

Complete Mixability and Minimum Value-at-Risk of Sum of Dependent Variable

Qing Hu, Yuxu Feng

School of Science, Beijing Technology and Business University, Beijing
Email: huq_ing@sina.com, 799356898@qq.com

Received: Oct. 8th, 2017; accepted: Oct. 23rd, 2017; published: Oct. 30th, 2017

Abstract

In general, the risk is in forms of portfolio in finance or in forms of the sum of insurance policy in insurance. And they are generally not independent and we do not know the correlation, and we call this correlation copula, of them. So we cannot research that using the method of investigating only one risk or regard random variables as independent. We need to consider the correlation of n random variables with given identical marginal distributions. In the quantitative risk management, the research about the sum of n random variables under uncertain correlation, especially focuses on the risk measure of the sum of n random variables. In this paper, we investigate $\text{VaR}_\alpha(S)$ (Value-at-Risk) and the copula that it can minimize the $\text{VaR}_\alpha(S)$ in a confident level α . Then we get the copula of minimum of $\text{VaR}_\alpha(S)$ under monotone density. And this copula is that n random variables are complete mixable. Finally, this paper gets the minimum and maximum of $\text{VaR}_\alpha(S)$ at the situation of two dimensions. This result is also got under complete mixability.

Keywords

$\text{VaR}_\alpha(S)$, Dependent Structure, Completely Mixable, Dependent Risk

相依风险下的完全混合与随机变量和的最小 Value-at-Risk

胡青, 冯宇旭

北京工商大学理学院, 北京
Email: huq_ing@sina.com, 799356898@qq.com

收稿日期: 2017年10月8日; 录用日期: 2017年10月23日; 发布日期: 2017年10月30日

摘要

由于在金融行业中风险一般是以投资组合的形式或者在保险行业是以保单加和的形式存在, 并且他们之间并不是独立的, 并且相依结构大部分都是未知的, 我们不能再用单一风险或者随机变量之间相互独立的方法进行研究, 我们需要考虑他们之间的相依结构。在量化风险度量领域, 对相依关系不确定情况下风险加和的研究很多, 其中主要集中在加和的风险度量。本文主要针对在给定相同的边际分布的情况下, 对 $\text{VaR}_\alpha(S)$ (Value-at-Risk) 风险度量的相依结构进行了研究, 从而得到了在密度单调情形下使得风险加和的 $\text{VaR}_\alpha(S)$ 最小的相依结构, 这种相依结构就是在随机变量完全混合时的相依结构, 最后本文得到了特殊情况, 即两个随机变量完全混合的相依结构及 $\text{VaR}_\alpha(S)$ 的最大值和最小值。

关键词

$\text{VaR}_\alpha(S)$, 相依结构, 完全混合, 相依风险

Copyright © 2017 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

当今社会, 风险影响着经济生活的方方面面, 大到影响国家宏观决策与经济发展, 小到决定一个公司的生死存亡。无论是在银行, 保险公司还是在其他的商业公司中, 风险的存在形式多种多样, 多个风险之间的相依关系也是错综复杂。因此, 对风险实行有效的管理对公司的发展有重要的意义。风险管理的目标就是希望将风险固定下来, 及时拿出相应的准备金来应当对风险, 若风险度量不准确, 则会极大的影响公司的稳定性。

在实际生活中, 尤其是在金融行业, 风险并不是单独存在的, 往往是以多个风险加和的形式存在。此时风险的边缘分布一般已知, 当 n 个风险的分布相互独立时, 处理是比较方便的, 但在实际中风险之间并非相互独立, 并且它们之间的关系, 我们也一无所知。那么在风险之间关系未知的情况下, 如何使得风险的加和风险最小呢?

2. 风险度量

在研究风险之前, 首先我们应该先说明如何度量风险。度量风险的测度有很多, 例如: VaR, ES, TVaR, CTE 等[1], 它们的定义如下:

定义 2.1. VaR (Value-at-Risk) [2] [3]对于风险 S , 在(置信)水平 p 下的 VaR 定义为:

$$\text{VaR}_\alpha(S) = F_S^{-1}(\alpha) = \inf \{s \in R: F_S(s) \geq \alpha\}$$

因此, VaR 恰好是在 p 点计算的 S 的分布函数的反函数。

定义 2.2. ES (expected shortfall) [4]对于风险 S , 在水平 $p \in (0,1)$ 时的期望缺口(ES)定义为:

$$\text{ES}_\alpha = E \left[(S - \text{VaR}_\alpha(S))_+ \right]$$

定义 2.3. VaR (Tail-Value-at-risk)对于风险 S , 在水平 $p \in (0,1)$ 时的 TVaR 定义为:

$$\text{TVaR}_\alpha(S) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 \text{VaR}(S, t) dt$$

从上述表达式可以看出, TVaR 恰好是 S 从 p 开始的 VaR 的算术平均。

定义 2.4. 条件尾期望(Conditional Tail Expectation) (CTE)对于风险 S , 在水平 $p \in (0,1)$ 时的条件尾期望定义为:

$$\text{CTE}_\alpha(S) = E[S | S > \text{VaR}_\alpha(S)]$$

因此, CTE 为“在最坏的 $100(1-\alpha)\%$ 情形下的平均损失”。

在众多的风险度量方法中较为常用的为 VaR 和 ES, 因为 VaR 有比较直观的含义, 它相当于是随机变量的分位数, 也就是说损失随机变量大于其 α 分位数最大为 $(1-\alpha)$ 的概率, 而且 VaR 是可以回测的。ES 风险度量是尾部 VaR 的平均, 它一般比 VaR 的值偏大, 所以它是一个比 VaR 更为保守的风险测度, 而且它是一个次可加的风险度量, 但由于 ES 计算的是 VaR 的尾部平均, 因此 ES 的计算与 VaR 相比更加困难, 甚至是不可能的。近二十年间对 VaR 的研究比 ES 更多, 而且对 VaR 的统计估计更为成熟, 银行、保险公司等金融机构也更多的用 VaR 作为其风险度量。本文将针对其中的一个风险度量, 即 VaR 进行研究。VaR 早在 1993 年由 G30 集团在研究衍生品基础上发表《衍生产品的实践和规则》提出, 后来在风险管理方面得到了广泛应用[5]。

3. 完全混合及相依结构

在问题开始之前, 首先给出相关定义。

3.1. 完全混合

n 是一个正整数, 对于一个 R 上的概率分布 F , 如果存在 n 个随机变量 $X_1, \dots, X_n \sim F$ 使得 $X_1 + \dots + X_n$ 是一个常数, 则称分布 F 是 n 阶可完全混合的(或简称为 n 阶可混合)。其中 (X_1, \dots, X_n) 的联合分布成为一个 n 阶可混合结构[6], (n-complete-mix)。

Sklar (1959)指出可以将随机变量的联合分布分解成边际分布和它们之间的相依结构(copula), 而变量之间的相依结构可以用 copula 来表达[7], 下面给出 copula 函数的定义。

假设 $X = (X_1, \dots, X_n)$ 联合分布函数 F_X , 其边际分布函数分别为: F_{X_1}, \dots, F_{X_n} , F_{X_1}, \dots, F_{X_n} 均服从 $[0,1]$ 上的均匀分布, 则 $\{F_{X_1}, \dots, F_{X_n}\}$ 的联合分布就称为 copula。

根据定义

$$\begin{aligned} C_Y &= P(F_{X_1} \leq \mu_1, \dots, F_{X_n} \leq \mu_n) \\ &= P(X_1 \leq F_{X_1}^{-1}(\mu_1), \dots, X_n \leq F_{X_n}^{-1}(\mu_n)) \\ &= F_Y(F_{X_1}^{-1}(\mu_1), \dots, F_{X_n}^{-1}(\mu_n)) \end{aligned}$$

令 $\mu_j = F_X(x_j), j=1, \dots, n$, 我们可以得到

$$F_X(x_1, \dots, x_n) = C_X(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n))$$

3.2. 同单调与反单调

3.2.1. 同单调

假设随机变量 (X, Y) 是概率空间 $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ 上的随机变量, 如果对任意的 $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$, 有 $(X(\omega_1) - X(\omega_2))(Y(\omega_1) - Y(\omega_2)) \geq 0$, 则称二维随机变量 X, Y 同单调。

3.2.2. 反单调

二位随机变量 (X, Y) 为反单调的, 如果 $(X, -Y)$ 是同单调的。

3.3. 完全混合的性质和例子

在给出上述的定义后, 我们给出完全混合的性质及几个完全混合的例子。

3.3.1. 完全混合的性质

1) 完全混合仿射变换下的不变性

假设随机变量 $X \sim F$ 的分布是 $n(n \geq 2)$ 阶可混合的, 那么对于任意常数 a, b , 随机变量 $aF + b$ 的分布也是 $n(n \geq 2)$ 阶可混合的。

2) 完全混合分布角度的加性

假设随机变量 $X \sim F$ 和 $Y \sim G$, F 和 G 均可以 $n(n \geq 2)$ 阶混合, 并且拥有一致的中心 μ , 则对于任意的 λ , 有 $\lambda F + (1 - \lambda)G$ 是 n 阶可混合的, 并且拥有一致的中心 μ 。

3) 完全混合指数角度的加性

若随机变量 $X \sim F$ 的分布是 n 阶可混合的, 也是 k 阶可混合的, 那么对于任意常数 a, b , F 也是 $(an + bk)$ 阶可混合的。

4) 完全混合的收敛性[8]

假设分布 F 和 F_i 都是紧集 $S \subset R$ 上的分布, F_i 都是 n 阶可混合的, $i = 1, 2, \dots$, 并且当 $k \rightarrow \infty$ 时, F_k 依分布收敛于 F , 则 F 一定是 n 阶可混合的。

3.3.2. 完全混合的例子

1) 均匀分布的 $n(n \geq 2)$ 阶可混合性

假设随机变量 X 服从 $U[a, b]$ 的均匀分布, 根据仿射变换的性质, 我们可以将 X 变换为 $U[0, 1]$ 的均匀分布, 所以不失一般性, 仅讨论 $U[0, 1]$ 是否可以 n 阶可混合即可。

显然, 对称分布一定是 2 阶可混合的, 假设 $Y \sim F$, 一定存在某常数 b , 使得 $b - Y \sim F$, 此时 $Y + b - Y = b$, 说明 Y 是 2 阶可混合的。因为 $U[0, 1]$ 也是对称分布, 所以 $U[0, 1]$ 也是 2 阶可混合的, 所以 $U[0, 1]$ 所有偶数阶均是可混合的。接下来, 只需证明 $U[0, 1]$ 是奇数阶可混合的。

首先我们考虑是否能够三阶可混合。考虑 $X_1 \sim U[0, 1]$, 当 $0 \leq X_1 \leq \frac{1}{2}$, $X_2 = X_1 + \frac{1}{2}$, $X_3 = 1 - 2X_1$; 当 $\frac{1}{2} \leq X_1 \leq 1$ 时, 令 $X_2 = X_1 - \frac{1}{2}$, $X_3 = 2 - 2X_1$, 此时 X_1, X_2, X_3 均服从 $U[0, 1]$ 的均匀分布, $X_1 + X_2 + X_3 = \frac{3}{2}$ a.s., 因此, $U[0, 1]$ 是三阶可混合的, 又因为它是 2 阶可混合的, 所有大于 1 的正整数均可由 2, 3 的组合进行构造, 所以, $U[0, 1]$ 是可以 n 阶可混合的, 由此, 根据仿射变换, $U[a, b]$ 也是可以 n 阶可混合的。

2) 正态分布的 $n(n \geq 2)$ 阶可混合

单峰对称分布可表示为一族均匀分布的凸组合, 而由(1)可知, 所有均匀分布均是可 n 阶混合的, 根据完全混合分布角度的可加性, 单峰对称分布均可以 n 阶混合。正态分布也属于单峰对称分布, 所以正态分布是 n 阶可混合的。

除此之外二项分布也可以完全混合, 在这里不再详述, 还有一些分布永远无法混合, 比如指数分布、几何分布、负二项分布、泊松分布等, 因为这些分布均为一端有界而另一端无界, 由于此时重心靠近一端, 而另一端的极值无法永远无法与另一端混合形成混合结构, 因此这些分布用于无法完全混合。

接下来我们从完全混合问题的经典问题入手, 即 $X_1, \dots, X_n \sim F$, 相依结构未知, 如何使得下式最小:

$$\min \text{Var}(X_1 + \dots + X_n)$$

在两个随机变量($n = 2$)时比较好考虑, 当两个随机变量反相关(当一个随机变量增大时, 而另一个随机变量减小)时, 两随机变量加和为常数, 此时两随机变量加和的方差达到最小, 也就是构成了完全混合结构。但若 $n(n \geq 3)$ 个随机变量, 则无法使得随机变量之间两两反相关, 这类似于负负得正, 那如何设计出一个相关结构使得方差最小呢? 最理想的情况就是当 n 个随机变量加和为常数, 即形成混合结构时, 方差达到最小, 为 0。完全混合能够使得各随机变量间达到较好的反相关性, 因此在考虑下述问题时, 我们首先考虑完全混合。

4. 风险加和的 VaR 最小值问题

4.1. 问题相关定义和引理

4.1.1. 质量函数

质量函数是每个点上的质量, 这类似于密度函数, 与密度函数唯一不同的是质量函数不要求其和为 1。

4.1.2. 引理

S_N^d 上的一个质量函数 A 满足质量递减, 且重心为 0, 则 A 一定是 $d+1$ 阶可混合的。其中 $S_N^d = \{-N, \dots, -1, 0, 1, \dots, dN\}$ 表示的是质量函数 A 的点集, $d = n-1$, S_N^d 中有 $(d+1)N+1$ 个点。

引理的证明见文献[8]。

4.1.3. 推论

假设分布 P 概率密度函数 $p(x)$ 在 $[a, b]$ 是单调的, 并且在 $[a, b]$ 之外的地方 $p(x) = 0$, 如果 $p(x)$ 是单调递增的, 并且有 $E(X) \leq b - \frac{1}{n}(b-a)$; 如果 $p(x)$ 是递减的, 并且有 $E(X) \geq a + \frac{1}{n}(b-a)$, 则 P 对于任意大于等于 n 可混合。

4.1.4 $\min \text{VaR}_\alpha(S)$ 或 $\max \text{VaR}_\alpha(S)$

$X_1, \dots, X_n \sim \tilde{F}$ (n 为正整数), 密度函数为 $p(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上, 在区间 $[0, 1]$ 以外有 $p(x) = 0$, X_1, \dots, X_n 相依结构未知, $S = X_1 + \dots + X_n$, 在置信度为 α 时, 能否使得 $\text{VaR}_\alpha(S)$ 最小或最大, 使得下式成立的相依结构是什么?

$$\min \text{VaR}_\alpha(S) \text{ 或 } \max \text{VaR}_\alpha(S)$$

因为我们考虑的是 VaR, 只需要将区间 $[0, \alpha]$ 上的值进行搭配, 而不需要考虑区间 $[\alpha, 1]$ 上的值, 所以后续讨论我们只针对区间 $[0, \alpha]$ 进行讨论, 并记此区间上的随机变量的分布函数为 F (具体只需进行归一化即可), 因此在新的分布下, 上述问题等价于 $\min \text{VaR}_1(S)$ 。

我们首先考虑 $p(x)$ 单调递减, 当 $n = 1, 2$ 时, 分布 F 的密度函数 $p(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上单调递减, 其期望 $\mu(F) \leq \frac{1}{2}$ 。当 $n = 1$ 时满足条件的分布 F 是不存在的。当 $n = 2$ 时, 满足条件的分布只有均匀分布 $F = U[0, 1]$, 根据上述完全混合的例子中可以看出, 这是 2 阶可混合的。

当 $n \geq 3$ 时, 首先令 $S_N = \{-N/N, (-N+1)/N, \dots, (dN-1)/N, dN/N\}$, 在 $[-1, d]$ 上 $Y \sim F$, 其均值为 0, 密度函数单调递减。令 \bar{F}_N 为 $[NY]/N$ 的分布函数, 其中 $[NY]$ 为 NY 的整数部分, $\{NY\}$ 表示 NY 的小数部分, \hat{F}_N 为 S_N 上的离散均匀分布的分布函数。由于

$$\begin{aligned} \mu(\bar{F}_N) &= E([NY]/N) = E((NY - \{NY\})/N) = E(Y - \{NY\}/N) \\ &= E(Y) - E(\{NY\}/N) = -E(\{NY\}/N) \end{aligned}$$

且 $\frac{\{NY\}}{N} \in \left[-\frac{1}{N}, 0\right]$, 所以其期望也在 $\left[-\frac{1}{N}, 0\right]$ 之间, 因此 $\mu(\bar{F}_N) \in \left[-\frac{1}{N}, 0\right]$ 。

由于 \hat{F}_N 服从 S_N 上的离散均匀分布, 因此其均值为:

$$\mu(\hat{F}_N) = \frac{d-1}{2}$$

因为 $d \geq 2$, 即 $n \geq 3$, 所以上式 $\mu(\hat{F}_N) \geq \frac{1}{2}$ 。

接下来, 我们想寻找一个 $0 \leq \lambda_N \leq \frac{2}{N}$, 构造一个 \hat{F}_N 和 \bar{F}_N 的组合, 使组合的期望为 0, 取

$$\lambda_N = \frac{-\mu(\bar{F}_N)}{\frac{d-1}{2} - \mu(\bar{F}_N)}$$

构造函数 $F_N = (1 - \lambda_N)\bar{F}_N + \lambda_N\hat{F}_N$, 则 $\mu(F_N) = 0$, 且 F_N 在 S_N 上递减, 因而 F_N 可 $d+1$ 阶可混合。

当 $N \rightarrow \infty$ 时, 根据完全混合的收敛性知, F_N 依分布收敛于 F , 且 F 是 $d+1$ 阶可混合的。

根据完全混合的仿射不变性, 我们可以得到当密度函数 $p(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上单调递减, 在区间 $[0, 1]$ 以外有 $p(x) = 0$, 且 $\mu(F) \geq \frac{1}{n}$ 时 F 可 n 阶完全混合。

由于当 X 的密度单调递增时, $-X$ 的密度则单调递减, 若 X 可完全混合, 由完全混合仿射不变性可知, $-X$ 也可以完全混合, 故密度函数单调递增也可完全混合。

当 $\mu(F) < \frac{1}{n}$ 时, 无法构成完全混合结构, 我们考虑以下的结构:

当均值条件不满足时, 这说明中心偏左, 最大值即使用最小的来进行调和也无法达到均值, 于是我们考虑将最大的与 $(n-1)$ 个最小的匹配, 即 VaR_{1-t} 配 $(n-1)$ 个 $\text{VaR}_{(n-1)t}$, $t \in [0, 1]$, 直到 $[c, 1 - (n-1)c]$ 区间内能够混合。下面我们给出该相关结构:

随机向量 (X_1, \dots, X_n) 具有一致的边际分布, 则分布函数的联合分布(copula)为 $[0, 1]^n$ 上的均匀分布, 即 $(U_1, \dots, U_n) \sim Q_n^F$, 其中 Q_n^F 为 copula 结构, 它满足:

当密度函数递增时:

(a) 对每一个 $i = 1, 2, \dots, n$, 给定 $U_i \in [0, c]$, 我们有 $U_j = 1 - (n-1)U_i, \forall j \neq i$;

(b) 对于所有的 $U_i \in [c, 1 - (n-1)c]$, $F^{-1}(U_1) + \dots + F^{-1}(U_n)$ 是一个常数。

令 $Q_n^F = Q_n^F(c_n)$, 其中 c_n 为 copula Q_n^F 满足(a) (b)条件存在的所有 c 中的最小值, 并且 $c_n = 0$ 当且仅当 F 是 n 阶完全混合的。定义 $H(x) = F^{-1}(x) + (n-1)F^{-1}(1 - (n-1)x)$, 则有

$$c_n = \min \left\{ c \in \left[0, \frac{1}{n}\right] : \int_c^{\frac{1}{n}} H(t) dt \leq \left(\frac{1}{n} - c\right) H(c) \right\}$$

当密度函数递减时:

(c) 对每一个 $i = 1, 2, \dots, n$, 给定 $U_i \in [1 - c, 1]$, 我们有 $U_j = (n-1)(1 - U_i), \forall j \neq i$;

(d) 对于所有的 $U_i \in [(n-1)c, 1 - c]$, $F^{-1}(U_1) + \dots + F^{-1}(U_n)$ 是一个常数。

由于当 X 的密度单调递减时, $-X$ 的密度则单调递增, 所以 F 的性质与密度递增时类似, 定义 $H(x) = (n-1)F^{-1}((n-1)x) + F^{-1}(1-x)$, 则有

$$c_n = \min \left\{ c \in \left[0, \frac{1}{n}\right] : \int_c^{\frac{1}{n}} H(t) dt \geq \left(\frac{1}{n} - c\right) H(c) \right\}$$

下面我们对该结构的存在性进行证明。由于密度函数单调递增时和单调递减时类似, 所以我们只针对密度函数单调递增的情况进行证明。

首先我们令 $U_1, \dots, U_n \sim U([0, c] \cup [1-(n-1)c, 1])$ 使得 U_1, \dots, U_n 的联合分布均匀的分布在每个线段 $U_j = 1-(n-1)U_i, \forall j \neq i, U_i \in [0, c]$ 。通过 4.1.3 推论可知存在 $Z_1, \dots, Z_n \sim U[c, 1-(n-1)c]$ 使得 $F^{-1}(U_1) + \dots + F^{-1}(U_n)$ 是一个常数, 因为 $F^{-1}(U_i)$ 的密度单调递增, 并且由 $\int_c^1 H(t) dt \leq \left(\frac{1}{n} - c\right) H(c)$ 可知,

$$E(F^{-1}(Z_1)) \leq F^{-1}(c) + \frac{n}{n-1} [F^{-1}(1-(n-1)c) - F^{-1}(c)]$$

令随机变量 U 是均匀分布, 且与 $(U_1, \dots, U_n, Z_1, \dots, Z_n)$ 相互独立, 且 $X_i = 1_{\{U < nc\}} Y_i + 1_{\{U \geq nc\}} Z_i$, 则 $X_i \sim U, i = 1, \dots, n$ 。 X_1, \dots, X_n 的联合分布满足性质(a) (b), 这表明 Q_n^F 是存在的。

特别地, 当 $n = 2$ 时, 如何得到 \min 或 $\max \text{VaR}_\alpha(X_1 + X_2)$?

当两个随机变量加和时求其最大最小值思路是比较容易想的, 因为我们想要让该组合的分位数较小, 应该考虑在取值一定的情况下, 让他们的加和尽可能的集中, 当所有的组合都集中于一点时, $\text{VaR}_\alpha(X_1 + X_2)$ 达到了最小, 那什么样的相关结构能使他们集中于一点呢? 就是反单调的时候, 相关结构如图 1 所示。

对应上述图 1 中相依结构的表达式为:

$$y = \begin{cases} 1 + \alpha - x, & x > \alpha \\ \alpha - x, & x \leq \alpha \end{cases}$$

该相依结构同时达到了 $\text{VaR}_\alpha(X_1 + X_2)$ 的最大值和最小值, 若取 $\alpha = 0.95$, 则其最大值为 1.95, 最小值为 0.95。

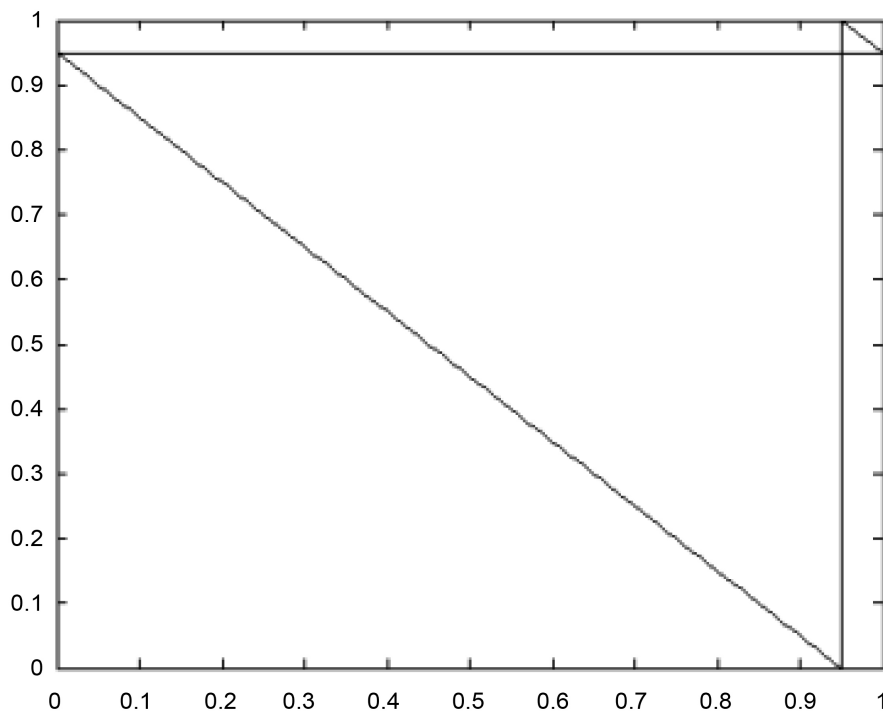


Figure 1. The copula of anti-monotone with two variables

图 1. 两随机变量反单调的相关结构

二维情况下比较容易计算 VaR 的最值, 但在多维的情况下就没有那么容易了, 具体的计算请参考文献[9]。

致 谢

首先, 我要感谢我的指导老师王彬老师对我的教导。从文章的选题、构思、撰写到最终的定稿, 王彬老师都给了我悉心的指导。此外, 我还要感谢所有给予我帮助的老师 and 同学, 感谢你们给予我的鼓励和关怀!

参考文献 (References)

- [1] R. 卡尔斯, M. 胡法兹, J. 达纳, M. 狄尼特. 现代精算风险理论—基于 R [M]. 第二版. 北京: 科学出版社, 2016: 123-127.
- [2] Bignozzi, V., Mao, T., Wang, B., et al. (2016) Diversification Limit of Quantiles under Dependence Uncertainty. *Extremes*, **19**, 143-170. <https://doi.org/10.1007/s10687-016-0245-5>
- [3] Embrechts, P., Puccetti, G. and Rüschendorf, L. (2013) Model Uncertainty and VaR Aggregation. *Journal of Banking & Finance*, **37**, 2750-2764. <https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2013.03.014>
- [4] Puccetti, G., Wang, B. and Wang, R. (2013) Complete Mixability and Asymptotic Equivalence of Worst-Possible VaR and ES Estimates. *Insurance Mathematics & Economics*, **53**, 821-828. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2013.09.017>
- [5] 王良. VaR 风险管理模型的理论与应用[D]: [硕士学位论文]. 大连: 东北财经大学, 2003.
- [6] Wang, B. and Wang, R.D. (2011) The Complete Mixability and Convex Minimization Problems with Monotone Marginal Densities. *Journal of Multivariate Analysis*, **102**, 1344-1360. <https://doi.org/10.1016/j.jmva.2011.05.002>
- [7] 易文德. 随机变量间相依性度量的新方法[J]. 重庆文理学院学报(自然科学版), 2009, 28(5): 5-7, 14.
- [8] 王彬. 随机变量的组合学[M]. 北京: 现代出版社, 2016: 17-29.
- [9] Wang, R.D., Peng, L. and Yang, J.P. (2013) Bounds for the Sum of Dependent Risks and Worst Value-at-Risk with Monotone Marginal Densities. *Finance and Stochastics*, **17**, 395-417. <https://doi.org/10.1007/s00780-012-0200-5>

知网检索的两种方式:

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>
下拉列表框选择: [ISSN], 输入期刊 ISSN: 2325-2251, 即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>
左侧“国际文献总库”进入, 输入文章标题, 即可查询

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱: sa@hanspub.org