Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(9), 1043-1059
Published Online November 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.99130

Hans汉斯

The Proof of the Algorithm of Euler Line with Orthogonal Radius of 4 Spheres as 4 Variables

—Application of Pythagorean Theorem of Four Dimensional Volume (Formula 4)

Guowei Cai

Shanghai Huimei Property Co., Ltd., Shanghai
Email: yiersan@139.com

Received: Oct. 26th, 2019; accepted: Nov. 13th, 2019; published: Nov. 20th, 2019

Abstract

In Euclidean 3D coordinate system, the vertical tetrahedron composed of orthogonal four spherical centers has its own isomorphic formulas according to the four common spherical radius of Pythagorean four states, the coordinates of spherical centers and the distance between the spherical centers and the vertical centers.

Keywords

Volume Pythagorean Theorem, Orthocentric Tetrahedron, Barycenter Sphere, Orthocenter Sphere, Circumscribed Sphere, 8-Point Sphere, 20-Point Sphere, 12-Point Sphere, 6-Point Sphere, Euler Line, Algorithm

证明以正交4球半径为4元数欧拉线的算法

——四维体积勾股定理的应用(公式四)

蔡国伟

上海汇美房产有限公司，上海
Email: yiersan@139.com

收稿日期：2019年10月26日；录用日期：2019年11月13日；发布日期：2019年11月20日

文章引用: 蔡国伟. 证明以正交 4 球半径为 4 元数欧拉线的算法[J]. 理论数学, 2019, 9(9): 1043-1059.
DOI: 10.12677/pm.2019.99130

摘　要

正交4球心组成的垂心四面体，在欧氏3D坐标系中，仅用四球半径，按勾股4态的4个共球半径、球心坐标、球心距垂心间距均有各自的同构公式。

关键词

体积勾股定理，垂心四面体，重心球，垂心球，外接球，8点球，20点球，12点球，6点球，欧拉线，算法

1. 引言

4 球正交，球心间的垂心四面体构成勾股 4 态[1]的 4 个球心点(球)、6 个两球间连线(勾股定理)、4 个 3 球心所围面(面积勾股定理[2])、1 个 4 球心所围体(四维体积勾股定理[3])均有各自的重心和垂心。这 15 组重心垂心按勾股 4 态，用 4 球半径表达的 4 种共球半径、球心坐标和欧拉线[4]间距关系如何？

2. 证明勾股四态的 4 个共球半径，球心坐标，欧拉线间距均存在同构公式

4 球正交，存在勾股 4 态，点、线、面、体 4 个共球，它们交 4 垂线同时交同态重心和垂心。4 个共球球心与垂心共 5 点共线，即为垂心四面体的欧拉线，4 个共球半径以及球心的坐标具有各自的同构的四元数公式。证明如下(为精简起见，各 15 组重心和垂心代数坐标符号均沿用“重心距离公式”[5]、“垂心距离公式”[6]中所设)。

2.1. 按勾股 4 态的 4 个同态重心垂心共球半径及其球心坐标有各自的同构公式

2.1.1. 勾股 4 态的 4 个同态重心垂心共球半径平方 $R^2_{O/n}$ 的同构公式

定义：正交 4 球形成的勾股 4 态，仅用 4 球半径表达其存在 4 个同态重心垂心共球半径的平方等于维数平方分子 4 个重心球半径的平方与垂心球半径平方与维数减 2 的平方积之差。其公式为：

$$R^2_{O/n} = \frac{1}{n^2}\left(4R^2_G - (n-2)^2 r^2_H\right) \tag{1}$$

这里：$n = 1,2,3,4$；重心球平方：$R^2_G = \frac{1}{16}\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)$；垂心球平方：$r^2_H = \frac{a^2b^2c^2d^2}{v^2}$。

2.1.2. 勾股 4 态的 4 个同态重心垂心共球球心坐标 $O_{1/n}$ 的同构公式 (即：欧拉线)

定义：勾股 4 态存在 4 个共球球心与 1 点垂心计 5 点共线的欧拉线，4 共球坐标有同构公式为：2 倍维数分子 4 球心坐标和与 2 倍的垂心坐标与 2 减维数积之差。其公式为：

$$O_{1/n}=\begin{cases} x=\dfrac{A_x+B_x+C_x+D_x-2(2-n)H_x}{2n} \\ y=\dfrac{A_y+B_y+C_y+D_y-2(2-n)H_y}{2n} \\ z=\dfrac{A_z+B_z+C_z+D_z-2(2-n)H_z}{2n} \end{cases} \tag{2}$$

这里 $n\in 1,2,3,4$ 的维数；$O_{1/n}$ 为共球心坐标；A,B,C,D 为 4 球心，H 为垂心；下标 x,y,z 为分坐标。

2.1.3. 勾股 4 态的 4 个同态重心垂心共球球心坐标 $O_{1/n}$ 与垂心 H 间距的同构公式(即：欧拉线)

定义：正交 4 球形成的勾股 4 态，存在 4 个同态重心垂心共球球心坐标距垂心距离为算术平均数。各共球与垂心间距得平方等于维数平方分子 4 与重心球半径与垂心球半径的平方差的积。其公式两边开方后为：

$$HO_{1/n}=\frac{2}{n}\sqrt{R_G^2-r_H^2} \tag{3}$$

这里：$n=1,2,3,4$；重心球平方：$R_G^2=\dfrac{1}{16}\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)$；垂心球平方：$r_H^2=\dfrac{a^2b^2c^2d^2}{v^2}$。

例：

- 一维点态 8 点共球半径、球心坐标及距垂心距离：(8 点共球在垂心四面体中为外接球。其半径的平方等于 4 球心至垂心距离平方和的四分之一，也等于 4 个重心球半径平方与垂心球半径平方差)。

其 8 点共球半径的平方，将 $n=1$ 代入公式(1)为：

$$\begin{aligned} R_O^2&=\frac{1}{1^2}\left[4\frac{1}{16}\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)-(1-2)^2\frac{a^2b^2c^2d^2}{v^2}\right] \\ &=\frac{1}{4}\left(a^2+b^2+c^2+d^2-\frac{4a^2b^2c^2d^2}{v^2}\right)=\frac{1}{4}\left(AH^2+BH^2+CH^2+DH^2\right) \\ &=4\left[\frac{1}{16}\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)\right]-\frac{a^2b^2c^2d^2}{v^2}=4R_G^2-r_H^2 \end{aligned} \tag{4}$$

其 8 点共球球心坐标，将 $n=1$ 代入公式(2)为：

$$O=\begin{cases} x=\dfrac{1}{2\times 1}\left[a+0+0+bct-2(2-1)\dfrac{-ab^2c^2t}{v}\right]=\dfrac{1}{2}\left(a+bct\dfrac{v+2abc}{v}\right) \\ y=\dfrac{1}{2\times 1}\left[0+b+0+act-2(2-1)\dfrac{-a^2bc^2t}{v}\right]=\dfrac{1}{2}\left(b+act\dfrac{v+2abc}{v}\right) \\ z=\dfrac{1}{2\times 1}\left[0+0+c+abt-2(2-1)\dfrac{-a^2b^2ct}{v}\right]=\dfrac{1}{2}\left(c+abt\dfrac{v+2abc}{v}\right) \end{cases} \tag{5}$$

这里：$t=\dfrac{-d^2}{v+abc}$，$v=\sqrt{a^2b^2c^2+a^2b^2d^2+a^2c^2d^2+b^2c^2d^2}=6V_{ABCD}$ 本文下同。

其 8 点共球球心坐标与垂心 H 距离，将 $n=1$ 代入公式(3)为：

$$HO_{1/1}=HO=\frac{2}{1}\sqrt{R_G^2-r_H^2}=2\sqrt{R_G^2-r_H^2}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2-\frac{16a^2b^2c^2d^2}{v^2}} \tag{6}$$

- 二维线态 20 点共球半径、球心坐标及距垂心距离：(垂心四面体中交 4 垂线 8 点以及交 4 球心 6 条

连线 12 点，总计 20 点共球，其半径和球心坐标同构重心球半径和重心坐标)。

其 20 点共球半径的平方，将 $n=2$ 代入公式(1)为：

$$R_{O/2}^2=\frac{1}{2^2}\left(4\frac{1}{16}\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)-\left(2-2\right)^2\frac{a^2b^2c^2d^2}{v^2}\right)=\frac{1}{16}\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)=R_G^2 \tag{7}$$

其 20 点共球球心坐标，将 $n=2$ 代入公式(2)为：

$$O_{1/2}=\begin{cases} x=\dfrac{1}{2\times 2}\left[a+0+0+bct-2\left(2-2\right)\dfrac{-ab^2c^2t}{v}\right]=\dfrac{1}{4}\left(a+bct\right) \\ y=\dfrac{1}{2\times 2}\left[0+b+0+act-2\left(2-2\right)\dfrac{-a^2bc^2t}{v}\right]=\dfrac{1}{4}\left(b+act\right) \\ z=\dfrac{1}{2\times 2}\left[0+0+c+abt-2\left(2-2\right)\dfrac{-a^2b^2ct}{v}\right]=\dfrac{1}{4}\left(c+abt\right) \end{cases} \tag{8}$$

其 20 点共球球心坐标与垂心 H 距离，将 $n=2$ 代入公式(3)为：

$$HO_{1/2}=\frac{2}{2}\sqrt{R_G^2-r_H^2}=\sqrt{R_G^2-r_H^2}=\frac{1}{4}\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2-\frac{16a^2b^2c^2d^2}{v^2}} \tag{9}$$

- 三维面态 12 点共球半径、球心坐标及距垂心距离：(垂心四面体中为 4 垂线 8 点 4 平面重心 4 点，总计 12 点共球；半径是 8 点共球的三分之一)。

  其 12 点共球半径的平方，将 $n=3$ 代入公式(1)为：

$$\begin{aligned} R_{O/3}^2&=\frac{1}{3^2}\left(4\frac{1}{16}\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)-\left(3-2\right)^2\frac{a^2b^2c^2d^2}{v^2}\right) \\ &=\frac{1}{36}\left(a^2+b^2+c^2+d^2-\frac{4a^2b^2c^2d^2}{v^2}\right)=\frac{1}{9}\left(4R_G^2-r_H^2\right) \end{aligned} \tag{10}$$

  其 12 点共球球心坐标，将 $n=3$ 代入公式(2)为：

$$O_{1/3}=\begin{cases} x=\dfrac{1}{2\times 3}\left[a+0+0+bct-2\left(2-3\right)\dfrac{-ab^2c^2t}{v}\right]=\dfrac{1}{6}\left(a+bct\dfrac{v-2abc}{v}\right) \\ y=\dfrac{1}{2\times 3}\left[0+b+0+act-2\left(2-3\right)\dfrac{-a^2bc^2t}{v}\right]=\dfrac{1}{6}\left(b+act\dfrac{v-2abc}{v}\right) \\ z=\dfrac{1}{2\times 3}\left[0+0+c+abt-2\left(2-3\right)\dfrac{-a^2b^2ct}{v}\right]=\dfrac{1}{6}\left(c+abt\dfrac{v-2abc}{v}\right) \end{cases} \tag{11}$$

  其 12 点共球球心坐标与垂心 H 距离，将 $n=3$ 代入公式(3)为：

$$HO_{1/3}=\frac{2}{3}\sqrt{R_G^2-r_H^2}=\frac{1}{6}\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2-\frac{16a^2b^2c^2d^2}{v^2}} \tag{12}$$

- 四维体态 6 点共球半径、球心坐标及距垂心距离：(垂心四面体中 4 垂线 5 点，其中垂心为 4 垂线交点，体重心 1 点，总计为 6 点共球)。

  其 6 点共球半径的平方，将 $n=4$ 代入公式(1)为：

$$\begin{aligned} R_{O/4}^2&=\frac{1}{4^2}\left[4\frac{1}{16}\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)-\left(4-2\right)^2\frac{a^2b^2c^2d^2}{v^2}\right] \\ &=\frac{1}{64}\left(a^2+b^2+c^2+d^2-\frac{16a^2b^2c^2d^2}{v^2}\right)=\frac{1}{4}\left(R_G^2-r_H^2\right) \end{aligned} \tag{13}$$

其 6 点共球球心坐标，将 $n=4$ 代入公式(2)为：

$$O_{1/4}=\begin{cases} x=\dfrac{1}{2\times4}\left[a+0+0+bct-2(2-4)\dfrac{-ab^2c^2t}{v}\right]=\dfrac{1}{8}\left(a+bct\dfrac{v-4abc}{v}\right)\\ y=\dfrac{1}{2\times4}\left[0+b+0+act-2(2-4)\dfrac{-a^2bc^2t}{v}\right]=\dfrac{1}{8}\left(b+act\dfrac{v-4abc}{v}\right)\\ z=\dfrac{1}{2\times4}\left[0+0+c+abt-2(2-4)\dfrac{-a^2b^2ct}{v}\right]=\dfrac{1}{8}\left(c+abt\dfrac{v-4abc}{v}\right)\end{cases} \tag{14}$$

其 6 点共球球心坐标与垂心 H 距离，将 $n=4$ 代入公式(3)为：

$$HO_{1/4}=\frac{2}{4}\sqrt{R_G^2-r_H^2}=\frac{1}{8}\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2-\frac{16a^2b^2c^2d^2}{v^2}} \tag{15}$$

上述关系见表 1 如下。

Table 1. List of 5 points collinear coordinates of Euler line and Pythagoras four states and radius of 4 common spheres
表 1. 欧拉线 5 点共线坐标及其勾股 4 态 4 共球半径一览表

勾股 4 态	共球点	点坐标符号	分坐标 x	分坐标 y	分坐标 z	垂心重心共球半径
点	8	O	$\frac{1}{2}\left(a+bct\frac{v+2abc}{v}\right)$	$\frac{1}{2}\left(b+act\frac{v+2abc}{v}\right)$	$\frac{1}{2}\left(c+abt\frac{v+2abc}{v}\right)$	$r_O^2=4R_G^2-r_H^2$
线	20	$O_{1/2}=G$	$\frac{1}{4}(a+bct)$	$\frac{1}{4}(b+act)$	$\frac{1}{4}(c+abt)$	$r_{O/2}^2=R_G^2=\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{16}$
面	12	$O_{1/3}$	$\frac{1}{6}\left(a+bct\frac{v-2abc}{v}\right)$	$\frac{1}{6}\left(b+act\frac{v-2abc}{v}\right)$	$\frac{1}{6}\left(c+abt\frac{v-2abc}{v}\right)$	$r_{O/3}^2=\frac{1}{3^2}\left(4R_G^2-r_H^2\right)$
体	6	$O_{1/4}$	$\frac{1}{8}\left(a+bct\frac{v-4abc}{v}\right)$	$\frac{1}{8}\left(b+act\frac{v-4abc}{v}\right)$	$\frac{1}{8}\left(c+abt\frac{v-4abc}{v}\right)$	$r_{O/4}^2=\frac{1}{4}\left(R_G^2-r_H^2\right)$
	4	H	$\frac{-ab^2c^2t}{v}$	$\frac{-a^2bc^2t}{v}$	$\frac{-a^2b^2ct}{v}$	$r_H^2=\frac{a^2b^2c^2d^2}{v^2}$

表内：这里：$n=1,2,3,4$；重心球平方：$R_G^2=\frac{1}{16}\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)$；垂心球平方：$r_H^2=\frac{a^2b^2c^2d^2}{v^2}$；$t=\frac{-d^2}{v+abc}$，
$v=\sqrt{a^2b^2c^2+a^2b^2d^2+a^2c^2d^2+b^2c^2d^2}=6V_{ABCD}$。

2.2. 验证勾股 4 态 4 共球半径、球心坐标及算术平均数的欧拉线

2.2.1. 验证勾股 4 态的 4 点同构的坐标间距为欧拉线算术平均数

假设上述公式正确：用 2 点距离公式验算欧拉线之间的距离如下：

- 勾股点态 8 点共球，球心 O 点至垂心 H 点至其间距用 2 点间距公式为：

$$\begin{aligned}HO^2=&\left[\frac{1}{2}\left(a+bct\frac{v+2abc}{v}\right)-\frac{-ab^2c^2t}{v}\right]^2+\left[\frac{1}{2}\left(b+act\frac{v+2abc}{v}\right)-\frac{-a^2bc^2t}{v}\right]^2\\&+\left[\frac{1}{2}\left(c+abt\frac{v+2abc}{v}\right)-\frac{-a^2b^2ct}{v}\right]^2\\&=\frac{1}{4}\left(a^2+b^2+c^2+d^2-\frac{16a^2b^2c^2d^2}{v^2}\right)\end{aligned}$$

两边开方公式(16)等于公式(6)为：

$$\Rightarrow HO = 2\sqrt{R_G^2 - r_H^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - \frac{16a^2b^2c^2d^2}{v^2}} \tag{16}$$

- 勾股线态 20 点共球球心 $O_{1/2} = G$ 重心点，根据同态垂心与重心间距的平方，可以不用坐标，其间距等于重心球与垂心球半径的平方差。$|HG|^2 = R_G^2 - r_H^2$，

  两边开方公式(17)等于公式(9)为：

$$HO_{1/2} = HG = \sqrt{R_G^2 - r_H^2} = \frac{1}{4}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 16\frac{a^2b^2c^2d^2}{v^2}} = \frac{1}{2}HO \tag{17}$$

- 勾股面态 12 点共球球心 $O_{1/3}$ 至垂心 H 点间距，用 2 点坐标距离公式为；

$$\begin{aligned} HO_{1/3}^2 &= \left[\frac{1}{6}\left(a + bct\frac{v-2abc}{v}\right) - \frac{-ab^2c^2t}{v}\right]^2 + \left[\frac{1}{6}\left(b + act\frac{v-2abc}{v}\right) - \frac{-a^2bc^2t}{v}\right]^2 \\ &\quad + \left[\frac{1}{6}\left(c + abt\frac{v-2abc}{v}\right) - \frac{-a^2b^2ct}{v}\right]^2 \\ &= \frac{1}{36}\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 16\frac{a^2b^2c^2d^2}{v^2}\right) \end{aligned}$$

  两边开方公式(18)等于公式(12)为：

$$\Rightarrow HO_{1/3} = \frac{2}{3}\sqrt{R_G^2 - r_H^2} = \frac{1}{6}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - \frac{16a^2b^2c^2d^2}{v^2}} = \frac{1}{3}HO \tag{18}$$

- 勾股体态 6 点共球球心 $O_{1/4}$ 至垂心 H 点，用 2 点坐标距离公式为；

$$\begin{aligned} HO_{1/4}^2 &= \left[\frac{1}{8}\left(a + bct\frac{v-4abc}{v}\right) - \frac{-ab^2c^2t}{v}\right]^2 + \left[\frac{1}{8}\left(b + act\frac{v-4abc}{v}\right) - \frac{-a^2bc^2t}{v}\right]^2 \\ &\quad + \left[\frac{1}{8}\left(c + abt\frac{v-4abc}{v}\right) - \frac{-a^2b^2ct}{v}\right]^2 \\ &= \frac{1}{64}\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 16\frac{a^2b^2c^2d^2}{v^2}\right) \end{aligned}$$

  两边开方公式(19)等于公式(15)为：

$$\Rightarrow HO_{1/4} = \frac{1}{2}\sqrt{R_G^2 - r_H^2} = \frac{1}{8}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - \frac{16a^2b^2c^2d^2}{v^2}} = \frac{1}{4}HO \tag{19}$$

根据公式(16)、(17)、(18)、(19)结果，验证了 4 点为垂心至 8 点共球球心 2 点共线，其间距为该 2 点间距为欧拉线算术平均数。

2.2.2. 验证勾股点态重心垂心共球半径及球心坐标(即垂心四面体的外接球[7]，或称垂心四面体 8 点共球)

证明了 8 点共球球面交 4 垂线共 8 点共球，其中：8 点共球交正交 4 球心，该球心与 4 球重心、4 球垂心共点，因此该共球在这里称“勾股点态一维重心垂心共球”，共球半径的平方等于正交 4 球心至垂心距离的平方和的四分之一，也等于重心球半径与垂心球半径的平方差的 4 倍。

假设公式(4)，公式(5)成立，勾股点态重心垂心共球半径及球心坐标见表 1，将 4 垂线参数方程公式

(20)与 8 点共球半径和球心的球面方程联立公式(21)，即得 4 垂线交该球面 8 点，其中 4 点为正交 4 球的球心、与 4 球重心和垂心共点：

验证如下：

例：

- 过 A 点和垂心 H 点 2 点的垂线参数方程为：

$$\frac{x-a}{\frac{-ab^2c^2t}{v}-a}=\frac{y-0}{\frac{-a^2bc^2t}{v}-0}=\frac{z-0}{\frac{-a^2b^2ct}{v}-0}=t_1 \quad \Rightarrow A=\begin{cases} x=a+\left(\frac{-ab^2c^2t}{v}-a\right)t_1 \\ y=\frac{-a^2bc^2t}{v}t_1 \\ z=\frac{-a^2b^2ct}{v}t_1 \end{cases} \tag{20}$$

8 点共球半径的平方见：公式(4)；球心为 O 见：公式(5)，立球面方程为：将公式(20)代入公式(16)左右式相减：

$$\begin{aligned}&\left[\frac{1}{2}\left(a+bct\frac{v+2abc}{v}\right)-a-\left(\frac{-ab^2c^2t}{v}-a\right)t_1\right]^2+\left[\frac{1}{2}\left(b+act\frac{v+2abc}{v}\right)-\frac{-a^2bc^2t}{v}t_1\right]^2\\&+\left[\frac{1}{2}\left(c+abt\frac{v+2abc}{v}\right)-\frac{-a^2b^2ct}{v}t_1\right]^2=\frac{1}{4}\left(a^2+b^2+c^2+d^2-\frac{4a^2b^2c^2d^2}{v^2}\right)\end{aligned} \tag{21}$$

$$\Rightarrow 0=a^2t_1\left(-2b^2c^2d^2-v^2-b^2c^2d^2t_1+v^2t_1\right)$$

$$得\Rightarrow\left\{\{t_1\to 0\},\left\{t_1\to\frac{2b^2c^2d^2+v^2}{-b^2c^2d^2+v^2}\right\}\right\}$$

将 t_1 代入公式(20)得 8 点共球与过 A 点垂线的 2 交点坐标为：

$$A_1=\begin{cases} x=a \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} 与\ A_2=\begin{cases} x=\frac{ab^2c^2\left[3d^2v+t\left(2b^2c^2d^2+v^2\right)\right]}{b^2c^2d^2v-v^3} \\ y=\frac{a^2bc^2t\left(2b^2c^2d^2+v^2\right)}{b^2c^2d^2v-v^3} \\ z=\frac{a^2b^2ct\left(2b^2c^2d^2+v^2\right)}{b^2c^2d^2v-v^3} \end{cases}$$

同理我们可得：

- 过 B 点和垂心 H 点 2 点的垂线参数方程为：

$$\frac{x-0}{\frac{-ab^2c^2t}{v}-0}=\frac{y-b}{\frac{-a^2bc^2t}{v}-b}=\frac{z-0}{\frac{-a^2b^2ct}{v}-0}=t_1 \quad \Rightarrow B=\begin{cases} x=\frac{-ab^2c^2t}{v}t_1 \\ y=b+\left(\frac{-a^2bc^2t}{v}-b\right)t_1 \\ z=\frac{-a^2b^2ct}{v}t_1 \end{cases} \tag{22}$$

代入共球球面方程：

$$\left[\frac{1}{2}\left(a+bct\frac{v+2abc}{v}\right)-\frac{-ab^2c^2t}{v}t_1\right]^2+\left[\frac{1}{2}\left(b+act\frac{v+2abc}{v}\right)-b-\left(\frac{-a^2bc^2t}{v}-b\right)t_1\right]^2$$
$$+\left[\frac{1}{2}\left(c+abt\frac{v+2abc}{v}\right)-\frac{-a^2b^2ct}{v}t_1\right]^2=\frac{1}{4}\left(a^2+b^2+c^2+d^2-\frac{4a^2b^2c^2d^2}{v^2}\right) \tag{23}$$
$$\Rightarrow 0=b^2t_1\left(-2a^2c^2d^2-v^2-a^2c^2d^2t_1+v^2t_1\right)$$
$$得\left\{\{t_1\to 0\},\left\{t_1\to\frac{-2a^2c^2d^2-v^2}{a^2c^2d^2-v^2}\right\}\right\}$$

将参数 t_1 代回公式(22)过 B 点垂线 2 交点坐标为：

$$B_1=\begin{cases}x=0\\y=b\\z=0\end{cases} 与\ B_2=\begin{cases}x=\dfrac{ab^2c^2t\left(2a^2c^2d^2+v^2\right)}{a^2c^2d^2v-v^3}\\[2ex]y=\dfrac{a^2bc^2\left[3d^2v+t\left(2a^2c^2d^2+v^2\right)\right]}{a^2c^2d^2v-v^3}\\[2ex]z=\dfrac{a^2b^2ct\left(2a^2c^2d^2+v^2\right)}{a^2c^2d^2v-v^3}\end{cases}$$

- 过 C 点和垂心 H 点 2 点的垂线参数方程为：

$$\frac{x-0}{\frac{-ab^2c^2t}{v}-0}=\frac{y-0}{\frac{-a^2bc^2t}{v}-0}=\frac{z-c}{\frac{-a^2b^2ct}{v}-c}=t_1\quad\Rightarrow C=\begin{cases}x=\dfrac{-ab^2c^2t}{v}t_1\\[2ex]y=\dfrac{-a^2bc^2t}{v}t_1\\[2ex]z=c+\left(\dfrac{-a^2b^2ct}{v}-c\right)t_1\end{cases} \tag{24}$$

代入共球球面方程：

$$\left[\frac{1}{2}\left(a+bct\frac{v+2abc}{v}\right)-\frac{-ab^2c^2t}{v}t_1\right]^2+\left[\frac{1}{2}\left(b+act\frac{v+2abc}{v}\right)-\frac{-a^2bc^2t}{v}t_1\right]^2$$
$$+\left[\frac{1}{2}\left(c+abt\frac{v+2abc}{v}\right)-c-\left(\frac{-a^2b^2ct}{v}-c\right)t_1\right]^2=\frac{1}{4}\left(a^2+b^2+c^2+d^2-\frac{4a^2b^2c^2d^2}{v^2}\right) \tag{25}$$
$$\Rightarrow 0=c^2t_1\left(-2a^2b^2d^2-v^2-a^2b^2d^2t_1+v^2t_1\right)$$
$$得\left\{\{t_1\to 0\},\left\{t_1\to\frac{-2a^2b^2d^2-v^2}{a^2b^2d^2-v^2}\right\}\right\}$$

将参数 t_1 代回公式(24)过 C 点垂线 2 交点坐标为：

$$C_1=\begin{cases}x=0\\y=0\\z=c\end{cases} 与\ C_2=\begin{cases}x=\dfrac{ab^2c^2t\left(2a^2b^2d^2+v^2\right)}{a^2b^2d^2v-v^3}\\[2ex]y=\dfrac{a^2bc^2t\left(2a^2b^2d^2+v^2\right)}{a^2b^2d^2v-v^3}\\[2ex]z=\dfrac{a^2b^2c\left[3d^2v+t\left(2a^2b^2d^2+v^2\right)\right]}{a^2b^2d^2v-v^3}\end{cases}$$

- 过 D 点和垂心 H 点 2 点的垂线参数方程为：

$$\frac{x-bct}{\frac{-ab^2c^2t}{v}-bct}=\frac{y-act}{\frac{-a^2bc^2t}{v}-act}=\frac{z-abt}{\frac{-a^2b^2ct}{v}-abt}=t_1 \quad \Rightarrow D=\begin{cases} x=bct+\left(\frac{-ab^2c^2t}{v}-bct\right)t_1 \\ y=act+\left(\frac{-a^2bc^2t}{v}-act\right)t_1 \\ z=abt+\left(\frac{-a^2b^2ct}{v}-abt\right)t_1 \end{cases} \tag{26}$$

代入共球球面方程：

$$\begin{aligned} &\left[\frac{1}{2}\left(a+bct\frac{v+2abc}{v}\right)-bct-\left(\frac{-ab^2c^2t}{v}-bct\right)t_1\right]^2 \\ &+\left[\frac{1}{2}\left(b+act\frac{v+2abc}{v}\right)-act-\left(\frac{-a^2bc^2t}{v}-act\right)t_1\right]^2 \\ &+\left[\frac{1}{2}\left(c+abt\frac{v+2abc}{v}\right)-abt-\left(\frac{-a^2b^2ct}{v}-abt\right)t_1\right]^2 \\ &=\frac{1}{4}\left(a^2+b^2+c^2+d^2-\frac{4a^2b^2c^2d^2}{v^2}\right) \\ &\Rightarrow 0=d^2t_1\left(-2a^2b^2c^2-v^2-a^2b^2c^2t_1+v^2t_1\right) \\ &\text{得}\left\{\{t_1\to 0\},\left\{t_1\to\frac{-2a^2b^2c^2-v^2}{a^2b^2c^2-v^2}\right\}\right\} \end{aligned} \tag{27}$$

将参数 t_1 代回公式(26)过 D 点垂线 2 交点坐标为：

$$D_1=\begin{cases} x=bct \\ y=act \\ z=abt \end{cases} \text{与 } D_2=\begin{cases} x=\dfrac{ab^2c^2t(2abc+v)}{(abc-v)v} \\ y=\dfrac{a^2bc^2t(2abc+v)}{(abc-v)v} \\ z=\dfrac{a^2b^2ct(2abc+v)}{(abc-v)v} \end{cases}$$

因此，验证 8 点共球半径的平方公式(4)，以及 8 点共球球心坐标公式(5)成立。且证明了 8 点共球球面交 4 垂线共 8 点共球，其中：8 点共球交正交 4 球心，该球心与 4 球重心、4 球垂心共点，因此该共球在这里称“勾股点态一维重心垂心共球”，共球半径的平方等于正交 4 球心至垂心距离的平方和的四分之一，也等于重心球半径与垂心球半径的平方差的 4 倍。

2.2.3. 验证勾股线态 20 点共球半径及球心坐标(共球面与 6 棱和 4 垂线各交 2 点)

证明“勾股线态二维重心垂心共球”球面交 4 垂线以及 6 棱共 20 点共球，20 点共球球心为四维重心；共球半径的平方等于四维重心球半径的平方。

假设公式(7)、公式(8)成立，勾股线态重心垂心共球半径及球心坐标见表 1，将 4 垂线参数方程与 20 点共球半径和球心的球面方程联立，即得 4 垂线交该球面 8 点，同理，将 6 棱线参数方程与 20 点共球球面方程联立，可得共球球面交 6 棱，各棱重心垂心 2 点，合计 12 点共球交点，合计 20 点共球。

验证 1：4 垂线与该共球交 8 点：

例：

- 过 A 点与 H 垂心的垂线的参数方程见：公式(20)代入公式(28)

  20 点共球球面方程为：

$$\begin{aligned}&\left[\frac{1}{4}(a+bct)-a-\left(\frac{-ab^2c^2t}{v}-a\right)t_1\right]^2+\left[\frac{1}{4}(b+act)-\frac{-a^2bc^2t}{v}t_1\right]^2\\&+\left[\frac{1}{4}(c+abt)-\frac{-a^2b^2ct}{v}t_1\right]^2=\frac{1}{16}\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)\end{aligned} \tag{28}$$

将得到的参数：$\left\{\left\{t_1\to-\frac{2v}{-3v+\sqrt{8b^2c^2d^2+v^2}}\right\},\left\{t_1\to\frac{2v}{3v+\sqrt{8b^2c^2d^2+v^2}}\right\}\right\}$代入过 A 点垂线参数方程公式(20)得 2 交点为：

$$A_1=\begin{cases}x=\dfrac{a\left(2b^2c^2t-v+\sqrt{8b^2c^2d^2+v^2}\right)}{-3v+\sqrt{8b^2c^2d^2+v^2}}\\ y=\dfrac{2a^2bc^2t}{-3v+\sqrt{8b^2c^2d^2+v^2}}\\ z=\dfrac{2a^2b^2ct}{-3v+\sqrt{8b^2c^2d^2+v^2}}\end{cases} \text{和 } A_2=\begin{cases}x=\dfrac{a\left(-2b^2c^2t+v+\sqrt{8b^2c^2d^2+v^2}\right)}{3v+\sqrt{8b^2c^2d^2+v^2}}\\ y=-\dfrac{2a^2bc^2t}{3v+\sqrt{8b^2c^2d^2+v^2}}\\ z=-\dfrac{2a^2b^2ct}{3v+\sqrt{8b^2c^2d^2+v^2}}\end{cases}$$

- 过 B 点与 H 垂心的垂线的参数方程见：公式(22)代入公式(29)

  20 点共球球面方程为：

$$\begin{aligned}&\left[\frac{1}{4}(a+bct)-\frac{-ab^2c^2t}{v}t_1\right]^2+\left[\frac{1}{4}(b+act)-b-\left(\frac{-a^2bc^2t}{v}-b\right)t_1\right]^2\\&+\left[\frac{1}{4}(c+abt)-\frac{-a^2b^2ct}{v}t_1\right]^2=\frac{1}{16}\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)\end{aligned} \tag{29}$$

将得到的参数：$\left\{\left\{t_1\to\frac{2v}{3v-\sqrt{8a^2c^2d^2+v^2}}\right\},\left\{t_1\to\frac{2v}{3v+\sqrt{8b^2c^2d^2+v^2}}\right\}\right\}$代入过 B 点垂线参数方程公式(22)得 2 交点为：

$$B_1=\begin{cases}x=\dfrac{2ab^2c^2t}{-3v+\sqrt{8a^2c^2d^2+v^2}}\\ y=\dfrac{b\left(2a^2c^2t-v+\sqrt{8a^2c^2d^2+v^2}\right)}{-3v+\sqrt{8a^2c^2d^2+v^2}}\\ z=\dfrac{2a^2b^2ct}{-3v+\sqrt{8a^2c^2d^2+v^2}}\end{cases} \text{和 } B_2=\begin{cases}x=-\dfrac{2ab^2c^2t}{3v+\sqrt{8b^2c^2d^2+v^2}}\\ y=\dfrac{b\left(-2a^2c^2t+v+\sqrt{8b^2c^2d^2+v^2}\right)}{3v+\sqrt{8b^2c^2d^2+v^2}}\\ z=-\dfrac{2a^2b^2ct}{3v+\sqrt{8b^2c^2d^2+v^2}}\end{cases}$$

- 过 C 点与 H 垂心的垂线的参数方程见：公式(24)代入公式(30)

  20 点共球球面方程为：

$$\left[\frac{1}{4}(a+bct)-\frac{-ab^2c^2t}{v}t_1\right]^2+\left[\frac{1}{4}(b+act)-\frac{-a^2bc^2t}{v}t_1\right]^2 \\ +\left[\frac{1}{4}(c+abt)-c-\left(\frac{-a^2b^2ct}{v}-c\right)t_1\right]^2=\frac{1}{16}\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right) \tag{30}$$

将得到的参数：$\left\{\left\{t_1\to\frac{2v}{3v-\sqrt{8a^2b^2d^2+v^2}}\right\},\left\{t_1\to\frac{2v}{3v+\sqrt{8a^2b^2d^2+v^2}}\right\}\right\}$代入过 C 点垂线参数方程公式(24)得 2 交点为：

$$C_1=\begin{cases}x=-\dfrac{2ab^2c^2t}{3v-\sqrt{8a^2b^2d^2+v^2}}\\ y=-\dfrac{2a^2bc^2t}{3v-\sqrt{8a^2b^2d^2+v^2}}\\ z=\dfrac{c\left(2a^2b^2t-v+\sqrt{8a^2b^2d^2+v^2}\right)}{-3v+\sqrt{8a^2b^2d^2+v^2}}\end{cases} \text{和 } C_2=\begin{cases}x=-\dfrac{2ab^2c^2t}{3v+\sqrt{8a^2b^2d^2+v^2}}\\ y=-\dfrac{2a^2bc^2t}{3v+\sqrt{8a^2b^2d^2+v^2}}\\ z=\dfrac{c\left(-2a^2b^2t+v+\sqrt{8a^2b^2d^2+v^2}\right)}{3v+\sqrt{8a^2b^2d^2+v^2}}\end{cases}$$

- 过 D 点与 H 垂心的垂线的参数方程见：公式(26)代入公式(31)

  20 点共球球面方程为：

$$\left[\frac{1}{4}(a+bct)-bct-\left(\frac{-ab^2c^2t}{v}-bct\right)t_1\right]^2+\left[\frac{1}{4}(b+act)-act-\left(\frac{-a^2bc^2t}{v}-act\right)t_1\right]^2 \\ +\left[\frac{1}{4}(c+abt)-abt-\left(\frac{-a^2b^2ct}{v}-abt\right)t_1\right]^2=\frac{1}{16}\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right) \tag{31}$$

将得到的参数：$\left\{\left\{t_1\to-\frac{2v}{-3v+\sqrt{8a^2b^2c^2+v^2}}\right\},\left\{t_1\to\frac{2v}{3v+\sqrt{8a^2b^2c^2+v^2}}\right\}\right\}$代入过 D 点垂线参数方程公式(26)得 2 交点为：

$$D_1=\begin{cases}x=\dfrac{bct\left(4abc-7v-\sqrt{8a^2b^2c^2+v^2}\right)}{4abc-4v}\\ y=\dfrac{act\left(4abc-7v-\sqrt{8a^2b^2c^2+v^2}\right)}{4abc-4v}\\ z=\dfrac{abt\left(4abc-7v-\sqrt{8a^2b^2c^2+v^2}\right)}{4abc-4v}\end{cases} \text{和 } D_2=\begin{cases}x=\dfrac{bct\left(4abc-v-\sqrt{8a^2b^2c^2+v^2}\right)}{4abc-4v}\\ y=\dfrac{act\left(4abc-v-\sqrt{8a^2b^2c^2+v^2}\right)}{4abc-4v}\\ z=\dfrac{abt\left(4abc-v-\sqrt{8a^2b^2c^2+v^2}\right)}{4abc-4v}\end{cases}$$

验证 2：6 棱重心与该共球交 6 点：

- 过 A 点与 B 点的 AB 棱的直线的参数方程为：

$$\frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{b-0}=\frac{z-0}{0-0}=t_1 \quad\Rightarrow D_{AB}=\begin{cases}x=a-at_1\\ y=bt_1\\ z=0\end{cases} \tag{32}$$

将直线参数公式(32)代入 20 点共球球面方程公式(33)求参数 t_1：

$$\left[\frac{1}{4}(a+bct)-(a-at_1)\right]^2+\left[\frac{1}{4}(b+act)-bt_1\right]^2+\left[\frac{1}{4}(c+abt)-0\right]^2=\frac{1}{16}\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right) \tag{33}$$

将得到的参数：$\left\{\left\{t_1\to\frac{1}{2}\right\},\left\{t_1\to\frac{a^2}{a^2+b^2}\right\}\right\}$代入过 A、B 直线参数方程公式(32)得 2 交点为：

$$D_{AB1}=G_{AB}=\begin{cases}x=a-a\frac{1}{2}=\frac{a}{2}\\ y=b\frac{1}{2}=\frac{b}{2}\\ z=0\end{cases} \text{和 } D_{AB2}=H_{AB}=\begin{cases}x=a-a\frac{a^2}{a^2+b^2}=\frac{ab^2}{a^2+b^2}\\ y=b\frac{a^2}{a^2+b^2}=\frac{a^2b}{a^2+b^2}\\ z=0\end{cases}$$

该共球球面与 AB 棱交的 2 点分别为：二维 AB 直线的重心和垂心。

同理：我们可以得到该共球球面与其它 5 棱的重心和垂心相交。

∵该共球球心与四维重心共点，而 6 棱重心为二维重心；

∴其间距可以使用重心间间距可不用使用坐标，直接使用重心球间距公式[5]计算。

$$(P_1P_2)^2=r_{p1}^2+r_{p2}^2-2\left(n_{p1}\times m_{p2}\right)^{-1}\sum_{r_G=p_1\cap p_2}r_G^2$$

例：

- $$\begin{aligned}r_{O/2}^2&=GH_{GAB}^2=R_G^2+R_{GAB}^2-2(4\times2)^{-1}\left(a^2+b^2\right)\\&=\frac{1}{4^2}\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)+\frac{1}{2^2}\left(a^2+b^2\right)-2(4\times2)^{-1}\left(a^2+b^2\right)\\&=\frac{1}{4^2}\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)=R_G^2\end{aligned}$$

同理可得其它 5 点二维重心与共球球心间距为：

- $r_{O/2}^2=GH_{GAC}^2=\frac{1}{4^2}\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)=R_G^2$
- $r_{O/2}^2=GH_{GBC}^2=\frac{1}{4^2}\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)=R_G^2$
- $r_{O/2}^2=GH_{GAD}^2=\frac{1}{4^2}\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)=R_G^2$
- $r_{O/2}^2=GH_{GBD}^2=\frac{1}{4^2}\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)=R_G^2$
- $r_{O/2}^2=GH_{GCD}^2=\frac{1}{4^2}\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)=R_G^2$

验证 3：6 棱垂心与该共球交 6 点：用 2 点坐标距离公式可得：

例：

- $O_{\frac{1}{2}}H_{AB}^2=\left[\frac{1}{4}(a+bct)-\frac{ab^2}{a^2+b^2}\right]^2+\left[\frac{1}{4}(b+act)-\frac{a^2b}{a^2+b^2}\right]^2+\left[\frac{1}{4}(c+abt)-0\right]^2=R_G^2$
- $O_{\frac{1}{2}}H_{AC}^2=\left[\frac{1}{4}(a+bct)-\frac{ac^2}{a^2+c^2}\right]^2+\left[\frac{1}{4}(b+act)-0\right]^2+\left[\frac{1}{4}(c+abt)-\frac{a^2c}{a^2+c^2}\right]^2=R_G^2$
- $O_{\frac{1}{2}}H_{BC}^2=\left[\frac{1}{4}(a+bct)-0\right]^2+\left[\frac{1}{4}(b+act)-\frac{bc^2}{b^2+c^2}\right]^2+\left[\frac{1}{4}(c+abt)-\frac{b^2c}{b^2+c^2}\right]^2=R_G^2$

- $$O_{\frac{1}{2}}H_{AD}^2=\left[\frac{1}{4}(a+bct)-\frac{-avt}{a^2+d^2}\right]^2+\left[\frac{1}{4}(b+act)-\frac{a^3ct}{a^2+d^2}\right]^2+\left[\frac{1}{4}(c+abt)-\frac{a^3bt}{a^2+d^2}\right]^2=R_G^2$$
- $$O_{\frac{1}{2}}H_{BD}^2=\left[\frac{1}{4}(a+bct)-\frac{b^3ct}{b^2+d^2}\right]^2+\left[\frac{1}{4}(b+act)-\frac{-bvt}{b^2+d^2}\right]^2+\left[\frac{1}{4}(c+abt)-\frac{ab^3t}{b^2+d^2}\right]^2=R_G^2$$
- $$O_{\frac{1}{2}}H_{CD}^2=\left[\frac{1}{4}(a+bct)-\frac{bc^3t}{c^2+d^2}\right]^2+\left[\frac{1}{4}(b+act)-\frac{ac^3t}{c^2+d^2}\right]^2+\left[\frac{1}{4}(c+abt)-\frac{-cvt}{c^2+d^2}\right]^2=R_G^2$$

通过上述验证：20 点共球球心以及半径验证成立。

(其中：二维棱 12 点：各棱重心与垂心 2 点，并与 4 垂线 8 点：各垂线交 2 点共，合计 20 点共球。)

2.2.4. 验证勾股面态 12 点共球[8]半径及球心坐标(即 4 面重心垂心各 2 点；以及 4 垂线各另 1 交点)

证明“勾股面态三维重心垂心共球”球面交 4 垂线 8 点(含 4 面垂心)以及 4 面重心共 12 点共球，三维面态 12 点共球半径等于一维点态 8 点共球半径的三分之一。

假设公式(10)、公式(11)成立，勾股面态重心垂心共球半径及球心坐标见表 1，将 4 垂线参数方程与 12 点共球半径和球心的球面方程联立，即得 4 垂线交该球面 8 点；将各面 4 点重心与 12 点共球球心按 2 点坐标距离公式验算，可得勾股面态 12 点共球及半径。

验证 1：4 垂线与该共球交 8 点：

例：

- 过 A 点与 H 垂心的垂线的参数方程见：公式(20)代入公式(34)

12 点共球球面方程为：

$$\begin{aligned}&\left[\frac{1}{6}\left(a+bct\frac{v-2abc}{v}\right)-a-\left(\frac{-ab^2c^2t}{v}-a\right)t_1\right]^2+\left[\frac{1}{6}\left(b+act\frac{v-2abc}{v}\right)-\frac{-a^2bc^2t}{v}t_1\right]^2\\&+\left[\frac{1}{6}\left(c+abt\frac{v-2abc}{v}\right)-\frac{-a^2b^2ct}{v}t_1\right]^2=\frac{1}{36}\left(a^2+b^2+c^2+d^2-\frac{4a^2b^2c^2d^2}{v^2}\right)\end{aligned}\tag{34}$$

将得到的参数：$\left\{\left\{t_1\to\frac{2}{3}\right\},\left\{t_1\to\frac{v^2}{-b^2c^2d^2+v^2}\right\}\right\}$代入过 A 点垂线参数方程公式(20)得 2 交点为：

$$A_1=\begin{cases}x=\dfrac{av-2ab^2c^2t}{3v}\\ y=\dfrac{-2a^2bc^2t}{3v}\\ z=\dfrac{-2a^2b^2ct}{3v}\end{cases}\quad 和\ A_2=H_{BCD}=\begin{cases}x=\dfrac{b^3c^3t}{s_{BCD}^2}\\ y=\dfrac{-bc^2vt}{s_{BCD}^2}\\ z=\dfrac{-b^2cvt}{s_{BCD}^2}\end{cases}$$

这里：H_{BCD} 为 A 点对平面的垂心，$s_{BCD}^2=b^2c^2+b^2d^2+c^2d^2$。

- 过 B 点与 H 垂心的垂线的参数方程见：公式(22)代入公式(35)

12 点共球球面方程为：

$$\begin{aligned}&\left[\frac{1}{6}\left(a+bct\frac{v-2abc}{v}\right)-\frac{-ab^2c^2t}{v}t_1\right]^2+\left[\frac{1}{6}\left(b+act\frac{v-2abc}{v}\right)-b-\left(\frac{-a^2bc^2t}{v}-b\right)t_1\right]^2\\&+\left[\frac{1}{6}\left(c+abt\frac{v-2abc}{v}\right)-\frac{-a^2b^2ct}{v}t_1\right]^2=\frac{1}{36}\left(a^2+b^2+c^2+d^2-\frac{4a^2b^2c^2d^2}{v^2}\right)\end{aligned}\tag{35}$$

将得到的参数：$\left\{\left\{t_1 \to \frac{2}{3}\right\},\left\{t_1 \to \frac{v^2}{-a^2c^2d^2+v^2}\right\}\right\}$代入过 B 点垂线参数方程公式(22)得 2 交点为：

$$B_1=\begin{cases} x=\dfrac{-2ab^2c^2t}{3v} \\ y=\dfrac{bv-2a^2bc^2t}{3v} \\ z=\dfrac{-2a^2b^2ct}{3v} \end{cases} \text{和 } B_2=H_{ACD}=\begin{cases} x=-\dfrac{ac^2tv}{s_{ACD}^2} \\ y=\dfrac{a^3c^3t}{s_{ACD}^2} \\ z=-\dfrac{a^2ctv}{s_{ACD}^2} \end{cases}$$

这里：H_{ACD} 为 B 点对平面的垂心，$s_{ACD}^2=a^2c^2+a^2d^2+c^2d^2$。

- 过 C 点与 H 垂心的垂线的参数方程见：公式(24)代入公式(36)

  12 点共球球面方程为：

$$\left[\frac{1}{6}\left(a+bct\frac{v-2abc}{v}\right)-\frac{-ab^2c^2t}{v}t_1\right]^2+\left[\frac{1}{6}\left(b+act\frac{v-2abc}{v}\right)-\frac{-a^2bc^2t}{v}t_1\right]^2 \\ +\left[\frac{1}{6}\left(c+abt\frac{v-2abc}{v}\right)-c-\left(\frac{-a^2b^2ct}{v}-c\right)t_1\right]^2=\frac{1}{36}\left(a^2+b^2+c^2+d^2-\frac{4a^2b^2c^2d^2}{v^2}\right) \tag{36}$$

将得到的参数：$\left\{\left\{t_1 \to \frac{2}{3}\right\},\left\{t_1 \to \frac{v^2}{-a^2b^2d^2+v^2}\right\}\right\}$代入过 C 点垂线参数方程公式(24)得 2 交点为：

$$C_1=\begin{cases} x=\dfrac{-2ab^2c^2t}{3v} \\ y=\dfrac{-2a^2bc^2t}{3v} \\ z=\dfrac{cv-2a^2b^2ct}{3v} \end{cases} \text{和 } C_2=H_{ABD}=\begin{cases} x=\dfrac{-ab^2tv}{s_{ABD}^2} \\ y=\dfrac{-a^2btv}{s_{ABD}^2} \\ z=\dfrac{a^3b^3t}{s_{ABD}^2} \end{cases}$$

这里：H_{ABD} 为 C 点对平面的垂心，$s_{ABD}^2=a^2b^2+a^2d^2+b^2d^2$。

- 过 D 点与 H 垂心的垂线的参数方程见：公式(26)代入公式(37)

  12 点共球球面方程为：

$$\left[\frac{1}{6}\left(a+bct\frac{v-2abc}{v}\right)-bct-\left(\frac{-ab^2c^2t}{v}-bct\right)t_1\right]^2 \\ +\left[\frac{1}{6}\left(b+act\frac{v-2abc}{v}\right)-act-\left(\frac{-a^2bc^2t}{v}-act\right)t_1\right]^2 \\ +\left[\frac{1}{6}\left(c+abt\frac{v-2abc}{v}\right)-abt-\left(\frac{-a^2b^2ct}{v}-abt\right)t_1\right]^2 \\ =\frac{1}{36}\left(a^2+b^2+c^2+d^2-\frac{4a^2b^2c^2d^2}{v^2}\right) \tag{37}$$

将得到的参数：$\left\{\left\{t_1 \to \frac{2}{3}\right\},\left\{t_1 \to \frac{v^2}{-a^2b^2c^2+v^2}\right\}\right\}$代入过 D 点垂线参数方程公式(26)得 2 交点为：

$$D_1=\begin{cases}x=\dfrac{bct\left(v-2abc\right)}{3v}\\ y=\dfrac{act\left(v-2abc\right)}{3v}\\ z=\dfrac{abt\left(v-2abc\right)}{3v}\end{cases} \text{和 } D_2=H_{ABC}=\begin{cases}x=\dfrac{ab^2c^2}{s_{ABC}^2}\\ y=\dfrac{a^2bc^2}{s_{ABC}^2}\\ z=\dfrac{a^2b^2c}{s_{ABC}^2}\end{cases}$$

这里：H_{ABC} 为 D 点对平面的垂心，$s_{ABC}^2=a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2$。

通过上述验证：12 点共球球心以及半径验证成立。

(其中：三维面 8 点：各面重心与垂心 2 点，并与 4 垂线 2 点中的另 1 点，4 垂线 4 点；合计 12 点共球。)

2.2.5. 验证勾股体态 6 点共球半径及球心坐标

证明“勾股面态四维重心垂心共球”球面交 4 垂线 5 点(含 1 点体垂心)以及 1 点体重心共 6 点共球，四维体态 6 点共球半径平方与 6 点共球球心至垂心间距平方相同：等于一维点态球心 O 至 4 维体态垂心间距的四分之一。

假设公式(13)、公式(14)成立，勾股体态重心垂心共球半径及球心坐标见表 1，将 4 垂线参数方程与 6 点共球半径和球心的球面方程联立，即得 4 垂线交该球面 5 点；将 1 点体重心与 6 点共球球心按 2 点坐标距离公式验算，可得勾股体态 6 点共球及半径。

验证 1：4 垂线与该共球交 5 点：

例：

- 过 A 点与 H 垂心的垂线的参数方程见：公式(20)代入公式(38)

  6 点共球球面方程为：

$$\begin{aligned}&\left[\frac{1}{8}\left(a+bct\frac{v-4abc}{v}\right)-a-\left(\frac{-ab^2c^2t}{v}-a\right)t_1\right]^2+\left[\frac{1}{8}\left(b+act\frac{v-4abc}{v}\right)-\frac{-a^2bc^2t}{v}t_1\right]^2\\&+\left[\frac{1}{8}\left(c+abt\frac{v-4abc}{v}\right)-\frac{-a^2b^2ct}{v}t_1\right]^2\\&=\frac{1}{64}\left(a^2+b^2+c^2+d^2-\frac{16a^2b^2c^2d^2}{v^2}\right)=\frac{1}{4}\left(R_G^2-r_H^2\right)\end{aligned}\tag{38}$$

  将得到的参数：$\left\{\{t_1\to 1\},\left\{t_1\to\dfrac{3v^2}{4\left(-b^2c^2d^2+v^2\right)}\right\}\right\}$代入过 A 点垂线参数方程公式(20)得 2 交点为：

$$A_1=H=\begin{cases}x=\dfrac{-ab^2c^2t}{v}\\ y=\dfrac{-a^2bc^2t}{v}\\ z=\dfrac{-a^2b^2ct}{v}\end{cases} \text{和 } A_2=\begin{cases}x=\dfrac{a\left[4a^2c^2d^2+\left(3b^2c^2t-v\right)v\right]}{4a^2c^2d^2-4v^2}\\ y=\dfrac{3a^2bc^2tv}{4b^2c^2d^2-4v^2}\\ z=\dfrac{3a^2b^2ctv}{4b^2c^2d^2-4v^2}\end{cases}$$

- 过 B 点与 H 垂心的垂线的参数方程见：公式(22)代入公式(39)

  6 点共球球面方程为：

$$\left[\frac{1}{8}\left(a+bct\frac{v-4abc}{v}\right)-\frac{-ab^2c^2t}{v}t_1\right]^2+\left[\frac{1}{8}\left(b+act\frac{v-4abc}{v}\right)-b-\left(\frac{-a^2bc^2t}{v}-b\right)t_1\right]^2$$
$$+\left[\frac{1}{8}\left(c+abt\frac{v-4abc}{v}\right)-\frac{-a^2b^2ct}{v}t_1\right]^2 \tag{39}$$
$$=\frac{1}{64}\left(a^2+b^2+c^2+d^2-\frac{16a^2b^2c^2d^2}{v^2}\right)=\frac{1}{4}\left(R_G^2-r_H^2\right)$$

将得到的参数：$\left\{\{t_1\to 1\},\left\{t_1\to\frac{3v^2}{4\left(-a^2c^2d^2+v^2\right)}\right\}\right\}$代入过 A 点垂线参数方程公式(22)得 2 交点为：

$$B_1=H=\begin{cases}x=\frac{-ab^2c^2t}{v}\\ y=\frac{-a^2bc^2t}{v}\\ z=\frac{-a^2b^2ct}{v}\end{cases} \text{和 } B_2=\begin{cases}x=\frac{3ab^2c^2tv}{4a^2c^2d^2-4v^2}\\ y=\frac{b\left[4a^2c^2d^2+\left(3a^2c^2t-v\right)v\right]}{4a^2c^2d^2-4v^2}\\ z=\frac{3a^2b^2ctv}{4a^2c^2d^2-4v^2}\end{cases}$$

- 过 C 点与 H 垂心的垂线的参数方程见：公式(24)代入公式(40)

  6 点共球球面方程为：

$$\left[\frac{1}{8}\left(a+bct\frac{v-4abc}{v}\right)-\frac{-ab^2c^2t}{v}t_1\right]^2+\left[\frac{1}{8}\left(b+act\frac{v-4abc}{v}\right)-\frac{-a^2bc^2t}{v}t_1\right]^2$$
$$+\left[\frac{1}{8}\left(c+abt\frac{v-4abc}{v}\right)-c-\left(\frac{-a^2b^2ct}{v}-c\right)t_1\right]^2 \tag{40}$$
$$=\frac{1}{64}\left(a^2+b^2+c^2+d^2-\frac{16a^2b^2c^2d^2}{v^2}\right)=\frac{1}{4}\left(R_G^2-r_H^2\right)$$

将得到的参数：$\left\{\{t_1\to 1\},\left\{t_1\to\frac{3v^2}{4\left(-a^2b^2d^2+v^2\right)}\right\}\right\}$代入过 A 点垂线参数方程公式(24)得 2 交点为：

$$C_1=H=\begin{cases}x=\frac{-ab^2c^2t}{v}\\ y=\frac{-a^2bc^2t}{v}\\ z=\frac{-a^2b^2ct}{v}\end{cases} \text{和 } C_2=\begin{cases}x=\frac{3ab^2c^2tv}{4a^2b^2d^2-4v^2}\\ y=\frac{3a^2bc^2tv}{4a^2b^2d^2-4v^2}\\ z=\frac{c\left[4a^2b^2d^2+\left(3a^2b^2t-v\right)v\right]}{4a^2b^2d^2-4v^2}\end{cases}$$

- 过 D 点与 H 垂心的垂线的参数方程见：公式(26)代入公式(41)

  6 点共球球面方程为：

$$\left[\frac{1}{8}\left(a+bct\frac{v-4abc}{v}\right)-bct-\left(\frac{-ab^2c^2t}{v}-bct\right)t_1\right]^2+\left[\frac{1}{8}\left(b+act\frac{v-4abc}{v}\right)-act-\left(\frac{-a^2bc^2t}{v}-act\right)t_1\right]^2$$
$$+\left[\frac{1}{8}\left(c+abt\frac{v-4abc}{v}\right)-abt-\left(\frac{-a^2b^2ct}{v}-abt\right)t_1\right]^2 \tag{41}$$
$$=\frac{1}{64}\left(a^2+b^2+c^2+d^2-\frac{16a^2b^2c^2d^2}{v^2}\right)=\frac{1}{4}\left(R_G^2-r_H^2\right)$$

将得到的参数：$\left\{\{t_1 \to 1\},\left\{t_1 \to \frac{3v^2}{4\left(-a^2b^2c^2+v^2\right)}\right\}\right\}$代入过 D 点垂线参数方程公式(26)得 2 交点为：

$$D_1 = H = \begin{cases} x = \dfrac{-ab^2c^2t}{v} \\ y = \dfrac{-a^2bc^2t}{v} \\ z = \dfrac{-a^2b^2ct}{v} \end{cases} \text{和 } D_2 = \begin{cases} x = \dfrac{bct\left(4abc-v\right)}{4abc-4v} \\ y = \dfrac{act\left(4abc-v\right)}{4abc-4v} \\ z = \dfrac{abt\left(4abc-v\right)}{4abc-4v} \end{cases}$$

验证 2：4 维重心与该共球球心 2 点坐标距离

$$\left[\frac{1}{8}\left(a+bct\frac{v-4abc}{v}\right)-\frac{a+bct}{4}\right]^2+\left[\frac{1}{8}\left(b+act\frac{v-4abc}{v}\right)-\frac{b+act}{4}\right]^2$$
$$+\left[\frac{1}{8}\left(c+abt\frac{v-4abc}{v}\right)-\frac{c+abt}{4}\right]^2=\frac{1}{64}\left(a^2+b^2+c^2+d^2-\frac{16a^2b^2c^2d^2}{v^2}\right)$$

通过上述验证：6 点共球球心以及半径验证成立。

(其中：4 维体 6 点：体重心与垂心 2 点，并与 4 垂线 2 点中的另 1 点，4 垂线 4 点；合计 6 点共球。)

3. 总结

通过上述验证，证明了 4 球正交形成的勾股 4 态[1]，存在点、线、面、体 4 个共球，它们交 4 垂线同时交同态重心和垂心。4 个共球半径公式(1)成立、4 个共球球心坐标公式(2)成立、4 个共球球心坐标与垂心 H 距离公式(3)成立。且得出如下结论。

3.1. 一至四维重心与垂心 4 个共球半径符合公式(1)

一至四维重心与垂心 4 个共球半径的变化规律符合公式(1)，均在重心球与垂心球半径间。

3.2. 一至四维重心与垂心 4 个共球球心坐标符合公式(2)

一至四维重心与垂心 4 个共球球心坐标的变化规律符合公式(2)，为 4 球球心坐标与垂心坐标间。

3.3. 一至四维重心与垂心 4 个共球球心坐标距垂心坐标间距符合公式(3)

一至四维重心与垂心 4 个共球球心坐标距垂心坐标 5 点共线，即欧拉线，4 个共球球心距垂心间距为算术平均数。

参考文献

[1] 蔡国伟. 论勾股四态、以及正交球心间同构的场方程[J]. 理论数学, 2019, 9(7): 763-770.

[2] 陶杰. 勾股定理的新探索——把勾股定理推广到三维空间[J]. 中等数学, 1983(2): 44.

[3] 蔡国伟. 体积勾股定理的证明[J]. 理论数学, 2019, 9(6): 723-729.

[4] 张丽. 正交四面体中的欧拉线定理[J]. 毕节师范高等专科学校学报, 2003, 21(4): 60-61.

[5] 蔡国伟. 证明正交四球心间 15 个重心球及距离公式的算法[J]. 理论数学, 2019, 9(8): 880-889.

[6] 蔡国伟. 证明正交四球心间 15 个垂心球及距离公式的算法[J]. 理论数学, 2019, 9(8): 928-948.

[7] 李晶, 张国坤. 探寻四面体外接球球心位置[J]. 上海中学数学, 2014(9): 22-24.

[8] 胡如松. 垂心四面体的十二点球[J]. 中等数学, 1998(3): 23-24.