数含量占有 $\frac{1}{p_{k+1}}$，非 p_{k+1} 的倍数含量占有$(1-\frac{1}{p_{k+1}})$

证明：用数学归纳法证明

(I) 当 $j=1$ 时

在 $A=\{a_i\}$ 中，根据倍数含量的定义，p_1，p_2，p_1p_2 的倍数含量分别为 $\frac{n}{p_1}$，$\frac{n}{p_2}$，$\frac{n}{p_1p_2}$。

根据引理 1 及推论 1，易得

$$\frac{n}{p_2}-\frac{n}{p_1}\cdot\frac{1}{p_2}=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdot\frac{1}{p_2}。$$

$$n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)-n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdot\frac{1}{p_2}=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)。$$

则命题成立。

(II) 假设当 $j=k-1$ 时命题成立

即在 $n\cdot\prod_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{1}{p_j}\right)$ 中 p_k 的倍数含量为

$$\frac{1}{p_k}\cdot n\prod_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{1}{p_j}\right) \tag{1}$$

非 p_k 的倍数含量为：

$$\left(1-\frac{1}{p_k}\right)\cdot n\cdot\prod_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{1}{p_j}\right)=n\cdot\prod_{j=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_j}\right) \tag{2}$$

下边证明当 $j=(k-1)+1=k$ 时，命题成立。
由 p 的任意性及假设可知：
$p_k, p_{k+1}, p_k p_{k+1}$ 在 $n\cdot\prod_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{1}{p_j}\right)$ 中的倍数含量分别是：

$$\frac{1}{p_k}\cdot n\cdot\prod_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{1}{p_j}\right)$$

$$\frac{1}{p_{k+1}}\cdot n\cdot\prod_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{1}{p_j}\right) \tag{3}$$

$$\frac{1}{p_k p_{k+1}}\cdot n\cdot\prod_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{1}{p_j}\right) \tag{4}$$

(3)~(4)

$$\begin{aligned}&n\cdot\frac{1}{p_{k+1}}\cdot\prod_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{1}{p_j}\right)-\frac{1}{p_k\cdot p_{k+1}}\cdot n\cdot\prod_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{1}{p_j}\right)\\&=\frac{1}{p_{k+1}}\cdot n\cdot\prod_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{1}{p_j}\right)\cdot\left[1-\frac{1}{p_k}\right]\\&=\frac{1}{p_{k+1}}\cdot n\cdot\prod_{j=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_j}\right)\end{aligned} \tag{5}$$

(2)~(5)

$$\begin{aligned}&n\cdot\prod_{j=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_j}\right)-\frac{1}{p_{k+1}}\cdot n\cdot\prod_{j=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_j}\right)\\&=n\cdot\prod_{j=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_j}\right)\cdot\left[1-\frac{1}{p_{k+1}}\right]\\&=n\cdot\prod_{j=1}^{k+1}\left(1-\frac{1}{p_j}\right)\end{aligned}$$

综合(I) (II)，命题成立。

我们把推论 2 中，按照 p_{k+1} 在 $p_j\,(j=1,2,3,\cdots,k)$ 的倍数含量占有比例规律，依次递筛 p_{k+1} 的倍数含量，求出非 p_j 倍数含量的方法，叫做倍数含量简单比例单筛法。

例 1：带有 1 至 210 编号 210 名同学站在操场上，带操
老师第一次下口令，让编号是 2 的倍数的同学坐下，
老师第二次下口令，让编号是 3 的倍数的同学坐下，
老师第三次下口令，让编号是 5 的倍数的同学坐下，
老师第四次下口令，让编号是 7 的倍数的同学坐下，
问最后，还有几位同学站着？

解：因为 210 是 2，3，5，7 的公倍数，2，3，5，7 的倍数含量与倍数个数相等，用推论 2 计算，得

$$210\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)=48$$

3. 加强比例单筛法

3.1. 覆盖定理[2]

引理 2(覆盖定理)：设 $p_i\,(i\ge 3)$ 为小于 $\sqrt{n}$ 的素数，即使间隔最小，即 p_i, p_{i-1} 为孪生素数时，仍有

$$\frac{n}{p_{i-1}} > \left[\frac{n}{p_i}+1\right]$$

证明：因为 $p_{i-1} \le P_i - 2$ (p_i, p_{i-1} 为孪生素数时，等号取得)

$$\frac{n}{p_{i-1}} - \frac{n}{p_i} \ge \frac{n}{p_i - 2} - \frac{n}{p_i} = \frac{2n}{p_i\left(p_i-2\right)} > 1 \quad \left(p_i - 2 < p_i < \sqrt{n}\right)$$

所以 $\frac{n}{p_{i-1}} > \frac{n}{p_i} + 1 \ge \left[\frac{n}{p_i}+1\right]$。证毕

3.2. 加强方法

在筛除 2，3 的倍数时，我们不妨用 $\frac{4}{7}$ 和 $\frac{13}{36}$ 代替原来的 2，3 的倍数(含量)占有比例 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$，在筛除 $p_i\,(i\ge 3)$ 的倍数时，依据**引理 2(覆盖定理)**按照比例 $\frac{1}{p_{i-1}}$ 筛除，这种筛除方法我们称之为倍数含量加强比例单筛法。

$$n\left(1-\frac{4}{7}\right)\left(1-\frac{13}{36}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_{k-1}}\right),\left(p_{k-1}, p_k \le \sqrt{2n}\text{为最大素数}\right)$$

4. 等差项同数列及其性质[2]

大偶数 $2n$ 表为两数和的式子共有 n 种形式：

$$2n \;=1+\left(2n-1\right)=2+\left(2n-2\right)=3+\left(2n-3\right)=n+n$$

前项集合： $A=\{a_i\}=\{1,2,3,4,5,\cdots,n\}$，

后项集合： $B=\{b_i\}=\{2n-1,2n-2,2n-3,\cdots,n\}$，

要是把前项集合 A，后项集合 B 中 $p_i\,(1\le i\le k$， $p_k \le \sqrt{2n}$ 的最大素数)倍数的式子都筛除干净，若还有剩余的式子，就说明**大偶数能表为两素数和的式子。**

问题是，筛去 A 中的一个素数的倍数(如 3 的倍数，是一个数列)，要带走 B 中的一个数列，这两个数列，都是等差数列，项数相同。下面我们看它们之间有什么性质。

4.1. 等差项同数列

定义 2：如果两个正整数等差数列,项数相同，公差相等，则称这两个数列为等差项同数列。

定义 3：设 $\{a_k\}$ 长度为 n 的，公差为 d 的等差数列，若 $(p,d)=1$，则称 $\frac{n}{p}$ 为 p 在数列 $\{a_k\}$ 中的倍数含量，$\frac{1}{p}$ 为其占有比例。

引理 3：在长度为 n 的，公差为 d 的等差数列 $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ 中，若自然数 p 满足 $(p,d)=1$，则 $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ 中 p 的倍数个数有 $\left[\frac{n}{p}\right]$ 或 $\left[\frac{n}{p}+1\right]$ 个。

证明：只需证明当 $n=p$ 时 $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ 中有且只有一个 p 的倍数。

设数列为 $a_1,a_1+d,\cdots,a_1+(p-1)d$，则它们中任意两个元素对 p 的余数不相同，若不然设 a_i,a_j $(0\le i,j\le p-1)$ 关于 p 同余，从而可得 $p\,|\,a_i-a_j$，即 $p\,|\,(i-j)d$，这是不可能的。所以 $a_1,a_1+d,\cdots,a_1+(p-1)d$ 关于 p 互不同余,从而其中有且只有一个 p 的倍数。证毕

4.2. 等差项同数列的性质

引理 4 (等差项同数列的性质)：若两数列为等差项同数列，则自然数 $q\ (p,d)=1$ 在两数列中的倍数含量相等。即 $q\ (p,d)=1$ 的倍数含量在两个数列中所占比例相等。

证明：由引理 3 显然。

引理 4 说明，明处是筛去 A 中的一个素数 p 的倍数(如 3 的倍数，是一个数列)，带走 B 中的一个数列，即带走了 B 中的 $q(p,d)=1$ 的部分(与筛去 A 中同样多少的)倍数含量。再进行下步筛去 $q(p,d)=1$ 的倍数含量时，只对剩余部分筛，就可以了。

主筛与从筛

在通过筛合数而筛式子的过程中，称筛除 $A(B)$ 中素数 p 的倍数含量的过程为主筛，称带走的 $B(A)$ 中的数的过程，叫做对 $B(A)$ 的从筛。

由引理 1，引理 4 可知，筛除 $A(B)$ 中的素数 p 的倍数含量时，不仅按引理 1 (重叠比例定理)暗筛 $A(B)$ 中的 $q(p,q)=1$ 的部分倍数含量，而且又按照引理 4 (**等差项同数列的性质**)从筛了 $B(A)$ 中的 $q(p,q)=1$ 的部分倍数含量。

5. 两筛法

5.1. 简单比例两筛法

大偶数 $2n$ 表两数和的式子共有 n 种，

$$2n=1+(2n-1)=2+(2n-2)=3+(2n-3)+\cdots+n+n,$$

前项集合：$A=\{a_i\}=\{1,2,3,4,5,\cdots,n\}$，

后项集合：$B=\{b_i\}=\{2n-1,2n-2,2n-3,\cdots,n\}$，

两边(前项 A，后项 B)同时按引理 1 的推论 2 及定理 4，筛除 A，B 中 $2,3,\cdots,p_k$ (p_k 为小于等于 $\sqrt{2n}$ 最大素数)的倍数含量，两筛过程：其中 2 的倍数成对出现，所以只要筛除 A 中 2 的倍数就把 B 中 2 的倍数带走了。这样筛 2 的倍数含量时，只要一次按 2 的倍数含量的比例 $\frac{1}{2}$ 进行筛除即可(其余的是 $2n$ 倍数的，也都按照两次筛，作为加强了)得

$$n\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}-\frac{1}{7}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}-\frac{1}{p_k}\right)=n\cdot\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{5}{7}\times\cdots\times\frac{p_k-2}{p_k}$$

5.2. 加强比例两筛法:

依据引理 1 的推论 2，引理 2，引理 4，两边(前项 A，后项 B)**同时**加强依次筛除 A，B 中 $2,3,\cdots,p_k$ (p_k 为小于等于 $\sqrt{2n}$ 最大素数)的倍数含量，筛除 2，3 的倍数时，用 $\frac{4}{7}$ 和 $\frac{13}{36}$ 代替原来的 2，3 的倍数(含量)占有比例 $\frac{1}{2},\frac{1}{3}$，在筛除 $p_i\,(i\ge 3)$ 的倍数时，按照比例 $\frac{1}{p_{i-1}}$ 筛除，这种筛除方法我们称之为**加强比例两筛法，简称两筛法**。

易得 $n\cdot\left(1-\frac{4}{7}\right)\left(1-\frac{26}{36}\right)\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{2}{5}\right)\left(1-\frac{2}{7}\right)\cdots\left(1-\frac{2}{p_{k-1}}\right)$

($p_k\le\sqrt{2n}$ 的最大素数)

由此易得，第一个算式：

$$\frac{3}{7}n\times\frac{5}{18}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{5}{7}\times\frac{9}{11}\times\cdots\times\frac{p_{k-1}-2}{p_{k-1}}\ (\ p_k\le\sqrt{2n}\ \text{的最大素数})\ (一)$$

5.3. 加强比例两筛法的另一应用：

小于 n 的差为 2 的数对，共有 $n-2$ 种形式：

$$2=3-1=4-2=5-3=6-4=\cdots=n-(n-2)$$

前项集合：$C=\{3,4,5,6,\cdots,n\}$，

后项集合：$D=\{1,2,3,4,\cdots,n-2\}$。

两边(前项 C，后项 D)同时加强筛除 C，D 中 $2,3,\cdots,p_k$ ($p_k\le\sqrt{n}$ 的最大素数)的倍数含量，筛除 2，3 的倍数时，用 $\frac{4}{7}$ 和 $\frac{13}{36}$ 代替原来的 2，3 的倍数(含量)占有比例 $\frac{1}{2},\frac{1}{3}$，在筛除 $p_i\,(i\ge3)$ 的倍数时，按照比例 $\frac{1}{p_{i-1}}$ 筛除，则最后至少剩下

$$(n-2)\cdot\left(1-\frac{4}{7}\right)\left(1-\frac{26}{36}\right)\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{2}{5}\right)\left(1-\frac{2}{7}\right)\cdots\left(1-\frac{2}{p_{k-1}}\right)$$

($p_k\le\sqrt{n}$ 最大素数)。

$\ge(n-2)\left[\frac{3}{7}\times\frac{5}{18}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{5}{7}\times\frac{9}{11}\times\cdots\times\frac{p_{k-1}-2}{p_{k-1}}\right]$($p_k\le\sqrt{n}$ 的最大素数)个式子。

所以，小于 n 的相差为 2 的素数对

$$n\left[\frac{3}{7}\times\frac{5}{18}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{5}{7}\times\frac{9}{11}\times\cdots\times\frac{p_{k-1}-2}{p_{k-1}}\right]-2\left[\frac{3}{7}\times\frac{5}{18}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{5}{7}\times\frac{9}{11}\times\cdots\times\frac{p_{k-1}-2}{p_{k-1}}\right]$$
$$=n\left[\frac{3}{7}\times\frac{5}{18}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{5}{7}\times\frac{9}{11}\times\cdots\times\frac{p_{k-1}-2}{p_{k-1}}\right]-\left[\frac{6}{7}\times\frac{5}{18}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{5}{7}\times\frac{9}{11}\times\cdots\times\frac{p_{k-1}-2}{p_{k-1}}\right]$$

(后边中括号中的每一项都小于 1，则乘积小于 1)

$$>n\left[\frac{3}{7}\times\frac{5}{18}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{5}{7}\times\frac{9}{11}\times\cdots\times\frac{p_{k-1}-2}{p_{k-1}}\right]-1$$

去掉中括号，-1 暂且忽略不计，易得，第二个算式：

$$\frac{3}{7}n\times\frac{5}{18}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{5}{7}\times\frac{9}{11}\times\cdots\times\frac{p_{k-1}-2}{p_{k-1}}\quad(\ p_k\le\sqrt{n}\ \text{最大素数})\ (二)$$

5. 恒等式 $\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=1$ 的妙用

恒等式 $\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=1$，看似简单，一个巧妙的应用，却解决了以上两个算式由有限到无限的问题。

算式(一): $\frac{3}{7}n\times\frac{5}{18}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{5}{7}\times\frac{9}{11}\times\cdots\times\frac{p_{k-1}-2}{p_{k-1}}$ 的值(其中 $p_{k-1}<p_k$，$p_k<\sqrt{2n}$ 的最大素数)，在 $n>421$ 时，其值永远大于 2。

证明：取 $b=q$， $a=q-2$，(q 为合数)，巧用 $\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=1$，

$$G=\frac{3}{7}n\times\frac{5}{18}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{5}{7}\times\frac{9}{11}\times\cdots\times\frac{p_{k-1}-2}{p_{k-1}}$$
$$=\frac{3}{7}n\times\frac{5}{18}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{6}\times\frac{5}{7}\times\frac{6}{8}\times\frac{7}{9}\times\frac{8}{10}\times\frac{9}{11}\times\frac{10}{12}\times\cdots$$
$$\times\frac{q_m-1}{q_m}\times\frac{p_{k-1}-2}{p_{k-1}}\times\frac{4}{2}\times\frac{6}{4}\times\frac{8}{6}\times\frac{9}{7}\times\frac{10}{8}\times\frac{12}{10}\times\cdots\times\frac{q_m}{q_m-2}$$

(其中 $q_m=p_{k-1}-1$，是小于 p_{k-1} 的最大合数)，

$$=\frac{3}{7}n\times\frac{5}{18}\times 2\times\frac{1}{p_{k-1}-1}\times\frac{1}{p_{k-1}}\times\frac{4}{2}\times\frac{6}{4}\times\frac{8}{6}\times\frac{9}{7}\times\frac{10}{8}\times\frac{12}{10}\times\cdots\times\frac{q_m}{q_m-2}$$

$\because p_{k-1}-1<p_{k-1}<p_k<\sqrt{2n}$，所以 $\frac{2n}{(p_{k-1}-1)p_{k-1}}>1$，用 1 代替 $\frac{2n}{(p_{k-1}-1)p_{k-1}}$，

从而 $G>\frac{3}{7}\times\frac{5}{18}\times\frac{4}{2}\times\frac{6}{4}\times\frac{8}{6}\times\frac{9}{7}\times\frac{10}{8}\times\frac{12}{10}\times\cdots\times\frac{q_m}{q_m-2}$

经过计算易知，计算到 $\frac{22}{20}$ 时，其值是 2.1471949104 后边的每项 $\frac{q}{q-2}$ 都大于 1。

所以取 $p_{k-1}=23$，为 $p_k=29$，$29^2=841$。当 $2n>842$，$n>421$时，其值永远大于 2.即 $n>421$时，$G>2$，问题得证。

即大偶数都能表为两素数之和。

算式(二)： $L=\frac{3}{7}n\times\frac{5}{18}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{5}{7}\times\frac{9}{11}\times\frac{11}{13}\times\cdots\times\frac{p_{k-1}-2}{p_{k-1}}$

(其中 $p_{k-1}<p_k$， $p_k<\sqrt{n}$ 的最大素数)，求证：在 n 是无穷大时，L 的值也一定是无穷大的.

证明：取 $b=q$， $a=q-2$，(q 为合数)，巧用 $\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=1$。

$$L=\frac{3}{7}n\times\frac{5}{18}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{5}{7}\times\frac{9}{11}\times\frac{11}{13}\times\cdots\times\frac{p_{k-1}-2}{p_{k-1}}$$

(其中 $p_{k-1}<p_k$， $p_k<\sqrt{n}$ 的最大素数)

$$=\frac{3}{7}n\times\frac{5}{18}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{6}\times\frac{5}{7}\times\frac{6}{8}\times\frac{7}{9}\times\frac{8}{10}\times\frac{9}{11}\times\frac{10}{12}\times\frac{11}{13}\times\cdots\times\frac{q_m-2}{q_m}\times\frac{p_{k-1}-2}{p_{k-1}}$$
$$\times\frac{4}{2}\times\frac{6}{4}\times\frac{8}{6}\times\frac{9}{7}\times\frac{10}{8}\times\frac{12}{10}\times\cdots\times\frac{q_m}{q_m-2}$$

(其中 q_m 为小于 p_{k-1} 的最大合数，即 $q_m=p_{k-1}-1$)

$$=\frac{3}{7}n\times\frac{5}{18}\times 2\times\frac{1}{p_{k-1}-1}\times\frac{1}{p_{k-1}}\times\frac{4}{2}\times\frac{6}{4}\times\frac{8}{6}\times\frac{9}{7}\times\frac{10}{8}\times\frac{12}{10}\times\cdots\times\frac{q_m}{q_m-2}$$

因为 $p_{k-1}-1<p_{k-1}<p_k<\sqrt{n}$，所以 $\frac{n}{(p_{k-1}-1)p_{k-1}}>1$，用 1 代替 $\frac{n}{(p_{k-1}-1)p_{k-1}}$

$\therefore L>\frac{3}{7}\times\frac{10}{18}\times\frac{4}{2}\times\frac{6}{4}\times\frac{8}{6}\times\frac{9}{7}\times\frac{10}{8}\times\frac{12}{10}\times\cdots\times\frac{q_m}{q_m-2}$ (二)

又(二)中的 q 为偶合数时的，$\frac{q}{q-2}$ 式的连乘积

$$\frac{4}{2}\times\frac{6}{4}\times\frac{8}{6}\times\frac{12}{10}\times\cdots\times\frac{2i+2}{2i}=i+1$$

所以，$L>\frac{3}{7}\times\frac{10}{18}\times(i+1)\times\frac{9}{7}\times\frac{15}{13}\times\frac{21}{19}\times\cdots$(二)

在(二)式中 $\frac{3}{7}\times\frac{10}{18}$ 为有限数，$\frac{3}{7}$，$\frac{15}{13}$，$\frac{21}{19}$，……等又都大于 1，

p_k 是无穷大的，小于 p_{k-1} 的最大偶合数也是无穷大的，那么 $i+1$ 也是无穷大的。

所以其积 $\frac{3}{7}\times\frac{10}{18}\times(i+1)\times\frac{9}{7}\times\frac{15}{13}\times\frac{19}{17}\times\cdots$，也一定是无穷大的，$-1$ 也就真的可忽略不计了。

即：差为 2 的素数对有无穷多。

类似的，易证，差为 4 的素数对也有无穷多。

参考文献 (References)

[1] 鲁思顺. 加强含量筛法与哥德巴赫猜想探索[J]. 延安教育学院学报, 2001(2): 48-50.

[2] 鲁思顺. 加强比例的一种应用[J]. 山东大学学报(理科版), 2012(S1): 9-13.