

Research on Phase Retrieval Problem

Gan Gong, Huimin Wang*, Qian Wu, Yunyang Lu

Department of Applied Statistics, Shaoxing University, Shaoxing Zhejiang
Email: *glanme@126.com

Received: Apr. 23rd, 2019; accepted: May 3rd, 2019; published: May 15th, 2019

Abstract

Phase retrieval is an important issue in the field of engineering physics, studying how to estimate a signal from its Fourier transform magnitude. Generally speaking, this problem is ill-posed. Therefore, to recover the signal accurately, some *a priori* information of the signal is needed. Very rich research results have emerged in the phase recovery problem. This paper will review the latest theories and algorithms of sparse phase recovery.

Keywords

Sparsity, Phase Retrieval, Iterative Algorithm, Nonconvex Optimization

相位恢复问题研究

龚 敢, 王会敏*, 邬 谦, 卢云洋

绍兴文理学院, 应用统计系, 浙江 绍兴
Email: *glanme@126.com

收稿日期: 2019年4月23日; 录用日期: 2019年5月3日; 发布日期: 2019年5月15日

摘 要

相位恢复问题是工程物理领域的一个重要的问题, 研究如何从一个傅立叶测量的模中估计一个信号。一般来说, 这个问题是病态的, 因此, 要准确恢复信号, 需要信号的一些先验信息。关于相位恢复问题已经涌现了非常丰富的研究成果, 本文将对稀疏相位恢复问题最新的理论和算法进展进行综述。

关键词

稀疏性, 相位恢复, 迭代算法, 非凸优化

*通讯作者。

Copyright © 2019 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 相位恢复问题的背景

在光学中, 由于光波的频率较高, 光场的强度信息通过现有的光学设备, 很容易记录下来, 但是光波的相位信息在采集过程中却很难获取甚至会丢失。但是光波的相位信息包含了丰富的成像物体的信息, 因此需要通过数值算法来恢复信号的相位。从光波的强度信息来恢复光波的相位信息的方法称为相位恢复。历史上, X 射线晶体结构分析[1]是相位恢复问题的第一个重要应用。目前, X 射线晶体结构分析已经成为生物医学图像领域对分子或者纳米粒子生成 3 维定量密度图, 分析单个分子或者纳米粒子结构的重要工具。除此之外, 相位恢复问题在自适应光学[2]、光学波前重构[3]、信号复原[4]、全息成像[5]等光学领域, 以及显微镜[6]、天文学[7]、逆源问题[8], 甚至是微分几何[9]等领域都有非常广泛的应用。因此, 一个世纪以来, 相位恢复问题吸引了很多物理学家、工程师、数学家的广泛关注, 是一个非常活跃的研究领域。

经过几十年的发展, 相位恢复问题已经取得了很大的进展, 在很多领域有了广泛的应用, 国内外很多科研人员都对相位恢复问题做了大量研究。在 X 射线衍射晶体结构分析中, 需要由已知结构因子的绝对值大小, 去恢复相位, 重构晶体结构。直接法是在衍射分析中用于相位恢复的一种计算方法。1985 年, J. Karle 和 H. Hauptman 因对直接法的贡献获得诺贝尔化学奖。中科院物理所在 1980 年成立了晶体结构分析方法研究组, 从事晶体学中的直接法研究。1997 年, 范海福院士等科学家在国际上首次用直接法, 从一套单波长异常散射数据解出一个未知的蛋白质晶体结构。相位恢复在电子显微、波前传感、天文望远镜等领域也发挥了重要的作用。1990 年, NASA 发现新安装的哈勃望远镜的主镜出现了较大的球面像差, J. R. Fienup 等多位科学家应用参数技术, 梯度算法等相位恢复技术修正了像差。这次的成功应用使科学家对于相位重构的方法有了更多的了解, 同时认识到相对简单的数值计算软件有时可以替代复杂、敏感的光学系统。在国内, 清华大学和中国科学院物理所应用相位恢复算法进行了激光畸变波前高精度重构的研究。四川大学物理学院开展了相位恢复算法的改进工作。90 年代, 中科院物理所的杨国桢和顾本源教授提出了杨 - 顾算法, 在严格的数学推导基础上创造性地将相位恢复算法应用到多波长混合光照光学系统, 可以实现光波信号分开, 且能够同时聚焦到同一平面预定位置上的多性能的衍射相位元件设计和制作, 在各种衍射光学元件的设计过程中起到了非常重要的作用。

在 X 射线晶体结构分析中, 晶体结构同晶体的 X 射线衍射效应之间存在傅里叶变换的关系, 为了恢复相位, 已经发展出了一系列的方法, 如尝试法、傅里叶综合法、帕特孙法和直接法等。其中直接法是从一组结构因数的绝对值直接推出他们的相位的方法, 利用相位关系式, 从少数几个相位出发可以推引出一批新的相位, 将这批相位进行迭代处理, 可以迅速扩展出其余相位并使全部相位的数值逐步精确化。直接法已经成为分析晶体结构的主要方法。这些方法都需要充分利用晶体结构的信息, 给出较为准确的初始的相位估计, 并且计算复杂, 计算量较大。

在光学领域, 许多学者提出了各种相位恢复的算法, 其中最流行的是 1972 年 R. W. Gerchberg 和 W. O. Saxton 提出的 GS 算法[10]。这个算法通过傅里叶变换和逆傅里叶变换之间的转换, 迭代得到相位的估计。GS 算法计算简单, 易于实现, 可以用来求解二维相位恢复问题, 并且容易处理额外的信号的约束条件, 因此, 提出之后就得到了广泛的关注。1973 年, J. L. Misell 仿照 GS 算法, 提出如何用已知两张具有不同离焦量的离焦像的强度, 来计算波函数的相位。随后, 很多学者围绕 GS 算法的收敛

性, 解的唯一性等问题展开了讨论。1982 年, J. R. Fienup [11]推广了 GS 算法并分析了 GS 算法的很多性质, 同时提出了误差减少算法, 共轭梯度算法以及输入 - 输出算法等多种加速算法来加快 GS 算法的收敛速度。一些研究人员, 分别在 1 维和 2 维情形下, 对 GS 算法做了大量数值验算, 结果表明, GS 算法是收敛的。杨国帧和顾本源将 GS 算法由傅里叶变换系统推广到了一般的变换系统。此后, 很多科研人员都对 GS 算法做了不同的改进[12]。GS 算法的缺点是算法的结果依赖输入点得初始选择和对于参数的巧妙选择。如果初始输入点选择不好, 算法会收敛到局部解, 甚至陷入停滞的状态。GS 算法的改进主要在于更好的应用信号的性质, 比如实值性, 非负性, 支集信息等先验信息来更好地选择初始输入点。但是 GS 算法解的唯一性, 噪声影响下的稳定性以及算法理论上的收敛性目前还不是非常清楚。另一方面, GS 算法是利用傅里叶域的过采样性来恢复数据的, 但是过采样并不总是可行, 因为一些实验只能达到次-Nyquist 采样率。

2. 相位恢复问题的研究进展

从数学角度看, 相位恢复问题是从一组缺失相位的线性测量 $b_i = |y_i| = |\langle a_i, x \rangle|^2, i = 1, \dots, N$ 中恢复一个实值或者复值信号 $x_0 \in R^n$ 或者 $x_0 \in C^n$, 这里 $z_i \in R^n$ 或者 $z_i \in C^n$ 是已知的测量向量。傅立叶变换是应用最广泛的一类测量。一般来说, 这个问题的解是不唯一的。一般来说, 相位恢复问题是一个病态的问题, 没有唯一解。但是科研人员经过深入探索具体问题中信号的特征和内在结构, 发展出了很多有效的数值算法。相位恢复的主要研究问题包括: 确定至少需要多少测量才能保证准确恢复信号, 在噪声情形下恢复的稳定性和误差界, 设计快速有效的恢复算法, 以及设计不同类型的测量等。

利用信号的稀疏结构来减少测量次数是目前信号处理领域的热点问题。压缩感知和矩阵填充是其中具有代表性的稀疏逼近问题。压缩感知[13]理论是 D. Donoho, E. J. Candes, T. Tao 等提出的一种新的信息获取理论, 主要研究如何通过较少的线性测量来恢复稀疏或者可压缩的信号, 以降低采样率。矩阵填充[14]主要研究如何通过优化方法, 从一个低秩矩阵的已知的部分元素, 恢复原来的矩阵。压缩感知和矩阵填充由于在医学图像、遥感、信号处理、在线推荐系统、面部识别等多个领域都有广泛的应用, 成为近年来数学界、工程界等关注的研究热点, 已经有了丰富的成果。

最近, 有学者将压缩感知和矩阵填充的方法应用于相位恢复问题, 提出了新的相位恢复的数值算法, 这些算法给出了取得唯一解(相差一个单位模系数的意义下)的充分条件并且在噪声影响下具有稳定性。因此, 将稀疏逼近算法与相位恢复问题结合, 是一个活跃的研究方向。

R. Balan [15] [16]等在研究语音识别领域的相位恢复问题时, 提出了一种新的基于框架理论的相位恢复算法。Balan 分析了一大类强度测量的单射性, 提出了补集性质, 应用代数几何的知识, 表明对于 n 维复信号, 测量数大于 $4n - 2$, 可以保证测量具有单射性。并且对于窗口傅里叶变换, 非抽样小波变换等线性测量, 提供了重构的充分必要条件, 并且利用紧框架, 相互无偏正交基, 以及希尔伯特空间中的投影 t -设计等工具给出了一些线性或者拟线性的重构算法。但是这种算法的缺点一是要求测量数过高, 二是依赖于一些特定类型的测量, 并且用到很多代数性质, 很多感兴趣的相位恢复问题并不满足这些性质, 因此应用受到了限制, 同时算法缺少噪声情形下的稳定性结果。随后, 有学者猜想 $3n - 2$ 是单射性的充分条件, 但是 Heinosaari 等[17]举出反例, 否认了这种猜想, 并且表明 $(4 + o(1))n$ 是必要的。随后, Eldar 等[18]表明 $o(n)$ 个高斯随机测量可以接近 1 的概率分辨 n 维实信号。Bandeira 等[19]猜想 $4n - 4$ 的测量可以保证单射性, 并且对于 $n = 2, 3$ 的情形证明了该猜想, 并提出了强补集性质分析了测量的稳定性, 表明高斯随机测量以很高概率满足强补集性质。

另一方面, A. Chai, E. J. Candes 等[20] [21]将矩阵填充思想应用于相位恢复问题, 提出了相位提升

算法。通过多重结构光照方式增加测量数的方式,将相位恢复问题表示为一个矩阵填充问题。E. J. Candes 等注意到 $|A(x)|^2$ 是秩为 1 的矩阵 $X = xx^*$ 的线性函数,利用提升技术,将从二次约束条件中恢复一个向量的非凸问题转变为从仿射秩最小化问题,并利用核范数最小化方法松弛为一个半正定规划问题。这种方法的优点是将组合问题转化为一个凸优化问题,提出了一个系统的优化框架,对于独立的球面随机测量,证明了只要测量数 $N \geq cn \log n$,则以接近 1 的概率,原信号可以唯一恢复。并且给出了噪声影响下的稳定性结果。但是相位提升算法增加了计算的复杂性,并且随着信号的维数增加,计算量增加很快。同时,E. J. Candes 等[22]提出了另一种非凸的优化算法 Wirtinger Flow,首先通过谱方法仔细的选择初始值,然后通过迭代更新初始值,这种非凸算法称为 Wirtinger Flow,并分析了算法的表现。J. Wright 等从几何角度分析了一些非凸优化算法在一般相位恢复问题中表现良好的原因,指出对于独立同分布的高斯随机测量向量,当测量数 $m \geq Cn \log^3 n$ 时,一般相位恢复问题的最小二乘规划具有很好的几何性质,这些性质使得迭代算法可以有效找到全局最优解。

在[23]中,作者应用 Kaczmarz 方法来解决广义相位恢复问题。该方法推广了用于求解线性方程组的 Kaczmarz 方法,通过在每次迭代中用启发式方法选择相位,并且总体上具有相同的每次迭代计算复杂度。广泛的经验性能比较建立了 Kaczmarz 方法相对于其他最先进的相位恢复算法的计算优势,无论是在成功恢复所需的测量数量方面还是在计算时间方面。作者对随机 Kaczmarz 方法进行了初步收敛性分析。

在[24]中,作者将相位恢复问题描述成一个凸优化问题,称为 PhaseMax。与将相位恢复问题描述成半正定松弛问题并提升到高维的相位提升算法不同,PhaseMax 是非提升的松弛算法,还是在原来信号的维数上运算。作者表明 PhaseMax 问题的对偶问题是基追踪,因此原来对于稀疏信号恢复设计的算法也可以应用于相位恢复问题。作者对于一大类随机测量给出了成功概率的下界,分析了相位恢复在噪声下的稳定性,并做了数值模拟分析。[25]中继续讨论 PhaseMax 算法,并且对一类随机球面测量分布模型进行了分析,证明了当测量数足够多的时候,PhaseMax 算法能以很高的概率成功恢复信号。[26]中作者分析了 PhaseMax 算法的高维极限的表示,描述了相位转换现象,用一个简单的分析公式刻划了相位转换的边界,结果表明过采样率可以降低。

M. Moravec 等[27]针对稀疏信号,将压缩感知的思想应用于相位恢复问题,提出了压缩相位恢复方法,并证明,在随机傅里叶变换模型下,只需要 $O(k^2 \log(4n/k^2))$ 个随机傅里叶测量,在相差一个模为 1 的因子的意义下,唯一恢复一个 k 稀疏信号。同时提出了一个基于贪婪算法的相位恢复数值算法。这个算法有很好的理论意义,但是缺陷在于假定了信号的 l_1 范数是已知的。在[28]中作者指出对于 k -稀疏实信号, $2k$ 个强度测量对于保证准确恢复是必要的。对于复信号,这个测量数是 $4k-2$ 。

[29][30]中作者提出了一种两段式稀疏相位恢复策略,分析了恢复所需的测量数。通过数值模拟表明这种算法计算有效,并且对于噪声具有鲁棒性。作者推广了压缩感知中零空间性质和限制等距性质,得到了类似的性质。Y. ELdar 等提出了一种局部搜索方法,从傅立叶强度测量中恢复稀疏信号,具有快速稳定的表现。在[31]中,作者将 Wirtinger Flow 推广到了稀疏相位恢复情形,提出了 SWF 算法,并分析了算法的收敛率。

相位恢复问题是一个很活跃的研究领域,目前已经有了非常丰富的研究成果。稀疏相位恢复问题是最近很受关注的问题,吸引了很多科研工作者的注意。目前仍然有很多问题没有解决,值得探索。

基金项目

国家自然科学基金青年基金项目(11501375),浙江省自然科学基金项目(LQ14A010005),绍兴文理学院学生科研项目(非线性压缩感知问题研究)资助。

参考文献

- [1] Harrison, R.W. (1993) Phase Problem in Crystallography. *Journal of the Optical Society of America A*, **10**, 1045-1055. <https://doi.org/10.1364/JOSAA.10.001046>
- [2] Carrano, C.J., et al. (1998) Phase Retrieval Techniques for Adaptive Optics. *Symposium on Astronomical Telescopes and Instrumentation*, Kona, 20-28 March 1998. <https://doi.org/10.1117/12.321633>
- [3] Luke, D.R., Burke, J.V. and Lyon, R.G. (2002) Optical Wavefront Reconstruction: Theory and Numerical Methods. *SIAM Review*, **44**, 169-224. <https://doi.org/10.1137/S003614450139075>
- [4] Millane, R.P. (2006) Recent Advances in Phase Retrieval. *Proceedings of SPIE 6316, Image Reconstruction from Incomplete Data IV*, San Diego, 63160E. <https://doi.org/10.1117/12.683431>
- [5] Schnars, U. and Juptner, W.P. (2002) Digital Recording and Numerical Reconstruction of Holograms. *Measurement Science and Technology*, **13**, 85-101. <https://doi.org/10.1088/0957-0233/13/9/201>
- [6] Misell, D.L. (1973) A Method for the Solution of the Phase Problem in Electron Microscopy. *Journal of Physics D: Applied Physics*, **6**, 6-9. <https://doi.org/10.1088/0022-3727/6/1/102>
- [7] Baba, N. and Mutoh, K. (2001) Measurement of Telescope Aberrations through Atmospheric Turbulence by Use of Phase Diversity. *Applied Optics*, **40**, 544-552. <https://doi.org/10.1364/AO.40.000544>
- [8] Klibanov, M.V., Sacks, P.E. and Tikhonravov, A.V. (1995) The Phase Retrieval Problem. *Inverse Problems*, **11**, 1-28. <https://doi.org/10.1088/0266-5611/11/1/001>
- [9] Bianchi, G., Segala, F. and Volcic, A. (2002) The Solution of the Covariogram Problem for Plane C_+^2 Convex Bodies. *Journal of Differential Geometry*, **60**, 177-198. <https://doi.org/10.4310/jdg/1090351101>
- [10] Gerchberg, R.W. and Saxton, W.O. (1972) A Practical Algorithm for the Determination of Phase from Image and Diffraction Plane Pictures. *Optik*, **35**, 237-246.
- [11] Fienup, J.R. (1982) Phase Retrieval Algorithms: A Comparison. *Applied Optics*, **21**, 2758-2768. <https://doi.org/10.1364/AO.21.002758>
- [12] Pauwels, E., Beck, A., Eldar, Y. and Sabeck, S. (2018) On Fienup Methods for Sparse Phase Retrieval. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **66**, 982-991. <https://doi.org/10.1109/TSP.2017.2780044>
- [13] Donoho, D. (2006) Compressed Sensing. *IEEE Transactions on Information Theory*, **52**, 1289-1306. <https://doi.org/10.1109/TIT.2006.871582>
- [14] Cai, J.F., Candès, E.J. and Shen, Z.W. (2010) A Singular Value Thresholding Algorithm for Matrix Completion. *SIAM Journal on Optimization*, **20**, 1956-1982. <https://doi.org/10.1137/080738970>
- [15] Balan, R., Casazza, P.G. and Edidin, D. (2006) On Signal Reconstruction without Noisy Phase. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, **20**, 345-356. <https://doi.org/10.1016/j.acha.2005.07.001>
- [16] Balan, R., Bodmann, B., Casazza, P.G. and Edidin, D. (2009) Painless Reconstruction from Magnitudes of Frame Coefficients. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, **15**, 488-501. <https://doi.org/10.1007/s00041-009-9065-1>
- [17] Cameli, C., Heinosari, T., Schwltz, J. and Toigo, A. (2015) Non-Uniqueness of Phase Retrieval for the Fractional Fourier Transforms. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, **39**, 339-346. <https://doi.org/10.1016/j.acha.2014.11.001>
- [18] Schechtman, Y., Beck, A. and Eldar, Y. (2014) GESPAR: Efficient Phase Retrieval of Sparse Signals. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **62**, 928-938. <https://doi.org/10.1109/TSP.2013.2297687>
- [19] Banderia, A., Cahill, J., Mixon, D. and Nelson, A. (2014) Saving Phase: Injectivity and Stability for Phase Retrieval. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, **7**, 106-125. <https://doi.org/10.1016/j.acha.2013.10.002>
- [20] Candès, E.J., Eldar, Y., Strohmer, T. and Vershynski, V. (2013) Phase Retrieval via Matrix Completion. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, **6**, 199-225. <https://doi.org/10.1137/110848074>
- [21] Candès, E.J., Strohmer, T. and Vershynski, V. (2013) PhaseLift: Exact and Stable Signal Recovery from Magnitude Measurements via Convex Programming. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **66**, 1241-1274. <https://doi.org/10.1002/cpa.21432>
- [22] Candès, E.J., Li, X. and Soltanolkotabi, M. (2015) Phase Retrieval via Wirtinger Flow: Theory and Algorithms. *IEEE Transactions on Information Theory*, **61**, 1985-2007. <https://doi.org/10.1109/TIT.2015.2399924>
- [23] Wei, K. (2015) Solving Systems of Phaseless Equations via Kaczmarz Methods: A Proof of Concept Study. *Inverse Problems*, **31**, Article ID: 125008. <https://doi.org/10.1088/0266-5611/31/12/125008>
- [24] Goldstein, T. and Studer, C. (2017) Convex Phase Retrieval without Lifting via PhaseMax. *Proceedings of the 34th International Conference on Machine Learning*, Sydney, 6-11 August 2017, PMLR 70, 1273-1281.

-
- [25] Dhifallah, O. and Lu, Y.M. (2017) Fundamental Limits of Phasemax for Phase Retrieval: A Replica Analysis. *IEEE 7th International Workshop on Computational Advances in Multi-Sensor Adaptive Processing*, Curacao, 10-13 December 2017, 1-5. <https://doi.org/10.1109/CAMSAP.2017.8313210>
- [26] Hand, P. and Voroninski, V. (2016) An Elementary Proof of Convex Phase Retrieval in the Natural Parameter Space via the Linear Program PhaseMax. *Communications in Mathematical Sciences*, **16**, 1-4.
- [27] Moravec, M., Romberg, J. and Baraniuk, R. (2007) Compressive Phase Retrieval. *Proceedings of SPIE*, **6701**, Article ID: 670120. <https://doi.org/10.1117/12.736360>
- [28] Akçakaya, M. and Tarokh, V. (2013) New Conditions for Sparse Phase Retrieval.
- [29] Iwen, M., Viswan, A. and Wang, Y. (2017) Robust Sparse Phase Retrieval Made Easy. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, **42**, 135-142. <https://doi.org/10.1016/j.acha.2015.06.007>
- [30] Goldstein, T. and Studer, C. (2018) PhaseMax: Convex Phase Retrieval via Basis Pursuit. *IEEE Transactions on Information Theory*, **26**, 2675-2689. <https://doi.org/10.1109/TIT.2018.2800768>
- [31] Yuan, Z., Wang, Q. and Wang, H. (2017) Phase Retrieval via Sparse Wirtinger Flow.

知网检索的两种方式:

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>
下拉列表框选择: [ISSN], 输入期刊 ISSN: 2160-7583, 即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>
左侧“国际文献总库”进入, 输入文章标题, 即可查询

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱: pm@hanspub.org