Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(10), 2803-2814
Published Online October 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.1310288

Hans汉斯

分形集上调和(p, s)-凸函数的Jensen和Jensen-Mercer不等式及其应用

李　然，连铁艳，党筱楠

陕西科技大学数学与数据科学学院，陕西　西安

收稿日期：2023年9月3日；录用日期：2023年10月3日；发布日期：2023年10月11日

摘　要

首次提出分形集上调和(p, s)-凸函数的定义，建立了该函数的广义Jensen不等式和广义Jensen-Mercer不等式。引入局部分数阶积分，利用构建的Jensen不等式和Jensen-Mercer不等式，得到了广义调和(p, s)-凸函数的Hermite-Hadamard不等式。最后，讨论了部分结果在概率中的一些应用。

关键词

广义调和(p, s)-凸函数，**Jensen-Mercer**不等式，**Hermite-Hadamard**不等式

Jensen and Jensen-Mercer Inequalities for Harmonic (p, s)-Convex Functions on Fractal Sets and Their Applications

Ran Li, Tieyan Lian, Xiaonan Dang

School of Mathematics and Data Science, Shaanxi University of Science and Technology, Xi'an Shaanxi

Received: Sep. 3rd, 2023; accepted: Oct. 3rd, 2023; published: Oct. 11th, 2023

Abstract

For the first time, the definition of harmonic (p, s)-convex functions on fractal sets is proposed. The generalized Jensen inequality and the generalized Jensen-Mercer inequality for the functions are established. By introducing local fractional order integrals and the constructed Jensen and Jensen-Mercer inequalities, the Hermite-Hadamard inequality for generalized harmonic (p, s)-convex functions is derived. Finally, applications of some results in probability are discussed.

文章引用: 李然, 连铁艳, 党筱楠. 分形集上调和(p, s)-凸函数的 Jensen 和 Jensen-Mercer 不等式及其应用[J]. 理论数学, 2023, 13(10): 2803-2814. DOI: 10.12677/pm.2023.1310288

Keywords

Generalized Harmonic (*p*, *s*)-Convex Function, Jensen-Mercer Inequality, Hermite-Hadamard Inequality

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

众所周知，在纯数学和应用数学的不同领域中，函数的凸性得到了广泛的应用。但实际中，很多问题并不满足凸性条件，故对凸函数概念的推广，具有重要的实际和理论意义。İşcan [1]研究了一类新的广义凸函数，称为调和凸函数。之后，İşcan 进一步推广了调和凸函数的概念，提出了调和 s-凸函数[2]。在[3]中，Baloch 和 İşcan 又引入了调和 p-凸函数和调和(p, s)-凸函数的概念。

定义 1 [3]令 $I \subset \mathbb{R}\setminus\{0\}$， $f: I \to \mathbb{R}$。如果对于任意 $x, y \in I$， $t \in [0,1]$，满足

$$f\left(\frac{xy}{\left[(1-t)x^p + ty^p\right]^{\frac{1}{p}}}\right) \le t^s f(x) + (1-t)^s f(y) \tag{1}$$

则称 f 为区间 I 上的调和(p, s)-凸函数，其中 $p \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$， $s \in (0,1]$。

自函数凸性被推广以来，引入由凸函数延伸出来的函数类并对其相关的各种不等式研究越来越受到关注，得到了许多有意义的结果，可参考文献[4] [5] [6] [7]。Jensen 不等式就是最著名的结果之一，它在不等式理论中起着至关重要的作用，在数学、统计学和信息论中得到了广泛的应用。

定理 1 [8] **Jensen 不等式** 若 f 在区间 I 上是凸函数，则对于任意 $x_i \in I$，满足

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} w_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) \tag{2}$$

其中 $w_i \in [0,1]\,(i = 1,2,\cdots,n)$ 且 $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$。

2003 年，Mercer [9]给出 Jensen 不等式的推广形式。

定理 2 [9] **Jensen-Mercer 不等式** 若 f 在区间 $[a,b] \subset I$ 上是凸函数，则对于任意 $x_i \in [a,b]$，满足

$$f\left(a + b - \sum_{i=1}^{n} w_i x_i\right) \le f(a) + f(b) - \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) \tag{3}$$

其中 $w_i \in [0,1]\,(i = 1,2,\cdots,n)$ 且 $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$。

为了处理处处连续但不可微的函数，Yang 系统地阐述了分形集理论(详见[10] [11])，并引入了局部分数微积分的定义。随着分形理论的不断完善和发展，许多学者又将函数凸性推广到了分形空间。2014 年，Mo 等人[12]在分形空间上定义了广义凸函数。Butt 等人[13]在分形空间中，建立了广义凸函数的 Jensen-Mercer 不等式。2017 年，Sun [14]给出了广义调和凸函数的定义并且研究了该函数的 Hermite-Hadamard 型积分不等式。另外，有关广义调和凸函数的 Jensen 不等式和 Jensen-Mercer 不等式被 Butt 等人[15]证得。

本文的主要目的是在分形空间中给出广义调和(p, s)-凸函数的定义，在更弱的函数条件下建立相关Jensen不等式和Jensen-Mercer不等式。此外，通过对Jensen-Mercer型不等式的改进，利用分数阶积分在分形空间上建立广义调和(p, s)-凸函数的Hermite-Hadamard型积分不等式。

2. 预备知识

设 $\mathbb{R}^{\alpha}\left(0<\alpha\le 1\right)$ 是维数为 α 的分形集，参考文献[10] [11]，则下面运算律成立：

若 $a^{\alpha},b^{\alpha},c^{\alpha}\in\mathbb{R}^{\alpha}$，则

1) $a^{\alpha}+b^{\alpha}\in\mathbb{R}^{\alpha}$，$a^{\alpha}b^{\alpha}\in\mathbb{R}^{\alpha}$；

2) $a^{\alpha}+b^{\alpha}=b^{\alpha}+a^{\alpha}=\left(a+b\right)^{\alpha}=\left(b+a\right)^{\alpha}$，$a^{\alpha}b^{\alpha}=b^{\alpha}a^{\alpha}=\left(ab\right)^{\alpha}=\left(ba\right)^{\alpha}$；

3) $a^{\alpha}+\left(b^{\alpha}+c^{\alpha}\right)=\left(a^{\alpha}+b^{\alpha}\right)+c^{\alpha}$，$a^{\alpha}\left(b^{\alpha}c^{\alpha}\right)=\left(a^{\alpha}b^{\alpha}\right)c^{\alpha}$；

4) $a^{\alpha}\left(b^{\alpha}+c^{\alpha}\right)=a^{\alpha}b^{\alpha}+a^{\alpha}c^{\alpha}$；

5) $a^{\alpha}+0^{\alpha}=0^{\alpha}+a^{\alpha}=a^{\alpha}$，$a^{\alpha}1^{\alpha}=1^{\alpha}\alpha^{\alpha}=a^{\alpha}$。

利用Yang的方法可定义局部分数阶导数和局部分数阶积分，参见文献[9] [10]。

记 $f\left(x\right)\in C_{\alpha}\left(a,b\right)$ 表示 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[a,b\right]$ 上局部分数阶连续；$f\left(x\right)\in D_{\alpha}\left[a,b\right]$ 表示 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[a,b\right]$ 上 α 阶局部分数阶可导；${}_{a}I_{b}^{(\alpha)}f\left(x\right)$ 表示 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[a,b\right]$ 上 α 阶局部分数阶积分。

这里，需要注意 ${}_{a}I_{a}^{(\alpha)}f\left(x\right)=0$，并且当 $a<b$ 时，${}_{a}I_{b}^{(\alpha)}f\left(x\right)=-{}_{b}I_{a}^{(\alpha)}f\left(x\right)$。若对任意 $x\in\left[a,b\right]$，${}_{a}I_{x}^{(\alpha)}f\left(x\right)$ 存在，则记为 $f\left(x\right)\in I_{x}^{(\alpha)}\left[a,b\right]$。

引理1 [10] 1) 设 $f\left(x\right)=g^{(\alpha)}\left(x\right)\in C_{\alpha}\left[a,b\right]$，则

$$ {}_{a}I_{b}^{(\alpha)}f\left(x\right)=g\left(b\right)-g\left(a\right)。$$

2) 设 $f\left(x\right)$，$g\left(x\right)\in D_{\alpha}\left[a,b\right]$，且 $f^{(\alpha)}\left(x\right),g^{(\alpha)}\left(x\right)\in C_{\alpha}\left[a,b\right]$，则

$$ {}_{a}I_{b}^{(\alpha)}f\left(x\right)g^{(\alpha)}\left(x\right)=f\left(x\right)g\left(x\right)\Big|_{a}^{b}-{}_{a}I_{b}^{(\alpha)}f^{(\alpha)}\left(x\right)g\left(x\right)。$$

引理2 [10] $\dfrac{\mathrm{d}^{\alpha}x^{k\alpha}}{\mathrm{d}x^{\alpha}}=\dfrac{\Gamma\left(1+k\alpha\right)}{\Gamma\left(1+\left(k-1\right)\alpha\right)}x^{(k-1)\alpha}$；

$$\frac{1}{\Gamma\left(1+\alpha\right)}\int_{a}^{b}x^{k\alpha}\left(\mathrm{d}x\right)^{\alpha}=\frac{\Gamma\left(1+k\alpha\right)}{\Gamma\left(1+\left(k+1\right)\alpha\right)}\left(b^{(k+1)\alpha}-a^{(k+1)\alpha}\right),\quad k\in R。$$

引理3 [10]**广义Hölder不等式** 设 $f,g\in C_{\alpha}\left[a,b\right]$，$p,q>1$ 且 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，则

$$\frac{1}{\Gamma\left(1+\alpha\right)}\int_{a}^{b}\left|f\left(x\right)g\left(x\right)\right|\left(\mathrm{d}x\right)^{\alpha}\le\left(\frac{1}{\Gamma\left(1+\alpha\right)}\int_{a}^{b}\left|f\left(x\right)\right|^{p}\left(\mathrm{d}x\right)^{\alpha}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{\Gamma\left(1+\alpha\right)}\int_{a}^{b}\left|g\left(x\right)\right|^{q}\left(\mathrm{d}x\right)^{\alpha}\right)^{\frac{1}{q}}。$$

定义2 [14]令 $I\subset\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$，$f:I\to\mathbb{R}^{\alpha}$。如果对任意 $x,y\in I$，$t\in\left[0,1\right]$，函数 f 满足

$$f\left(\frac{xy}{tx+\left(1-t\right)y}\right)\le t^{\alpha}f\left(y\right)+\left(1-t\right)^{\alpha}f\left(x\right),$$

则称 f 为 I 上的广义调和凸函数。

定理3 [15]**广义调和凸函数的Jensen不等式** 若 f 为 $\left[a,b\right]$ 上的广义调和凸函数，则对任意 $x_{i}\in\left[a,b\right]$，满足

$$f\left(\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{w_i}{x_i}\right]^{-1}\right)\le\sum_{i=1}^{n}w_i^{\alpha}f\left(x_i\right) \tag{4}$$

其中 $w_i\in[0,1](i=1,2,\cdots,n)$ 且 $\sum_{i=1}^{n}w_i=1$。

定理 4 [15]广义调和凸函数的 Jensen-Mercer 不等式 若 f 为 $[a,b]$ 上的广义调和凸函数，则对任意 $x_i\in[a,b]$，满足

$$f\left(\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\sum_{i=1}^{n}\frac{w_i}{x_i}\right]^{-1}\right)\le f(a)+f(b)-\sum_{i=1}^{n}w_i^{\alpha}f\left(x_i\right) \tag{5}$$

其中 $w_i\in[0,1](i=1,2,\cdots,n)$ 且 $\sum_{i=1}^{n}w_i=1$。

3. 主要结论

利用分形集理论，首先给出广义调和(p, s)-凸函数的定义。

定义 3 令 $I\subset\mathbb{R}\setminus\{0\}$，$f:I\to\mathbb{R}^{\alpha}$。如果对任意 $x,y\in I$，$t\in[0,1]$，函数 f 满足

$$f\left(\left[\frac{t}{x^p}+\frac{1-t}{y^p}\right]^{-\frac{1}{p}}\right)\le t^{s\alpha}f(x)+(1-t)^{s\alpha}f(y) \tag{6}$$

则称 f 为 I 上的广义调和(p, s)-凸函数，其中 $p\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$，$s\in(0,1]$。

注 1 在式(6)中，当 $-p=s=1$ 时，f 则为广义凸函数；当 $-p=s=\alpha=1$ 时，f 则为凸函数；当 $p=s=1$ 时，f 则为广义调和凸函数；当 $p=s=\alpha=1$ 时，f 则为调和凸函数；当 $s=\alpha=1$ 时，f 则为调和 p-凸函数；当 $\alpha=1$ 时，f 则为调和(p, s)-凸函数。特别地，当 $s=1$ 时，则可定义 f 为广义调和 p-凸函数。

定理 5 广义调和(p, s)-凸函数的 Jensen 不等式 令 $I\subset\mathbb{R}\setminus\{0\}$，$f:I\to\mathbb{R}^{\alpha}$。如果 f 为 I 上的广义调和(p, s)-凸函数，则对任意 $x_i\in I$，满足

$$f\left(\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{w_i}{x_i^p}\right]^{-\frac{1}{p}}\right)\le\sum_{i=1}^{n}w_i^{s\alpha}f\left(x_i\right) \tag{7}$$

其中 $w_i\in[0,1](i=1,2,\cdots,n)$ 且 $\sum_{i=1}^{n}w_i=1$。

证明 采用数学归纳法进行证明。当 $n=2$ 时，由定义 3，不等式显然成立。假设当 $n=k$ 时不等式也是成立的，即当 $x_1,x_2,\cdots,x_k\in I$，$w_i>0$，$i=1,2,\cdots,k$，$\sum_{i=1}^{k}w_i=1$，有

$$f\left(\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{w_i}{x_i^p}\right]^{-\frac{1}{p}}\right)\le\sum_{i=1}^{k}w_i^{s\alpha}f\left(x_i\right)。$$

设 $x_1,x_2,\cdots,x_k,x_{k+1}\in I$，$r_i>0$，$i=1,2,\cdots,k,k+1$，$\sum_{i=1}^{k+1}r_i=1$，取 $w_i=\frac{r_i}{1-r_{k+1}}$，则对所有的 $i=1,2,\cdots,k$，w_i 满足 $\sum_{i=1}^{k}w_i=1$。

因此

$$f\left(\left[\sum_{i=1}^{k+1}\frac{r_i}{x_i^p}\right]^{-\frac{1}{p}}\right)=f\left(\left[\left(1-r_{k+1}\right)\frac{\frac{r_1}{x_1^p}+\frac{r_2}{x_2^p}+\cdots+\frac{r_k}{x_k^p}}{1-r_{k+1}}+\frac{r_{k+1}}{x_{k+1}^p}\right]^{-\frac{1}{p}}\right)$$

$$\le\left(1-r_{k+1}\right)^{s\alpha}f\left(\left[\frac{\frac{r_1}{x_1^p}+\frac{r_2}{x_2^p}+\cdots+\frac{r_k}{x_k^p}}{1-r_{k+1}}\right]^{-\frac{1}{p}}\right)+r_{k+1}^{s\alpha}f\left(x_{k+1}\right)$$

$$=\left(1-r_{k+1}\right)^{s\alpha}f\left(\left[\frac{w_1}{x_1^p}+\frac{w_2}{x_2^p}+\cdots+\frac{w_k}{x_k^p}\right]^{-\frac{1}{p}}\right)+r_{k+1}^{s\alpha}f\left(x_{k+1}\right)$$

$$\le\left(1-r_{k+1}\right)^{s\alpha}\left[w_1^{s\alpha}f\left(x_1\right)+w_2^{s\alpha}f\left(x_2\right)+\cdots+w_k^{s\alpha}f\left(x_k\right)\right]+r_{k+1}^{s\alpha}f\left(x_{k+1}\right)$$

$$=\left(1-r_{k+1}\right)^{s\alpha}\left[\left(\frac{r_1}{1-r_{k+1}}\right)^{s\alpha}f\left(x_1\right)+\left(\frac{r_2}{1-r_{k+1}}\right)^{s\alpha}f\left(x_2\right)+\cdots+\left(\frac{r_k}{1-r_{k+1}}\right)^{s\alpha}f\left(x_k\right)\right]+r_{k+1}^{s\alpha}f\left(x_{k+1}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{k+1}r_i^{s\alpha}f\left(x_i\right)$$

证毕。

注 2 利用定理 5 和注 1，若取 $-p=s=1$，可得到文献[12]中的定理 4.1；若取 $p=s=1$，可得到文献[15]中的定理 5；若取 $-p=s=\alpha=1$，可得到定理 1。

推论 1 广义调和 *p*-凸函数的 Jensen 不等式 假设定理 5 中的条件成立，取 $s=1$，f 为 I 上的广义调和 p-凸函数，则对任意 $x_i\in I$，满足

$$f\left(\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{w_i}{x_i^p}\right]^{-\frac{1}{p}}\right)\le\sum_{i=1}^{n}w_i^{\alpha}f\left(x_i\right)\tag{8}$$

其中 $w_i\in[0,1]\left(i=1,2,\cdots,n\right)$ 且 $\sum_{i=1}^{n}w_i=1$。

定理 6 令 $I\subset\mathbb{R}\setminus\{0\}$，$f:[a,b]\subseteq I\to\mathbb{R}^{\alpha}$。如果 f 为 I 上的广义调和(p,s)-凸函数，则对任意 $x\in[a,b]$，满足

$$f\left(\left[\frac{1}{a^p}+\frac{1}{b^p}-\frac{1}{x^p}\right]^{-\frac{1}{p}}\right)\le\left[t^{s\alpha}+\left(1-t\right)^{s\alpha}\right]\left[f\left(a\right)+f\left(b\right)\right]-f\left(x\right),$$

其中 $t\in[0,1]$。

证明 取 $\frac{1}{x}=\left[\frac{1-t}{a^p}+\frac{t}{b^p}\right]^{\frac{1}{p}}$，$t\in[0,1]$，则

$$f\left(\left[\frac{1}{a^p}+\frac{1}{b^p}-\frac{1}{x^p}\right]^{-\frac{1}{p}}\right)=f\left(\left[\frac{t}{a^p}+\frac{1-t}{b^p}\right]^{-\frac{1}{p}}\right)\le t^{s\alpha}f(a)+(1-t)^{s\alpha}f(b)$$
$$=\left[t^{s\alpha}+(1-t)^{s\alpha}\right]\left[f(a)+f(b)\right]-t^{s\alpha}f(b)-(1-t)^{s\alpha}f(a)$$
$$\le\left[t^{s\alpha}+(1-t)^{s\alpha}\right]\left[f(a)+f(b)\right]-f(x)$$

注 3 利用定理 6 和注 1，若取 $-p=s=1$，可得到文献[16]中的引理 3.1；若取 $p=s=1$，可得到文献[15]中的引理 3。

推论 2 假设定理 6 中的条件成立，取 $s=1$，f 为 I 上的广义调和 p-凸函数，则对任意 $x\in[a,b]$，有

$$f\left(\left[\frac{1}{a^p}+\frac{1}{b^p}-\frac{1}{x^p}\right]^{-\frac{1}{p}}\right)\le f(a)+f(b)-f(x) \tag{9}$$

定理 7 广义调和(*p*, *s*)-凸函数 Jensen-Mercer 不等式 令 $I\subset\mathbb{R}\setminus\{0\}$，$f:[a,b]\subseteq I\to\mathbb{R}^\alpha$。如果 f 为 I 上的广义调和(p, s)-凸函数，则对任意 $x_i\in[a,b]$，满足

$$f\left(\left[\frac{1}{a^p}+\frac{1}{b^p}-\sum_{i=1}^{n}\frac{w_i}{x_i^p}\right]^{-\frac{1}{p}}\right)\le\sum_{i=1}^{n}w_i^{s\alpha}\left(t^{s\alpha}+(1-t)^{s\alpha}\right)\left[f(a)+f(b)\right]-\sum_{i=1}^{n}w_i^{s\alpha}f(x_i),$$

其中 $w_i\in[0,1]\,(i=1,2,\cdots,n)$ 且 $\sum_{i=1}^{n}w_i=1$。

证明 由定理 5、定理 6 以及 f 在 $[a,b]$ 上的广义调和(p, s)-凸性，有

$$f\left(\left[\frac{1}{a^p}+\frac{1}{b^p}-\sum_{i=1}^{n}\frac{w_i}{x_i^p}\right]^{-\frac{1}{p}}\right)\le\sum_{i=1}^{n}w_i^{s\alpha}f\left(\left[\frac{1}{a^p}+\frac{1}{b^p}-\frac{1}{x_i^{\,p}}\right]^{-\frac{1}{p}}\right)$$
$$\le\sum_{i=1}^{n}w_i^{s\alpha}\left[\left(t^{s\alpha}+(1-t)^{s\alpha}\right)\left(f(a)+f(b)\right)-f(x_i)\right]$$
$$=\sum_{i=1}^{n}w_i^{s\alpha}\left(t^{s\alpha}+(1-t)^{s\alpha}\right)\left(f(a)+f(b)\right)-\sum_{i=1}^{n}w_i^{s\alpha}f(x_i)$$

注 4 利用定理 7 和注 1，若取 $-p=s=1$，可得到文献[16]中的定理 3.1；若取 $p=s=1$，可得到定理 3；若取 $-p=s=\alpha=1$，可得到定理 2。

推论 3 广义调和 *p*-凸函数 Jensen-Mercer 不等式 假设定理 7 中的条件成立，取 $s=1$，f 为 I 上的广义调和 p-凸函数，则对任意 $x_i\in[a,b]$，满足

$$f\left(\left[\frac{1}{a^p}+\frac{1}{b^p}-\sum_{i=1}^{n}\frac{w_i}{x_i^p}\right]^{-\frac{1}{p}}\right)\le f(a)+f(b)-\sum_{i=1}^{n}w_i^{\alpha}f(x_i) \tag{10}$$

为建立涉及局部分数阶微积分的 Hermite-Hadamard 型不等式，需对广义 Jensen-Mercer 不等式进行变形与细化。

定理 8 令 $I\subset\mathbb{R}\setminus\{0\}$，$f:[a,b]\subseteq I\to\mathbb{R}^\alpha$。如果 f 为 I 上的广义调和(p, s)-凸函数，则对任意 $a_i\in[a,b]$，满足

$$f\left(\left[\frac{1}{a^p}+\frac{1}{b^p}-\frac{1}{\bar{a}^p}\right]^{-\frac{1}{p}}\right)\le\sum_{i=1}^{n}w_i^{s\alpha}f\left(\left[\frac{1}{a^p}+\frac{1}{b^p}-\left(\frac{1-t}{\bar{a}^p}+\frac{t}{a_i^p}\right)\right]^{-\frac{1}{p}}\right)$$
$$\le\left(\sum_{i=1}^{n}w_i^{s\alpha}(1-t)^{s\alpha}+t^{s\alpha}\right)\left[\sum_{i=1}^{n}w_i^{s\alpha}\left((1-t)^{s\alpha}+t^{s\alpha}\right)\left(f(a)+f(b)\right)-\sum_{i=1}^{n}w_i^{s\alpha}f(a_i)\right] \tag{11}$$

其中 $w_i\in[0,1]$ 且 $\sum_{i=1}^{n}w_i=1$，$\frac{1}{\bar{a}^p}=\sum_{i=1}^{n}w_i\frac{1}{a_i^p}$。

证明 利用定理 5 并结合 $\frac{1}{\bar{a}^p}=\sum_{i=1}^{n}w_i\frac{1}{a_i^p}$，有

$$f\left(\left[\frac{1}{a^p}+\frac{1}{b^p}-\frac{1}{\bar{a}^p}\right]^{-\frac{1}{p}}\right)=f\left(\left[\sum_{i=1}^{n}w_i\left(\frac{1}{a^p}+\frac{1}{b^p}-\left(\frac{1-t}{\bar{a}^p}+\frac{t}{a_i^p}\right)\right)\right]^{-\frac{1}{p}}\right)$$
$$\le\sum_{i=1}^{n}w_i^{s\alpha}f\left(\left[\frac{1}{a^p}+\frac{1}{b^p}-\left(\frac{1-t}{\bar{a}^p}+\frac{t}{a_i^p}\right)\right]^{-\frac{1}{p}}\right) \tag{12}$$

另一方面，由广义调和(p,s)-凸函数的定义、定理 6 以及定理 7，有

$$\sum_{i=1}^{n}w_i^{s\alpha}f\left(\left[\frac{1}{a^p}+\frac{1}{b^p}-\left(\frac{1-t}{\bar{a}^p}+\frac{t}{a_i^p}\right)\right]^{-\frac{1}{p}}\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}w_i^{s\alpha}f\left(\left[(1-t)\left(\frac{1}{a^p}+\frac{1}{b^p}-\frac{1}{\bar{a}^p}\right)+t\left(\frac{1}{a^p}+\frac{1}{b^p}-\frac{1}{a_i^p}\right)\right]^{-\frac{1}{p}}\right)$$
$$\le\sum_{i=1}^{n}w_i^{s\alpha}\left[(1-t)^{s\alpha}f\left(\left[\frac{1}{a^p}+\frac{1}{b^p}-\frac{1}{\bar{a}^p}\right]^{-\frac{1}{p}}\right)+t^{s\alpha}f\left(\left[\frac{1}{a^p}+\frac{1}{b^p}-\frac{1}{a_i^p}\right]^{-\frac{1}{p}}\right)\right]$$
$$\le\left(\sum_{i=1}^{n}w_i^{s\alpha}(1-t)^{s\alpha}+t^{s\alpha}\right)\left[\left(\sum_{i=1}^{n}w_i^{s\alpha}(1-t)^{s\alpha}+t^{s\alpha}\right)\left(f(a)+f(b)\right)-\sum_{i=1}^{n}w_i^{s\alpha}f(a_i)\right] \tag{13}$$

由式(12)和(13)，可得到式(11)成立。

注 5 在定理 8 中，若取 $p=s=\alpha=1$，可得到文献[17]中的定理 2.3；若取 $-p=s=\alpha=1$，可得到文献[18]中的定理 2.1；若取 $p=s=1$，可得到文献[15]中的定理 7。

推论 4 假设定理 8 中的条件成立，取 $s=1$，f 为 I 上的广义调和 p-凸函数，则对任意 $a_i\in[a,b]$，满足

$$f\left(\left[\frac{1}{a^p}+\frac{1}{b^p}-\frac{1}{\bar{a}^p}\right]^{-\frac{1}{p}}\right)\le\sum_{i=1}^{n}w_i^{\alpha}f\left(\left[\frac{1}{a^p}+\frac{1}{b^p}-\left(\frac{1-t}{\bar{a}^p}+\frac{t}{a_i^p}\right)\right]^{-\frac{1}{p}}\right)\le f(a)+f(b)-\sum_{i=1}^{n}w_i^{\alpha}f(a_i),$$

其中 $w_i\in[0,1]$ 且 $\sum_{i=1}^{n}w_i=1$，$\frac{1}{\bar{a}^p}=\sum_{i=1}^{n}w_i\frac{1}{a_i^p}$。

定理 9 假设定理 8 中的条件成立且 $f(x)\in I_x^{(\alpha)}[a,b]$，则有关于广义调和$(p,\ s)$-凸函数的 Hermite-Hadamard 型不等式

$$f\left(\left[\frac{1}{a^p}+\frac{1}{b^p}-\frac{1}{\bar{a}^p}\right]^{-\frac{1}{p}}\right)\le\sum_{i=1}^{n}\frac{w_i^{s\alpha}\Gamma(1+\alpha)p^{\alpha}}{\left(\frac{1}{a_i^p}-\frac{1}{\bar{a}^p}\right)^{\alpha}}{}_{\left[\frac{1}{a^p}+\frac{1}{b^p}-\frac{1}{\bar{a}^p}\right]^{-\frac{1}{p}}}I^{(\alpha)}_{\left[\frac{1}{a^p}+\frac{1}{b^p}-\frac{1}{a_i^p}\right]^{-\frac{1}{p}}}\frac{f(x)}{x^{(p+1)\alpha}}$$

$$\le\left(\sum_{i=1}^{n}w_i^{s\alpha}+1^{\alpha}\right)\left[\sum_{i=1}^{n}w_i^{s\alpha}\left(\frac{\Gamma(1+2s\alpha)\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+(2s+1)\alpha)}+\Gamma(1+\alpha)B^{\alpha}(s+1,s+1)\right)\right.$$

$$\left.\times(f(a)+f(b))-\frac{\Gamma(1+s\alpha)\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+(s+1)\alpha)}\sum_{i=1}^{n}w_i^{s\alpha}f(a_i)\right]\tag{14}$$

其中 $B^{\alpha}(x,y)$ 为分型空间中的 Beta 函数[19]，即

$$B^{\alpha}(x,y)=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1 t^{(x-1)\alpha}(1-t)^{(y-1)\alpha}(\mathrm{d}t)^{\alpha}，\quad x>0，\quad y>0。$$

证明 式(11)的每一项对 t 在 $[0,1]$ 上进行局部分数阶积分，可得式(14)。事实上，利用引理 2，有

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1\sum_{i=1}^{n}w_i^{s\alpha}\left((1-t)^{s\alpha}+t^{s\alpha}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}w_i^{s\alpha}(1-t)^{s\alpha}+t^{s\alpha}\right)(\mathrm{d}t)^{\alpha}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1\left[\sum_{i=1}^{n}w_i^{s\alpha}\sum_{i=1}^{n}w_i^{s\alpha}(1-t)^{2s\alpha}+\sum_{i=1}^{n}w_i^{s\alpha}t^{2s\alpha}\right](\mathrm{d}t)^{\alpha}$$

$$+\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1\left[\sum_{i=1}^{n}w_i^{s\alpha}\sum_{i=1}^{n}w_i^{s\alpha}(1-t)^{s\alpha}t^{s\alpha}+\sum_{i=1}^{n}w_i^{s\alpha}(1-t)^{s\alpha}t^{s\alpha}\right](\mathrm{d}t)^{\alpha}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}w_i^{s\alpha}\sum_{i=1}^{n}w_i^{s\alpha}+\sum_{i=1}^{n}w_i^{s\alpha}\right)\left(\frac{\Gamma(1+2s\alpha)}{\Gamma(1+(2s+1)\alpha)}+B^{\alpha}(s+1,s+1)\right)$$

和

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1(1-t)^{s\alpha}(\mathrm{d}t)^{\alpha}=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1 t^{s\alpha}(\mathrm{d}t)^{\alpha}=\frac{\Gamma(1+s\alpha)}{\Gamma(1+(s+1)\alpha)}。$$

利用变量代换 $u=\left[(1-t)\left(\frac{1}{a^p}+\frac{1}{b^p}-\frac{1}{\bar{a}^p}\right)+t\left(\frac{1}{a^p}+\frac{1}{b^p}-\frac{1}{a_i^p}\right)\right]^{-\frac{1}{p}}$，有

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1 f\left(\left[\frac{1}{a^p}+\frac{1}{b^p}-\left(\frac{1-t}{\bar{a}^p}+\frac{t}{a_i^p}\right)\right]^{-\frac{1}{p}}\right)(\mathrm{d}t)^{\alpha}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1 f\left(\left[(1-t)\left(\frac{1}{a^p}+\frac{1}{b^p}-\frac{1}{\bar{a}^p}\right)+t\left(\frac{1}{a^p}+\frac{1}{b^p}-\frac{1}{a_i^p}\right)\right]^{-\frac{1}{p}}\right)(\mathrm{d}t)^{\alpha}$$

$$=\frac{p^{\alpha}}{\left(\frac{1}{a_i^p}-\frac{1}{\bar{a}^p}\right)^{\alpha}}\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\left[\frac{1}{a^p}+\frac{1}{b^p}-\frac{1}{\bar{a}^p}\right]^{-\frac{1}{p}}}^{\left[\frac{1}{a^p}+\frac{1}{b^p}-\frac{1}{a_i^p}\right]^{-\frac{1}{p}}}\frac{f(u)}{u^{(p+1)\alpha}}(\mathrm{d}u)^{\alpha}$$

$$=\frac{p^{\alpha}}{\left(\frac{1}{a_i^p}-\frac{1}{\bar{a}^p}\right)^{\alpha}}{}_{\left[\frac{1}{a^p}+\frac{1}{b^p}-\frac{1}{\bar{a}^p}\right]^{-\frac{1}{p}}}I^{(\alpha)}_{\left[\frac{1}{a^p}+\frac{1}{b^p}-\frac{1}{a_i^p}\right]^{-\frac{1}{p}}}\frac{f(x)}{x^{(p+1)\alpha}}$$

推论 5 在定理 9 中，取 $s=1$，则有关于广义调和 p-凸函数的 Hermite-Hadamard 型不等式

$$f\left(\left[\frac{1}{a^p}+\frac{1}{b^p}-\frac{1}{\bar{a}^p}\right]^{-\frac{1}{p}}\right)\le\sum_{i=1}^{n}\frac{w_i^\alpha\Gamma(1+\alpha)p^\alpha}{\left(\frac{1}{a_i^p}-\frac{1}{\bar{a}^p}\right)^\alpha}{}_{\left[\frac{1}{a^p}+\frac{1}{b^p}-\frac{1}{\bar{a}^p}\right]^{-\frac{1}{p}}}I^{(\alpha)}_{\left[\frac{1}{a^p}+\frac{1}{b^p}-\frac{1}{a_i^p}\right]^{-\frac{1}{p}}}\frac{f(x)}{x^{(p+1)\alpha}}$$
$$\le\frac{2^\alpha\Gamma^2(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}\left(f(a)+f(b)-\sum_{i=1}^{n}w_i^\alpha f(a_i)\right)\tag{15}$$

注 6 在推论 9 中，若取 $p=\alpha=1$，可得到文献[17]中的推论 2.4；若取 $-p=\alpha=1$，可得到文献[18]中的推论 2.1。

推论 6 [20] 在定理 9 中，取 $-p=s=1$，$w_1=w_2=\frac{1}{2}$，$a_1=a$，$b_1=b$，则有关于广义凸函数的 Hermite-Hadamard 不等式

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^\alpha}{}_aI_b^{(\alpha)}f(x)$$
$$\le\frac{\Gamma^2(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}\left[f(a)+f(b)\right]$$

考虑推论 5，给出有关广义调和 p-凸函数更精确的结果，即推论 7。

推论 7 令 $I\subset\mathbb{R}\setminus\{0\}$，$f:[a,b]\subseteq I\to\mathbb{R}^\alpha$。如果 f 为 I 上的广义调和 p-凸函数，则对任意 $a_i\in[a,b]$，满足

$$f\left(\left[\frac{1}{a^p}+\frac{1}{b^p}-\frac{1}{\bar{a}^p}\right]^{-\frac{1}{p}}\right)\le\sum_{i=1}^{n}w_i^\alpha f\left(\left[\frac{1}{a^p}+\frac{1}{b^p}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\bar{a}^p}+\frac{1}{a_i^p}\right)\right]^{-\frac{1}{p}}\right)$$
$$\le\frac{\sum_{i=1}^{n}w_i^\alpha p^\alpha\Gamma(1+\alpha)}{\left(\frac{1}{a_i^p}-\frac{1}{\bar{a}^p}\right)^\alpha}{}_{\left[\frac{1}{a^p}+\frac{1}{b^p}-\frac{1}{\bar{a}^p}\right]^{-\frac{1}{p}}}I^{(\alpha)}_{\left[\frac{1}{a^p}+\frac{1}{b^p}-\frac{1}{a_i^p}\right]^{-\frac{1}{p}}}\frac{f(x)}{x^{(p+1)\alpha}}$$
$$\le\frac{2^\alpha\Gamma^2(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}\left[f(a)+f(b)-\sum_{i=1}^{n}w_i^\alpha f(a_i)\right]$$

其中 $w_i\in[0,1]$ 且 $\sum_{i=1}^{n}w_i=1$，$\frac{1}{\bar{a}^p}=\sum_{i=1}^{n}w_i\frac{1}{a_i^p}$。

证明 利用广义调和 p-凸函数的 Jensen 不等式，有

$$f\left(\left[\frac{1}{a^p}+\frac{1}{b^p}-\frac{1}{\bar{a}^p}\right]^{-\frac{1}{p}}\right)=f\left(\left[\sum_{i=1}^{n}w_i\left(\frac{1}{a^p}+\frac{1}{b^p}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\bar{a}^p}+\frac{1}{a_i^p}\right)\right)\right]^{-\frac{1}{p}}\right)$$
$$\le\sum_{i=1}^{n}w_i^\alpha f\left(\left[\frac{1}{a^p}+\frac{1}{b^p}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\bar{a}^p}+\frac{1}{a_i^p}\right)\right]^{-\frac{1}{p}}\right)\tag{16}$$

又由函数 f 的广义调和 p-凸性，可得

$$f\left(\left[\frac{1}{a^p}+\frac{1}{b^p}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\overline{a}^p}+\frac{1}{a_i^p}\right)\right]^{-\frac{1}{p}}\right)$$

$$=f\left(\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^p}+\frac{1}{b^p}-\left(\frac{t}{\overline{a}^p}+\frac{1-t}{a_i^p}\right)\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^p}+\frac{1}{b^p}-\left(\frac{1-t}{\overline{a}^p}+\frac{t}{a_i^p}\right)\right)\right]^{-\frac{1}{p}}\right) \tag{17}$$

$$\le\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha}\left[f\left(\left[\frac{1}{a^p}+\frac{1}{b^p}-\left(\frac{t}{\overline{a}^p}+\frac{1-t}{a_i^p}\right)\right]^{-\frac{1}{p}}\right)+f\left(\left[\frac{1}{a^p}+\frac{1}{b^p}-\left(\frac{1-t}{\overline{a}^p}+\frac{t}{a_i^p}\right)\right]^{-\frac{1}{p}}\right)\right]$$

式(16)两边同时对 t 在 $[0,1]$ 上进行局部分数阶积分，有

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}f\left(\left[\frac{1}{a^p}+\frac{1}{b^p}-\frac{1}{\overline{a}^p}\right]^{-\frac{1}{p}}\right)\le\frac{\sum_{i=1}^{n}w_i^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}f\left(\left[\frac{1}{a^p}+\frac{1}{b^p}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\overline{a}^p}+\frac{1}{a_i^p}\right)\right]^{-\frac{1}{p}}\right). \tag{18}$$

式(17)两边同乘 $\sum_{i=1}^{n}w_i^{\alpha}$ 并对 t 在 $[0,1]$ 上进行局部分数阶积分，有

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}w_i^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}f\left(\left[\frac{1}{a^p}+\frac{1}{b^p}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\overline{a}^p}+\frac{1}{a_i^p}\right)\right]^{-\frac{1}{p}}\right)$$

$$\le\frac{\sum_{i=1}^{n}w_i^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1 f\left(\left[\frac{1}{a^p}+\frac{1}{b^p}-\left(\frac{t}{\overline{a}^p}+\frac{1-t}{a_i^p}\right)\right]^{-\frac{1}{p}}\right)(\mathrm{d}t)^{\alpha} \tag{19}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}w_i^{\alpha}p^{\alpha}}{\left(\frac{1}{a_i^p}-\frac{1}{\overline{a}^p}\right)^{\alpha}}\,{}_{\left[\frac{1}{a^p}+\frac{1}{b^p}-\frac{1}{\overline{a}^p}\right]^{-\frac{1}{p}}}I^{(\alpha)}_{\left[\frac{1}{a^p}+\frac{1}{b^p}-\frac{1}{a_i^p}\right]^{-\frac{1}{p}}}\frac{f(x)}{x^{(p+1)\alpha}}$$

由式(18)，(19)以及式(15)的第二个不等式，定理得证。

注 7 在推论 7 中，若取 $p=\alpha=1$，可得到文献[17]中的定理 2.6；若取 $-p=\alpha=1$，可得到文献[18]中的定理 2.2。

4. 概率方面的应用

设 χ 是一个随机变量，χ 的广义概率密度函数为 $f:[a,b]\to\left[0^{\alpha},1^{\alpha}\right]$ 且 f 为广义调和 p-凸函数。在分形空间中，为研究概率问题，可给出如下定义[15]：

广义分布函数 $P_{\alpha}(\chi\le z)=F_{\alpha}(z)=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^z f(t)(\mathrm{d}t)^{\alpha}$；

广义期望 $E_{\alpha}=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b t^{\alpha}f(t)(\mathrm{d}t)^{\alpha}$；

广义 p-矩 $E_{p\alpha}=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b t^{p\alpha}f(t)(\mathrm{d}t)^{\alpha}$，$p\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$。

命题 1 在推论 3 中取 $n=2$， $w_1=w_2=\frac{1}{2}$， $x_1=\xi_1$， $x_2=\xi_2$，有

$$P_\alpha\left(\chi\le\frac{1}{\left[\frac{1}{a^p}+\frac{1}{b^p}-\frac{\xi_1^p+\xi_2^p}{2\xi_1^p\xi_2^p}\right]^{\frac{1}{p}}}\right)\le P_\alpha(\chi\le a)+P_\alpha(\chi\le b)-\frac{P_\alpha(\chi\le\xi_1)+P_\alpha(\chi\le\xi_2)}{2^\alpha}. \tag{20}$$

例 1 设有广义概率密度函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{\Gamma(1+(p+1)\alpha)}{\Gamma(1+p\alpha)\left(b^{(p+1)\alpha}-a^{(p+1)\alpha}\right)}x^{p\alpha}, a\le x\le b\\ 0, \quad 其它\end{cases}$，显然 f 为广义调和 p-凸函数，则有不等式

$$\left(\frac{1}{a^p}+\frac{1}{b^p}-\frac{\xi_1^p+\xi_2^p}{2\xi_1^p\xi_2^p}\right)^{-\frac{p+1}{p}\alpha}\le b^{(p+1)\alpha}+a^{(p+1)\alpha}-\frac{\xi_1^{(p+1)\alpha}+\xi_2^{(p+1)\alpha}}{2^\alpha}. \tag{21}$$

证明 由题意可得 f 的广义分布函数为 $F(x)=\frac{1}{b^{(p+1)\alpha}-a^{(p+1)\alpha}}x^{(p+1)\alpha}$。利用式(20)，经简单计算可得式(21)成立。

命题 2 在推论 5 中取 $n=2$， $w_1=w_2=\frac{1}{2}$， $a_1=a$， $a_2=b$，有

$$\begin{aligned}P_\alpha\left(\chi\le\frac{2^{\frac{1}{p}}ab}{\left[a^p+b^p\right]^{\frac{1}{p}}}\right)&\le\left(\frac{a^pb^p}{b^p-a^p}\right)^\alpha\frac{p^\alpha\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-(p+1)\alpha)}{\Gamma(1-p\alpha)}\left[\left(\frac{1}{b^p}\right)^\alpha-E_{-p\alpha}(\chi)\right]\\&\le\frac{\Gamma^2(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}\left[P_\alpha(\chi\le a)+P_\alpha(\chi\le b)\right]\end{aligned}$$

5. 总结

本文在分形集上定义了调和(*p*, *s*)-凸函数，结果表明，适当选择参数 p、s 和 α，可得到众多凸函数延伸类，如调和 *p*-凸函数、调和 *s*-凸函数、调和(*p*, *s*)-凸函数和广义调和凸函数。故证明的有关广义调和(*p*, *s*)-凸函数的 Jensen 不等式、Jensen-Mercer 不等式和 Hermite-Hadamard 型不等式具有更广泛的意义。最后把相关结论用在了概率密度函数的讨论上。在未来的研究中，可以考虑引入强调和(*p*, *s*)-凸函数的定义，推广文中的相关结论。

基金项目

国家自然科学基金项目(11801342)；陕西省自然科学基础研究计划项目(2023JCYB043)。

参考文献

[1] İşcan, İ. (2014) Hermite-Hadamard Type Inequalities for Harmonically Convex Functions. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, **43**, 935-942. https://doi.org/10.15672/HJMS.2014437519

[2] İşcan, İ. (2015) Ostrowski Type Inequalities for Harmonically *s*-Convex Functions. *Konuralp Journal of Mathematics*, **3**, 63-74.

[3] Baloch, I.A. and İşcan, İ. (2017) Some Hermite-Hadamard Type Integral Inequalities for Harmonically $(p,(s,m))$-Convex Functions. *Journal of Inequalities and Special Functions*, **8**, 65-84.

[4] Zhao, D., Zhao, G., Ye, G., *et al*. (2021) On Hermite-Hadamard-Type Inequalities for Coordinated *h*-Convex Interval-Valued Functions. *Mathematics*, **9**, Article No. 2352. https://doi.org/10.3390/math9192352

[5] Lian, T.Y. and Tang, W. (2018) Generalizations of Hermite-Hadamard Type Inequalities Involving *s*-Convex Functions. *Chinese Quarterly Journal of Mathematics*, **33**, 278-286.

[6] Dragomir, S.S. (2021) Hermite-Hadamard Type Inequalities for Generalized Riemann-Liouville Fractional Integrals of *h*-Convex Functions. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **44**, 2364-2380. https://doi.org/10.1002/mma.5893

[7] 张孔生, 万建平. *p*-凸函数及其性质[J]. 纯粹数学与应用数学, 2007, 23(1): 130-133.

[8] Miterinovic, D.S., Pecaric, J.E. and Fink, A.M. (1993) Classical and New Inequalities in Analysis. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-017-1043-5

[9] Mercer, A.M.D. (2003) A Variant of Jensen's Inequality. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, **4**, 73.

[10] Yang, X.J. (2012) Advanced Local Fractional Calculus and Its Applications. World Science Publisher, New York

[11] Yang, X.J., Baleanu, D. and Srivastava, H.M. (2015) Local Fractional Integral Transforms and Their Applications. Academic Press, Cambridge, USA.

[12] Mo, H., Sui, X. and Yu, D. (2014) Generalized Convex Functions and Some Inequalities on Fractal Sets. *Abstract and Applied Analysis*, **2014**, Article ID: 636751. https://doi.org/10.1155/2014/636751

[13] Butt, S.I., Yousaf, S., Ahmad, H. and Nofal, T.A. (2022) Jensen-Mercer Inequality and Related Results in the Fractal Sense with Applications. *Fractals*, **30**, Article ID: 2240008. https://doi.org/10.1142/S0218348X22400084

[14] Sun, W.B. (2017) Generalized Harmonically Convex Functions on Fractal Sets and Related Hermite-Hadamard Type Inequalities. *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, **10**, 5869-5880. https://doi.org/10.22436/jnsa.010.11.24

[15] Butt, S.I., Agarwal, P., Yousaf, S. and Guirao, J.L.G. (2022) Generalized Fractal Jensen and Jensen-Mercer Inequalities for Harmonic Convex Function with Applications. *Journal of Inequalities and Applications*, **2022**, Article No. 1. https://doi.org/10.1186/s13660-021-02735-3

[16] Yousaf, S. (2021) Generalized Hermite-Jensen-Mercer-Type Inequalities in Fractal Sense. Master's Thesis, Comsats University Islamabad, Pakistan.

[17] Baloch, I.A., Mughal, A.A., Chu, Y.M., *et al*. (2021) Improvement and Generalization of Some Results Related to the Class of Harmonically Convex Functions and Applications. *Journal of Mathematics and Computer Science*, **22**, 282-294. https://doi.org/10.22436/jmcs.022.03.07

[18] Moradi, H.R. and Furuichi, S. (2020) Improvement and Generalization of Some Jensen-Mercer-Type Inequalities. *Journal of Mathematical Inequalities*, **2020**, 377-383. https://doi.org/10.7153/jmi-2020-14-24

[19] 孙文兵. 分形集上的广义调和*s*-凸函数及Hadamard型不等式[J]. 吉林大学学报(理学版), 2018, 56(6): 1366-1372.

[20] Sun, W.B. (2020) Generalized *h*-Convexity on Fractal Sets and Some Generalized Hadamard-Type inequalities. *Fractals*, **28**, Article ID: 2050021. https://doi.org/10.1142/S0218348X20500218