

Dynamics of the Difference Equation

$$x_{n+1} = x_n / (p + x_{n-1})$$

Shaogao Deng¹, Lijun Zhu^{2*}

¹School of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu Sichuan

²School of Mathematics and Information Science, North Minzu University, Yinchuan Ningxia

Email: sgdeng@swjtu.edu.cn, zhulijun1995@yahoo.com

Received: Oct. 23rd, 2018; accepted: Nov. 13th, 2018; published: Nov. 20th, 2018

Abstract

This paper considers the difference equation $x_{n+1} = x_n / (p + x_{n-1}) (p \geq 0, n \geq 2)$ with the initial values $x_1 > 0, x_2 > 0$. The asymptotic stability of the positive solutions is proved under some assumptions.

Keywords

Difference Equation, Equilibrium Point, Asymptotic Stability

差分方程 $x_{n+1} = x_n / (p + x_{n-1})$ 的动力学性质

邓绍高¹, 朱立军^{2*}

¹西南交通大学数学学院, 四川 成都

²北方民族大学数学与信息科学学院, 宁夏 银川

Email: sgdeng@swjtu.edu.cn, zhulijun1995@yahoo.com

收稿日期: 2018年10月23日; 录用日期: 2018年11月13日; 发布日期: 2018年11月20日

摘要

本文讨论了差分方程 $x_{n+1} = x_n / (p + x_{n-1}) (p \geq 0, n \geq 2)$ 的动力学性质, 其中参数 p 是非负数, 初始值 $x_1 > 0, x_2 > 0$ 。在一定的条件下, 方程的正解的渐近稳定性得到了证明。

*通讯作者。

关键词

差分方程, 平衡点, 渐近稳定性

Copyright © 2018 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

差分方程来源于递推关系, 在各种实际问题中有着广泛的应用。同时在微分方程的数值求解中, 需要通过对方程的离散化得到差分方程(参见[1] [2])。因此, 非线性差分方程成了近年来的研究热点之一, 比如文献[3] [4] [5]。

本文将考虑具有非负参数的差分方程:

$$x_{n+1} = x_n / (p + x_{n-1}) \quad (1.1)$$

的正解在一定的条件下的收敛性和周期性。其中, $(p \geq 0, n \geq 2)$, 初始值 $x_1 > 0, x_2 > 0$ 。

设函数 $f(x, y) = x / (p + y) (p > 0, x > 0, y > 0)$, 则差分方程

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}) (n \geq 2) \quad (1.2)$$

在平衡点 β 的线性化方程的特征方程为(相关的概念参见[1] [2]):

$$\lambda^2 - f_x(\beta, \beta)\lambda - f_y(\beta, \beta) = 0 \quad (1.3)$$

引理 1.1: 若方程(1.3)的全部特征根的模都小于 1, 则方程(1.2)的平衡点 β 是(局部)渐近稳定的; 若方程(1.3)至少有一个特征根的模大于 1, 则方程(1.2)的平衡点 β 是不稳定的(参见[1] [2])。

2. 主要结果

首先, 我们考虑 $p > 0$ 为正数时的情形。

定理 2.1: 差分方程(1.1)在 $p > 0$ 时, 其平衡点及其稳定性依赖于 p 的值。即:

- 1) 当 $p \geq 1$ 时, 有唯一的平衡点 $\beta = 0$, 且是全局(渐近)稳定的;
- 2) 当 $0 < p < 1$ 时, 有两个平衡点 $\beta = 0$ 和 $\beta = 1 - p$, 其中 $\beta = 0$ 是不稳定的, 而 $\beta = 1 - p$ 是(渐近)稳定的。

证明: 因为 $p > 0, x_1 > 0, x_2 > 0$, 由数学归纳法可得 $x_n > 0 (n \geq 1)$ 。

1) 当 $p \geq 1, n \geq 2$ 时, $x_{n+1}/x_n = 1/(p + x_{n-1}) < 1/p \leq 1$,

即方程(1.1)的解 $\{x_n\}$ 单调递减。

从而存在 $\beta \geq 0$, 使得: $x_n \rightarrow \beta (n \rightarrow \infty)$ 。

另一方面, 对方程(1.1)两边取极限可求得:

$$\beta = 0 \text{ 或 } \beta = 1 - p (\text{当 } p > 1 \text{ 时舍去})$$

从而得唯一的平衡点 $\beta = 0$ 。

由于解的收敛性不依赖于对初值的选取。所以, 该平衡点是全局(渐近)稳定的。

2) 当 $0 < p < 1$ 时, 令 $x_n \equiv \beta$, 可得:

$$\beta = 0 \text{ 或 } \beta = 1 - p > 0$$

此时, 方程(1.1)有两个平衡点 $\beta = 0$ 和 $\beta = 1 - p$ 。

令 $f(x, y) = x/(p + y)$, 则:

$$f_x(x, y) = 1/(p + y), \quad f_y(x, y) = -x/(p + y)^2$$

当 $\beta = 0$ 时, $f_x(\beta, \beta) = 1/p, \quad f_y(\beta, \beta) = 0$ 。

所以, 方程(1.1)的线性化方程的特征方程 $\lambda^2 - \lambda/p = 0$ 的特征根为:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1/p > 1$$

故, 平衡点 $\beta = 0$ 是不稳定的。

当 $\beta = 1 - p$ 时, $f_x(\beta, \beta) = 1, \quad f_y(\beta, \beta) = p - 1$ 。

同上, 方程(1.1)的线性化方程的特征方程 $\lambda^2 - \lambda - (p - 1) = 0$ 的特征根满足:

$$0 < \lambda_1 = (1 - \sqrt{4p - 3})/2 \leq \lambda_2 = (1 + \sqrt{4p - 3})/2 < 1 \text{ (当 } 3/4 \leq p < 1 \text{ 时)};$$

$$\|\lambda_1\|^2 = \|\lambda_2\|^2 = \lambda_1 \lambda_2 = 1 - p < 1 \text{ (当 } 0 < p < 3/4 \text{ 时)}。$$

由此可知, 平衡点 $\beta = 1 - p$ 是(渐近)稳定的。证毕。

其次, 我们来考虑 $p = 0$ 时, 其解是否收敛。

设初始值 $x_1 = a > 0, x_2 = b > 0$, 容易得到:

$$x_3 = b/a, x_4 = 1/a, x_5 = 1/b, x_6 = a/b, x_7 = a, x_8 = b \cdots \cdots$$

定理 2.2: 差分方程(1.1)在 $p = 0$ 时, 其解 $\{x_n\}$ 在一般的情况下是六周期解(即 $x_{n+6} = x_n$)。即解 $\{x_n\}$ 是振荡的, 也就是没有平衡点。

注释 2.1: 在差分方程(1.1)中, 如果将参数 p 推广成一般的序列 $\{p_n\}$ 则结论就会有所不同。

基金项目

中央高校基本科研业务费专项资金(2682018ZT25)资助(Supported by the Fundamental Research Funds for the Central Universities (2682018ZT25)); 宁夏自然科学基金项目(NZ17015); 国家自然科学基金项目(61362033); 四川省科技厅基础研究计划项目(2011JYZ002); 西南交通大学本科教育教学研究与改革项目(1804171)。

参考文献

- [1] 周义仓, 曹慧, 肖燕妮. 差分方程及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2014.
- [2] Elaydi, S. (2005) An Introduction to Difference Equations. 3rd Edition, Springer-Verlag, New York.
- [3] Amleh, A.M., Grove, E.A., Ladas, G. and Georgiou, D.A. (1999) On the Recursive Sequence $x_{n+1} = \alpha + x_{n-1}/x_n$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **233**, 790-798. <https://doi.org/10.1006/jmaa.1999.6346>
- [4] 徐胜荣, 王希超, 周营营. 一类差分方程的稳定性研究[J]. 山东农业大学学报(自然科学版), 2013, 44(4):624-629.
- [5] 韩彩虹, 李 略, 黄荣里. 差分方程 $x_{n+1} = p_n + x_n/x_{n-1}$ 的动力学性质[J]. 广西师范大学学报(自然科学版), 2013, 31(1): 44-47.

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>
下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2324-7991，即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>
左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：<http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱：aam@hanspub.org